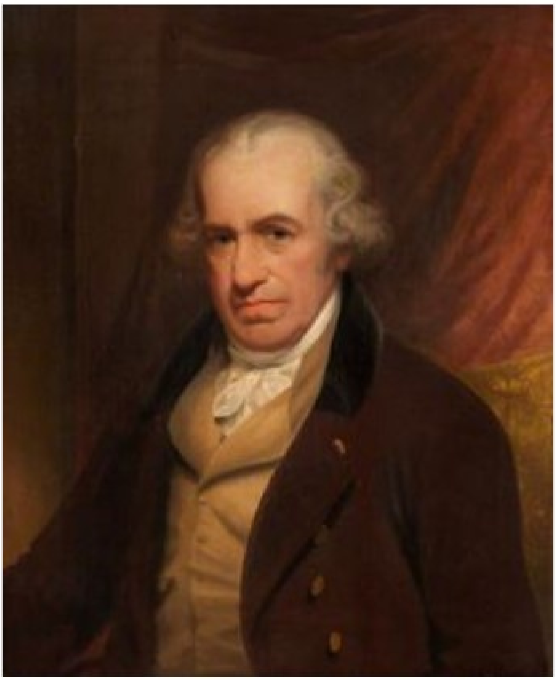
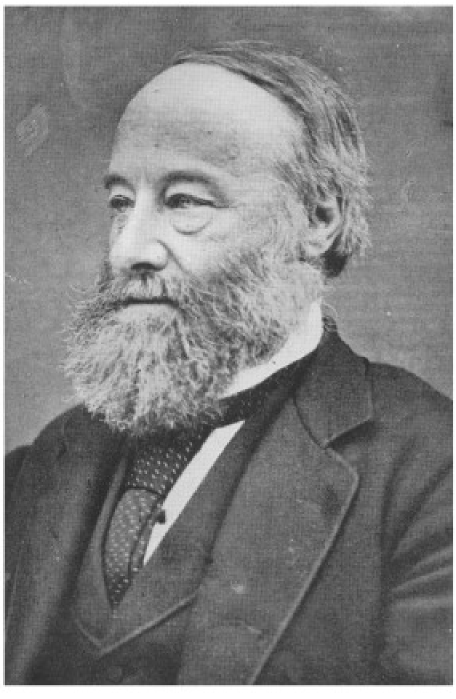
Chap VI

Oscillateur harmonique et signal sinusoïdal

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

Table des matières





Savoirs ♡

- ♡ **Oscillateur harmonique**
  - Equation différentielle
  - pulsation propre ; fréquence ; période
  - Forme générale des solutions

- ♡ **Fonctions sinusoïdales**
  - 2 formes d'un signal sinusoïdal
  - Lien pulsation-fréquence-période
  - phase instantanée et phase à l'origine

- ♡ **Déphasage**
  - définition et cas particulier $\omega_1 = \omega_2$
  - lien avec le graphe
  - 3 déphasages particuliers et savoir les reconnaitre sur un graphe

Savoir Faire

Trouver les conditions initiales sur une grandeurs électriques ***ET ses dérivées***

Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ; utiliser les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration

A l'aide d'un graphe mesurer
1. *une amplitude*
2. *une période et une fréquence*
3. *une phase à l'origine et un déphasage*

Approche énergétique
- *discuter l'évolution des 2 énergies d'un oscillateur harmonique*
- *trouver la valeur de l'énergie totale grâce aux conditions initiales*
- *trouver les valeurs maximales des variables*

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux signaux **périodiques**, c'est-à-dire des signaux qui se reproduisent identiques à eux-mêmes au bout d'une durée fixée. Le plus fondamental/simple des signaux périodiques est le **signal sinusoïdal**.

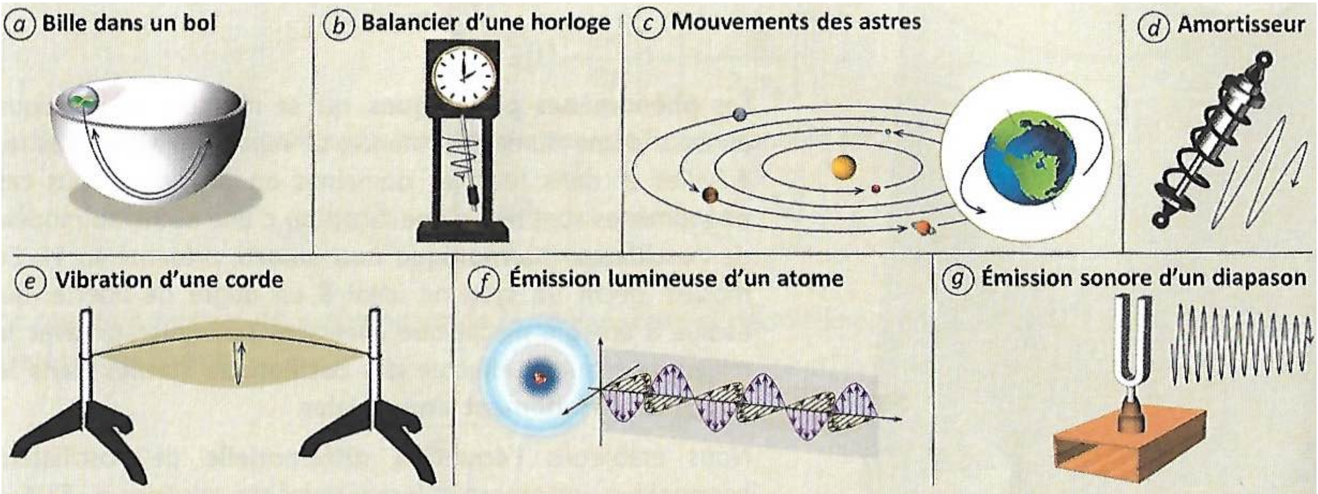


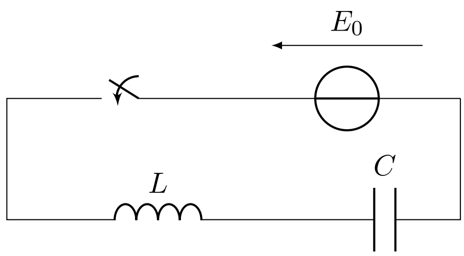
Fig. 1 – Phénomènes périodiques.

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique qui produit une oscillation idéalisée : un **signal sinusoïdal**, parfaitement stable dans le temps, appelé l'oscillateur harmonique. Les adjectifs harmonique et sinusoïdal sont synonymes.

1 Le circuit LC : inductance-bobine

1.1 Mise en équation électrique

On étudie le courant électrique dans le circuit de la figure suivante.



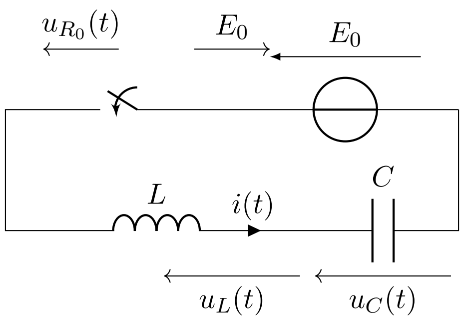
Objectif : Déterminer l'évolution de $u_C(t)$, tension aux bornes du condensateur, pour le circuit suivant, avec le condensateur initialement déchargé.

> ***Remarque :*** *Ce circuit ne comporte aucune résistance. Comme tout circuit électrique possède une résistance interne, ce circuit est purement théorique.*

▶ Mise en équation électrique

C'est un circuit électrique "classique" : on reprend la méthode de chapitre précédent.

On définit les tensions aux bornes des dipôles en convention récepteur



2) Relations des dipôles :

▷ bobine

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\ ; \tag{1.1}$$

▷ condensateur

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\ . \tag{1.2}$$

3) Equations électriques :

Ici on a une maille et pas de noeud. Donc 1 **Loi des mailles :**

$$E = u_C(t) + u_L(t)\ . \tag{1.3}$$

4-5) Obtention de l'équation électrique :

Utilisons l'équation précédente : comme on cherche u_C, on transforme u_L à l'aide de la relation de la bobine.

$$E = u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

On exprime ensuite l'intensité du courant électrique i à l'aide de la relation du condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

Attention ! Quand on utilise deux équations de dipôle, **il convient de bien faire attention à quelle tension/intensité apparaît dedans.**
Ici c'est bien la même intensité qui circule dans le condensateur et la bobine, noté i.

On obtient :

$$u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = E_0$$

La capacité C est une constante et les dérivées se composent, on obtient :

$$u_C(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = E_0$$

C'est une équation différentielle linéaire à coefficient constant d'ordre 2.

1.2 L'oscillateur Harmonique

▶ **Forme canonique**

Définition. Oscillateur Harmonique (OH)
On appelle oscillateur harmonique tout système physique produisant un signal X dépendant du temps, $X(t)$, et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \tag{1.4}$$

où ω_0 est une constante réelle positive, appelée **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique. Elle s'exprime en rad.s^{-1}.

On introduit également la **période** T_0 (en secondes) telle que $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

> *Exemple 1 :*
>
> $$u_C(t) + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = E_0$$

> *L'équation trouvée précédemment n'est pas un oscillateur harmonique : le membre de droite est non nul. Par contre son équation homogène est :*
>
> $$u_C(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{dt^2} = 0$$
>
> *Ce qui se écrit :*
>
> $$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$$
>
> *qui est bien l'équation d'un oscillateur harmonique. On trouve la pulsation en remarquant que :*
>
> $$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ soit } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

▶ Solution générale de l'OH

Propriété. Solution de l'OH
Les solutions x de l'équation d'un OH s'écrivent comme :

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

avec x_P une solution particulière (cherchée sous la forme d'une constante et x_H la solution générale de l'équation homogène

$$x_H(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

où a et b sont des constantes d'intégration.

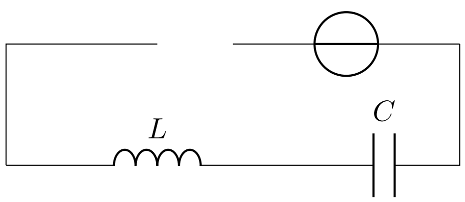
On cherche la solution u_C de l'équation différentielle : $u_C(t) + LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} = E_0$.
On va avoir besoin des **conditions initiales**. Comme il y a 2 constantes d'intégration a et b, il nous faut 2 conditions initiales : une sur la fonction en 0, l'autre sur sa dérivée en 0.

1.3 Conditions initiales :

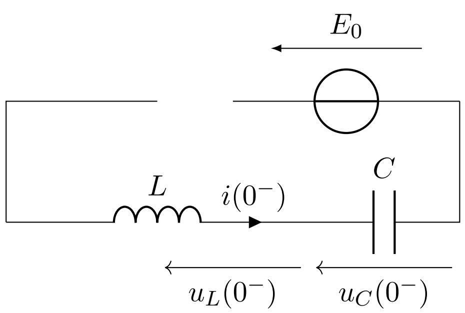
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Il est donc nécessaire de distinguer deux instants initiaux : $t = 0^-$, juste avant qu'on ferme l'interrupteur et $t = 0^+$, juste après.

▶ Continuité des grandeurs électriques

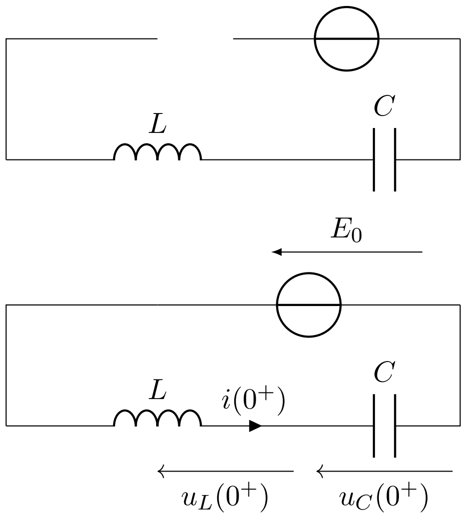
A $t = 0^-$:



- ▷ Le condensateur est initialement déchargé donc : $u_C(0^-) = 0$.
- ▷ L'interrupteur est ouvert depuis longtemps donc : $i_L(0^-) = 0$.



A $t = 0^+$:



On ne peut *a priori* rien dire sur les grandeurs électriques à $t = 0^+$, sauf :

- ▷ la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue donc :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

- ▷ l'intensité qui circule dans une bobine est une fonction continue donc :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

▶ Comment trouver les dérivés ?

On cherche par exemple la dérivée de la tension aux bornes du condensateur $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

Attention ! Ce qui va suivre est la démarche **A NE JAMAIS FAIRE**. Si vous commencez à faire le raisonnement suivant vous êtes sûr de faire fausse route.

On cherche la dérivée de u_C en 0. Comme $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ la fonction est constante, donc sa dérivée est nulle

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}t} = 0$$

fastoche ...

Propriété.
Pour trouver la valeur d'une dérivée d'un signal électrique en O^+, on utilise **toujours** les relations constitutives des dipôles.

Ici, la dérivée de la tension d'un condensateur est relié à l'intensité qui le traverse via la relation : $i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.
Cette relation est vraie à $t = 0^+$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{i_C(t = 0^+)}{C}$$

Ici $i_C(t = 0^+) = 0$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.

1.4 Retour sur le circuit LC

> *Application 1 : Exprimer* $\dfrac{du_L}{dt}(t = 0^+)$.
> *Exprimer* $\dfrac{di}{dt}(t = 0^+)$ *en fonction de* E_0 *et* L.

Forme canonique :
On l'écrit sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{E_0}{LC}$$

Décomposition de la solution

On décompose la solution en :

- ▷ UNE solution particulière $u_{C,P}$
- ▷ LA forme générale des solutions de l'équations homogène $u_{C,H}$

$$u_C(t) = u_{C,P}(t) + u_{C,H}(t)$$

Solution particulière $u_{C,P}(t)$

On la cherche sous la forme d'une fonction constante. On a donc : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_{C,P}}{\mathrm{d}t^2} = 0$

$$0 + \frac{1}{LC} u_{C,P}(t) = \frac{E_0}{LC}$$

donc : $u_{C,P}(t) = E_0$.

Forme générale des solutions de l'équation homogène $u_{C,H}(t)$

L'équation homogène de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,H}}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=\omega_0^2} u_{C,H}(t) = 0$$

C'est un oscillateur harmonique avec $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ soit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$u_{C,H}(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$$

$$u_{C,H}(t) = a \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + b \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Solution du problème et conditions initiales

La solution est donc : $u_C(t) = E_0 + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$.
Il faut trouver a et b.

$$\text{Deux inconnues} \quad \Rightarrow \quad \text{Deux conditions initiales} \quad \begin{cases} \text{une sur la fonction} \\ \text{une sur la dérivée} \end{cases}$$

On veut $u_C(t = 0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

💣💣💣 **Attention !** Trouver les deux conditions initiales est **l'une des plus difficile** ! ! Nous l'avons traité en détails plus tôt, il s'agit de bien la maîtriser.

On a trouvé précédemment que $u_C(t = 0^+) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.

♡ *Instant math* ♡ : $\dfrac{\mathrm{d}\cos \omega_0 t}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 \sin \omega_0 t$ et $\dfrac{\mathrm{d}\sin \omega_0 t}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \cos \omega_0 t$

Donc :

$$u_C(t = 0) = E_0 + a \underbrace{\cos 0}_{=1} + b \underbrace{\sin 0}_{=0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0) = -a\omega_0 \underbrace{\sin 0}_{=0} + b\omega_0 \times \underbrace{\cos 0}_{=1}$$

Comme $u_C(t = 0^+) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$, on a donc : $a = -E_0$ et $b = 0$. Finalement :

$$u_C(t) = E_0(1 - \cos \omega_0 t)$$

2 Outils mathématiques : les fonctions sinusoïdales

2.1 Généralités

Définition. Signal sinusoïdal
Un signal sinusoïdal est un signal de la forme :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

▷ω est la **pulsation** du signal (en $rad.s^{-1}$), ▷ϕ_0 sa **phase initiale** ou phase à l'origine.
▷A son **amplitude** (même unité que $s(t)$)

Attention ! A et ω sont constantes positives, ϕ_0 peut être négative. **Attention !** ϕ_0 est un angle, il s'exprime en radian!!!

Propriété. Autres formes
Un signal sinusoïdal peut aussi s'écrire sous la forme :
- $s(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) = A\sin(\omega t + \phi_0 + \pi/2$
- $s(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

♡ *Instant math* ♡ :
Le passage à la première forme à l'autre s'obtient en utilisant la formule de trigonométrie :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Application 2 : Montrer, avec les notation précédente, que
- $a = A\cos\phi_0$, $b = -A\sin\phi_0$
- $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $B = A$ et $\varphi_0 = \phi_0 + \pi/2$

*Exemple 2 : **Attention !** La tension aux bornes du condensateur n'est donc pas un signal sinusoïdal car elle s'écrit comme : $E_0 - E_0\cos(\omega_0 t)$.*
Néanmoins on qualifiera ce type de signal de signal quasi-sinusoïdal et on parlera quand même de phase et phase à l'origine.

Astuce pratique :
- La forme $A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ permet de lire directement les caractéristiques du signal sur un graphe.
- La forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ permet d'utiliser plus facilement les C.I.

Application 3 : Dans l'exemple précédent (circuit LC) :
1. *trouver la grandeur V pour que $y(t) = u_C(t) - V$ soit un signal sinusoïdal*
2. *donner l'amplitude, la phase initiale et la pulsation du signal $y(t)$*

2.2 Caractéristiques d'un signal sinusoïdal et lecture sur un graphe

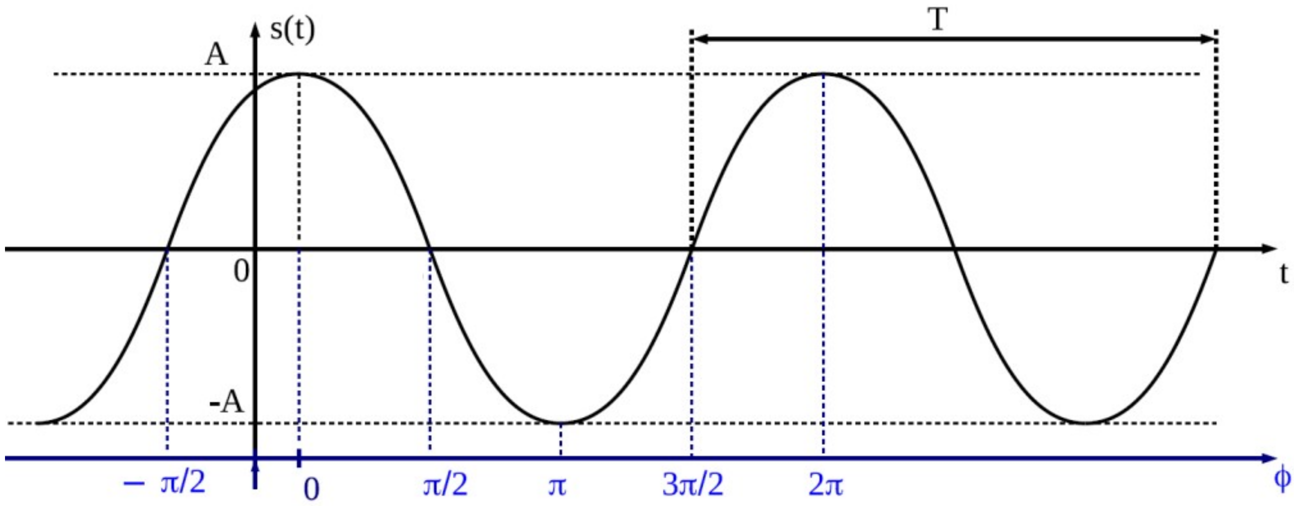
▶ Définition et lien entres les différentes grandeurs

Définition. Période et Fréquence
Un signal physique $s(t)$ est **périodique** s'il se répète dans le temps.
Sa **période** T est la plus petite durée telle que : $s(t+T) = s(t)$.
La période T se mesure en secondes (symbole s).

La **fréquence** du signal : $f = \frac{1}{T}$ est le nombre de répétitions du signal par unité de temps.
La fréquence f se mesure en hertz (symbole Hz).

Propriété. Lien fréquence-période-pulsation
Pour un signal sinusoïdal quelconque, on a les relations suivantes :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



Graphe :

Définition. Phase instantanée et phase à l'origine
Soit un signal :

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

- ϕ_0 est la phase à l'origine.
- L'argument de la fonction cosinus est appelée **phase instantanée** $\phi(t)$

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0$$

La phase à l'origine est la phase instantanée à $t = 0$: $\phi_0 = \phi(t = 0)$

Oscillation du signal :
Le signal oscille entre $-A$ et A, A étant l'**amplitude** du signal sinusoïdal.
- $A \to \varphi = \omega t_{\max} + \phi_0 = 2n\pi$
- $-A \to \varphi == \omega t_{\min} + \phi_0 = (2n+1)\pi$.

Un signal quasi-sinusoïdal $s(t) = C + A\cos\omega_0 t + \phi_0$ oscille de part et d'autre de C, entre $C + A$ et $C - A$.

> ***Exemple 3*** *: On donne le signal $s(t) = S_0\cos(\omega t + \phi_0)$. Donner l'instant du premier maximum.*
>
> $$s(t_{max}) = +A \quad donc \quad \cos(\omega_0 t_{max} + \phi_0) = 1$$
>
> *Comme $\cos 2n\pi = 1$ avec n un entier, alors : $\omega_0 t_{max} + \phi_0 = n\pi$.*
> *On choisit la solution la plus simple phase, $n = 0$, et donc : $t_{max} = -\phi_0\omega_0$. Cela donne le maximum le plus proche de l'origine des temps mais potentiellement dans les temps négatifs.*

> ***Application 4*** *: On donne le signal $s(t) = S_0\cos(\omega t + \phi_0)$. Donner l'instant du premier minimum.*

▶ Mesure de l'amplitude et de la phase à l'origine

Sur un graphe d'un signal sinusoïdale, il faut savoir extraire (dans l'ordre) :
1. l'amplitude
2. la période
3. la fréquence et pulsation
4. la phase à l'origine

Avant d'analyser un graphe, on prend bien le temps de se familiariser avec les deux DEUX 2 échelles : celles des abscisses et celles des ordonnées.

1. Amplitude : on mesure l'écart entre un maximum et un minimum et on divise par deux

2. Période : on mesure l'écart en temps entre deux maxima successifs

3. Fréquence et pulsation : elle se déduit par $f = 1/T$ et $\omega = 2\pi f$.

4. **Phase à l'origine :** Graphiquement, la phase à l'origine ϕ_0 mesure le décalage temporel de la courbe. Elle se mesure à l'aide du maximum du signal.

   Propriété. Maximum du signal
   Le maximum le plus proche de l'origine est atteint à l'instant $t_{\max}$:
   $$t_{\max} = \frac{-\phi_0}{2\pi}T$$

   $\phi_0 = -2\pi\frac{t_{\max}}{T}$. On mesure $t_{\max}$ et on en déduit ϕ_0.

2.3 Notion de déphasage – Retard ou avance de phase

On s'intéresse le plus souvent non pas à la phase à l'origine d'un signal mais à l'écart de phase entre deux signaux : le déphasage.

▶ Définitions

On considère deux signaux sinusoïdaux :

$s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$.

Définition. Déphasage
On appelle déphasage instantané du signal $s_2(t)$ par rapport au signal $s_1(t)$ la différence entre leurs phases instantanées, soit :
$$\Delta\phi(t) = (\omega_2 t + \phi_2) - (\omega_1 t + \phi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + \phi_2 - \phi_1$$

Attention ! ϕ_0 est un angle, il s'exprime en radian!!!

Cas où $\omega_1 = \omega_2$:
Avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, $\omega_1 = \omega_2$, leur déphasage est
$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

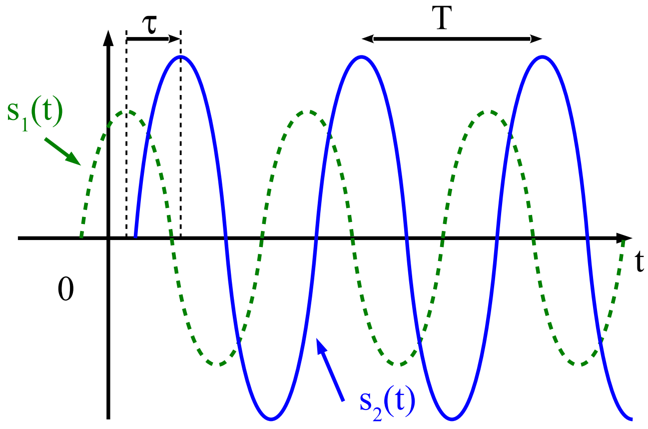
Propriété.
Deux signaux de même fréquence (ou de même pulsation) ont un déphasage constant égal à la différence des phases à l'origine.

Expression de s_2 à l'aide du déphasage :
On note $\omega_1 = \omega_2 = \omega$
$$s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) = A_2 \cos(\omega t + \phi_1 + \Delta\phi)$$

▶ Représentation temporelle et déphasage

$$\text{Déphasage} \iff \text{Décalage temporel}$$

Définition. Décalage temporel
Le décalage temporel τ entre deux signaux s_1 et s_2 est égal à l'écart temporelle entre un maximum de s_1 et un maximum de s_2 successifs.



Les signaux n'atteignent pas leur maxima en même temps : un signal est en avance (ou en retard) par rapport à l'autre.

Discuter un déphasage

- 1) Mesurer les deux phases à l'origine phi_1 et ϕ_2 et en déduire le déphasage en valeur absolu $|\Delta phi|$
- 1) Bis Mesurer l'écart temporelle τ

- 2) Trouver lequel des deux signaux est en avance ou en retard. Le signal en retard atteint son premier maximum après le signal en avance.
  Attention ! Le signal en retard à l'air "devant" sur une représentation graphique.

- 3) Conclure : Le signal s_2 est en retard par rapport à s_1 de *tatata* secondes ou *tatata* radian.

Cas particuliers

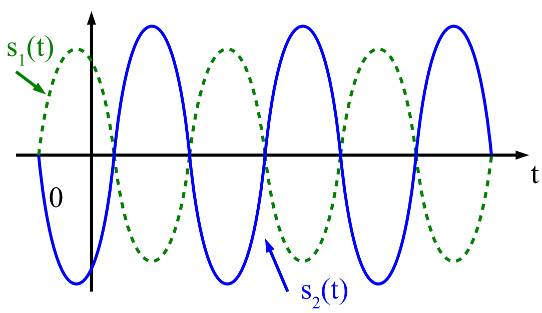
Il convient de bien connaître les 3 cas particuliers suivants :

Définition. Déphasages particuliers

- **Signaux en phase** :
  les valeurs maximales et minimales sont atteintes en même temps, les deux signaux se superposent.
  $\Delta\phi = 2n\pi$ typiquement $\Delta\phi = 0$ ou 2π
- **Signaux en opposition de phase :**

  L'un est maximal quand l'autre est minimal. Les signaux s'annulent en même temps.
  $\Delta\phi = (2n+1)\pi$, généralement :

$$\Delta\phi = \pi \text{ ou } -\pi$$

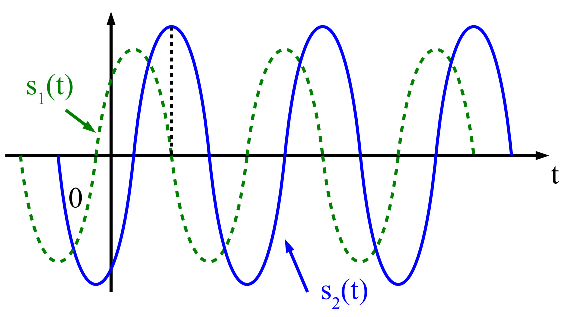


- **Signaux en quadrature :**

  L'un est maximal quand l'autre est nul. Les signaux ne s'annulent jamais en même temps.

  $\Delta\phi = \left(\frac{\pi}{2} + n\right)\pi$ généralement :

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$$

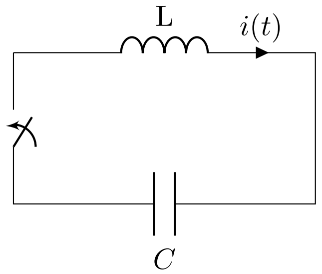


3 Approche énergétique

Comme vu en introduction, on peut dénombrer un nombre gigantesque de systèmes oscillant. Un système oscillant produit un signal périodique, *i.e.* qui se répète dans le temps, dont le plus simple est le signal sinusoïdal. Un système physique produisant un signal sinusoïdal est appelé "oscillateur harmonique" et il est caractérisé par son équation différentielle.
Une équation différentielle est la "traduction mathématiques" de la façon dont évolue le système. Régulièrement en physique, une façon commode de décrire l'évolution d'un système est un terme d'échange d'énergie.

3.1 Un peu de pratique ...

Partons du circuit électrique suivant. Initialement l'interrupteur est ouvert et le condensateur est chargé à la tension V_1.



A $t = 0$ on ferme l'interrupteur et le système évolue librement. On cherche l'équation différentielle du courant électrique $i(t)$.

- ▷ Loi des mailles $0 = u_C(t) + u_L(t)$
- ▷ Condensateur : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
- ▷ Bobine : $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

On a alors :

$$0 = u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Problème : la relation du condensateur fait le lien entre i et la dérivée de la tension u_C. On voudrait remplacer $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ par $\dfrac{i(t)}{C}$. Mais on a que $u_C(t)$ dans l'équation ...

♡ *Instant math* ♡ *:*
On a le droit de dériver une équation différentielle ! !

On dérive la loi des mailles :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Soit :

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

> ***Application 5 :***
> 1. *Exprimer* $i(t = 0^+)$ *et* $\dfrac{di}{dt}(t = 0^+)$.
> 2. *Montrer que l'intensité électrique* $i(t)$ *circulant dans la maille est un signal sinusoïdale :*
>
> $$i(t) = V_1\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

3.2 Echanges d'énergie

▶ Bilan de puissance

Pour obtenir un bilan de puissance on part de la loi des mailles

$$0 = u_C(t) + u_L(t)$$

et on multiplie par l'intensité $i(t)$ qui la traverse :

$$0 = u_C(t)i(t) + u_L(t)i(t)$$

En utilisant les deux relations constitutives des dipôles (bobine et condensateur) on obtient

$$0 = u_C(t)C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}i(t)$$

ce qui se réécrit en :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2(t)\right]$$

On reconnaît l'énergie du condensateur $\mathcal{E}_C$ et celle de la bobine $\mathcal{E}_L$. Finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

▶ Bilan d'énergie

En intégrant un bilan de puissance on obtient un bilan d'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L\right] = 0 \text{ soit } \ \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \text{Constante}$$

Analyse avec deux réservoirs d'énergie

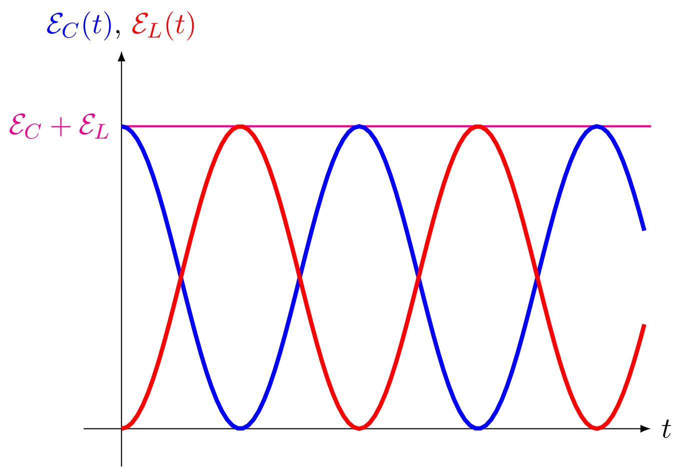
- ▷ l'énergie totale du système se distribue entre l'énergie magnétique de la bobine $\mathcal{E}_L$ et électrostatique du condensateur $\mathcal{E}_C$.
  Ces deux systèmes s'échanges au cours du temps de l'énergie.

- ▷ **L'énergie du système est constante** :
  La somme de ces deux énergie représente l'énergie totale du système qui est une constante. L'énergie totale se conserve : il n'y a pas de pertes.

> *Exemple 4 :* ***Évaluer l'énergie du système***
> *Pour évaluer l'énergie total, on utilise l'instant initial :*
>
> $$\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \mathcal{E}_C(t=0) + \mathcal{E}_L(t=0)$$
>
> $$\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}u_C(t=0^+) + \frac{1}{2}Li(t=0^+)$$
>
> *Comme $i(t=0^+) = 0$ alors :*
>
> $$\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}CV_1^2$$
>
> *L'énergie du système tout au long de son évolution est égale à l'énergie qu'il possédait au début : ici c'est l'énergie qui était stocké dans le condensateur initialement chargé.*

Evolution temporelle :

- au début la tension du condensateur u_C est maximale et il n'y a pas d'intensité $i(t)$: $\mathcal{E}_C$ est maximale et $\mathcal{E}_L$ est nulle
- puis la tension u_C diminue et l'intensité $i(t)$ augmente : $\mathcal{E}_C$ décroit et $\mathcal{E}_L$ croit
- finalement la tension u_C est nulle et l'intensité est maximale : $\mathcal{E}_C$ est minimale et $\mathcal{E}_L$ est maximale.
- ainsi de suite



Propriété. Energies d'un circuit LC
Quand une des deux énergie est minimale, l'autre est maximale.

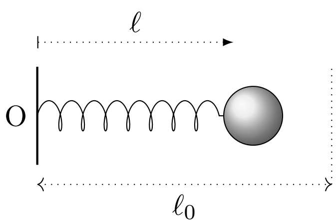
3.3 Généralisation à d'autres systèmes oscillants

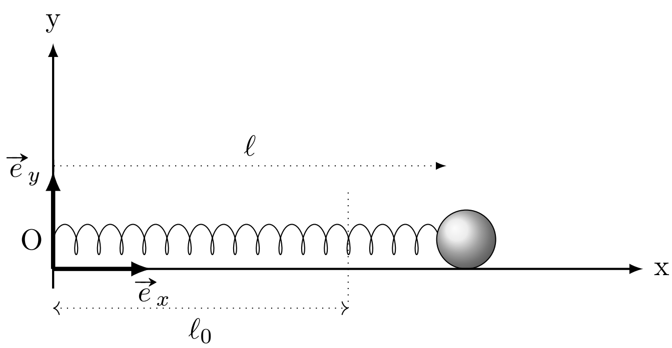
Dans le système décrit précédemment, le système physique qu'est le circuit électrique possède deux moyens de stocker de l'énergie ; le condensateur et la bobine. Les oscillations peuvent être alors vues comme les échanges d'énergies entre ces deux "réservoirs d'énergies".
On généralise la notion à tous systèmes oscillants

Propriété. Un système oscillant est caractéristique d'un échange d'énergie sans pertes entre deux "réservoirs énergétiques".

Exemple : une masse attachée au bout d'un ressort.

Le système {masse+ressort} peut stocker de l'énergie sous deux formes :
▷ dans le ressort, en l'étirant ou le comprimant : c'est l'énergie élastique.





Le ressort est plus comprimé que sa position "normale" : on a dépenser de l'énergie pour réussir à le comprimer.

Le ressort est plus étiré que sa position "normale" : tout comme avant, on a dépenser de l'énergie pour l'étirer.

▷ dans la masse en la mettant en mouvement : c'est l'énergie cinétique.

Lorsque ma masse s'arrête et fait demi-tour, le ressort est étiré à son maximum : E_c est minimale et E_p est maximale. On peut alors en déduire que l'énergie cinétique de la masse est maximale lorsque l'énergie élastique est minimale : la vitesse possède sa vitesse maximale lorsque le ressort n'est pas étiré.

▶ A faire à la maison

Application 6 : On attache une bille de masse m au bout d'un ressort. Lorsqu'on étire le système et qu'on le laisse évoluer librement, on remarque que le ressort oscille de façon périodique.

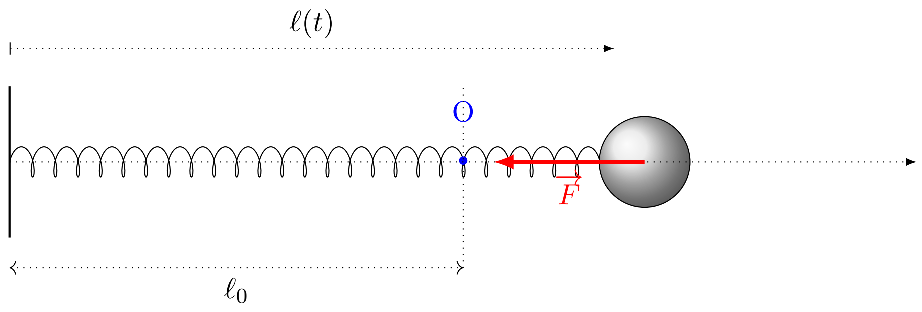


Fig. 2 – Schéma du problème du système masse-ressort horizontal.

On peut montrer que la longueur $l(t)$ du ressort est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2l}{dt^2} = -\frac{k}{m}(l(t) - l_0)$$

avec $m =$ la masse de la bille, k la raideur du ressort et l_0 sa longueur lorsqu'il n'est pas étiré.
On donne : $m = 0.3 = kg$, $l_0 = 30cm$ et $k = 0.3SI$ (unité du système international).

▷ ***A)** Analyse dimensionnelle*

1. *A l'aide de l'équation différentielle donnée précédemment, donner la dimension du coefficient k*
2. *Par analyse dimensionnelle, donner une forme possible pour la force F qu'exerce un ressort de raideur k lorsqu'il est étiré d'une longueur $l(t)$.*

▷ ***B)** Oscillateur harmonique*

A $t = 0$, le ressort est étiré d'une longueur $l_1 = 0.7m$ et la bille n'a pas de vitesse initiale $\frac{dl}{dt}(t = 0) = 0$.

1. *A l'aide de l'équation différentielle, donner la pulsation propre du système.*
   En déduire la période d'oscillation de la masse. Faire l'application numérique.
2. *Donner l'expression de la longueur $l(t)$ au cours du temps.*
3. *Donner l'amplitude l_{max} des oscillations du ressort.*
4. *Donner la vitesse maximale v_{max} de la bille.*
   On admet que la vitesse $v(t)$ de la bille est donnée par $v(t) = \frac{dl}{dt}$.
5. *(*) Vérifier que lorsque $v(t_{max}) = v_{max}$ alors $l(t_{max}) = l_0$.*
   Astuce : on pourra d'abord chercher l'instant t_{max} où la vitesse est maximale.

▷ ***C)** Aspect énergétique*

Les deux énergies mises en jeux dans ce système sont :
i) l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2(t)$
ii) l'énergie élastique $E_p = \frac{1}{2}k\left(l(t) - l_0\right)^2$.

1. *Donner l'expression de $E_c(t)$ et $E_p(t)$ en fonction du temps t, de k, m, l_1 et l_0.*
2. *(*) Vérifier que $E_c + E_p$ est constante.*
   On appelle cette grandeur l'énergie mécanique.