Chap VII

Oscillateurs amortis et régimes transitoires

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ **Oscillateur amorti**
  - forme canonique
  - facteur de qualité Q, coefficient d'amortissement ξ
  - pulsation propre ω_0

- ♡ **Régime pseudo-périodique** $Q > 1/2$
  - Type de régime et conditions d'obtentions
  - Forme générale de la solution
  - Forme de la courbe, enveloppe exponentielle
  - régime transitoire : durée en fonction de Q, nombre d'oscillations, période des oscillations

- ♡ **Régime apériodique** $Q < 1/2$
  - Type de régime et conditions d'obtentions
  - Forme générale de la solution
  - Forme de la courbe
  - régime transitoire : durée en fonction de Q

- ♡ **Régime apériodique** $Q = 1/2$
  - Conditions d'obtentions
  - Forme générale de la solution
  - Forme de la courbe
  - Durée du régime transitoire : plus petit possible

Savoir Faire

Identifier ω_0 et Q à partir de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti

Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur amorti :
- *identifier le régime suivant la valeur de Q*
- *trouver la forme de la solution*
- *utiliser les CI pour trouver les constantes d'intégration*

A l'aide d'un graphe estimer
- *le facteur de qualité*
- *le temps caractéristique de décroissance et la durée du régime transitoire*

Trouver la valeur des paramètres pour être en régime critique et avoir le régime transitoire le plus cours

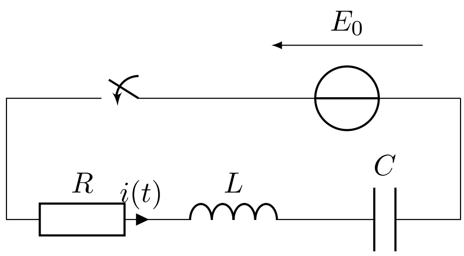
L'oscillateur harmonique, dont les oscillations ne s'arrêtent jamais. est un modèle, purement théorique, qui permet de modéliser en première approximation la réalité. Un OH se composent schématiquement de deux éléments qui échange de l'énergie indéfiniment.
Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de dissipation d'énergie qui stoppe les oscillations des système. Ce sera également l'occasion d'approfondir notre connaissance des régimes transitoires.

Les éléments de ce chapitre permettent par exemple de discuter les amortisseurs automobiles, qui ne peuvent être modélisés par se simples ressort sinon ils oscilleraient indéfiniment et n'amortiraient rien.
Dans un premier temps nous allons nous intéresser à un système électrocinétique : le circuit RLC série.

1 Le circuit RLC série

Comme discuté dans le chapitre précédent, un circuit LC n'existe pas : dans un circuit électrique, il y a toujours un effet joule, le circuit chauffe. On représente ce phénomène par l'ajout d'une résistance R. Nous étudions maintenant le courant dans le circuit électrique de la figure suivante.

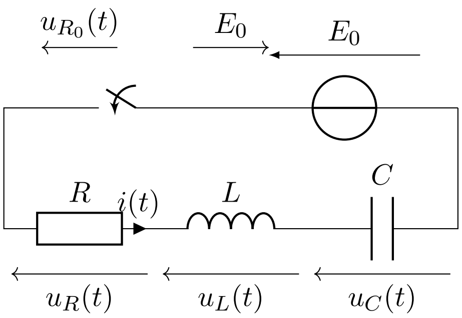
Objectif : Déterminer l'évolution de $u_C(t)$, tension aux bornes du condensateur, pour le circuit suivant, avec le condensateur initialement déchargé.



1.1 Mise en équation électrique

Reprenons pas à pas la méthode vue dans le chapitre précédent de mise en équation d'un circuit électrique.

▷ **1) Définition des grandeurs électriques :**
On définit les tensions aux bornes des dipôles en convention récepteur



▷ **2) Relations des dipôles :**

▷ loi d'Ohm

$$u_R(t) = Ri(t) \; ; \tag{1.1}$$

▷ bobine

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \; ; \tag{1.2}$$

▷ condensateur

$$q(t) = Cu_C(t) \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \; . \tag{1.3}$$

- **3) Equations électriques :**
  Ici on a une maille et pas de noeud. Donc **Loi des mailles :**

$$E = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)\ . \tag{1.4}$$

- **4-5) Obtention de l'équation électrique :**
  Utilisons (1.1) et (1.2) pour remplacer les tensions dans (1.4). Il vient

$$E = Ri(t) + u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\ .$$

  On obtient donc l'équation du second ordre sur la tension au borne du condensateur :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2}\ .$$

On met ensuite l'équation sous forme canonique en divisant par LC pour avoir un coefficient 1 devant la dérivée d'ordre supérieure :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{E}{LC}\ .$$

Cette relation est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. Mais contrairement à l'OH, le terme en dérivé première intervient.

> ***Remarque :*** *Si on prend $R = 0$, on retrouve bien l'oscillateur harmonique.*

1.2 Forme canonique, pulsation propre et facteur de qualité

Définition. Oscillateur amorti
Un oscillateur amorti est un système physique décrit par la fonction $x(t)$ vérifiant l'équation différentielle linéaire à coefficient constants du second ordre suivante

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{\mathrm{eq}}} \tag{1.5}$$

avec
- ω_0 la **pulsation propre** du système,
- x_{eq} la valeur à l'équilibre de la fonction x
- Q le **facteur de qualité du système**, qui est un nombre sans dimension.

Comment trouver les coefficients ω_0 et Q ?
On procède par identification entre l'équation (1.5) connue par cœur et l'équation physique obtenue en commençant par ω_0.

- Pulsation propre ω_0
  Par identification du coefficient devant la fonction, on trouve dans notre problème

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

- Facteur de qualité Q
  Par identification du coefficient devant la dérivée première, on trouve dans notre problème

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}\ .$$

L'expression du facteur de qualité n'est pas à connaître par cœur par contre il faut savoir la retrouver rapidement à partir de la forme canonique de l'équation.

Interprétation physique.

▷ **Pulsation propre ω_0**
C'est la pulsation typique des oscillations. On définit grâce alors :
1. la fréquence propre des oscillations :$\omega_0 = 2\pi f_0$
2. la période propre des oscillations :
$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Attention ! Comme on le verra par la suite, ω_0, f_0, T_0 donnent des **ordres de grandeurs**. La véritable fréquence des oscillations ne sera âs f_0.

Vocabulaire : une grandeur "propre" désigne une grandeur caractéristique d'un système

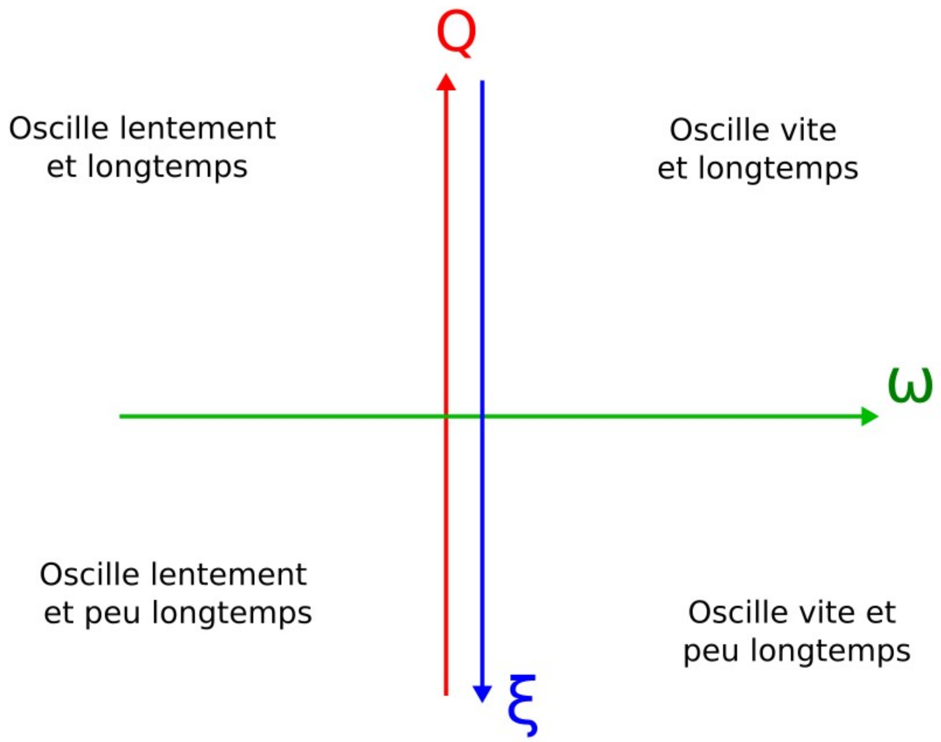
période propre des oscillations $\iff$ période caractéristique des oscillations du système étudié

▷ **Facteur de qualité Q**
Il représente la "qualité" de l'oscillateur, *i.e.* le nombre de fois que le système va osciller. Plus Q est grand, plus il y aura d'oscillations avant que le système ne s'arrête.

Définition. Facteur d'amortissement
On définit le facteur d'amortissement ξ comme :
$$\xi = \frac{1}{2Q}.$$
Plus l'amortissement est grand, moins le système oscillera longtemps.

| *Application 1 : Vérifier que le facteur de qualité est bien sans dimension.*

Résumer en un schéma :



Propriété.
▷ équation du premier ordre ⇒ une condition initiale, $f(t = 0)$
▷ équation du second ordre ⇒ deux conditions initiales, $f(t = 0)$ et $f'(t = 0)$

Ici, l'équation différentielle obtenue est d'ordre 2 : il faut deux conditions initiales, $u_C(0^+)$ et $u'_C(0^+)$.

Exemple 1 : *Recherche des conditions initiales*

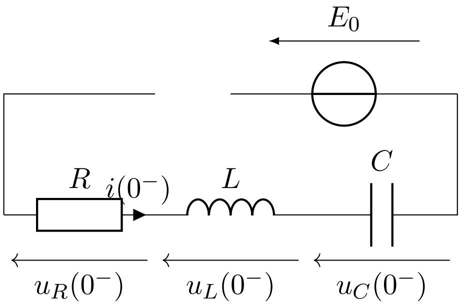
1. *Représenter le circuit électrique aux instants initiaux* $t = 0^-$ *et* $t = 0^+$.
2. *A l'aide des propriétés de continuités des grandeurs électriques, donner la valeur de deux grandeurs électriques à* $t = 0^+$.
   En déduire $\dfrac{du_C}{dt}(0^+)$
3. *Exprimer* $u_R(0^+)$, $u_L(0^+)$, $i'(0^+)$ *et* $u'_L(0^+)$.

1) Etude du circuit à l'instant initial

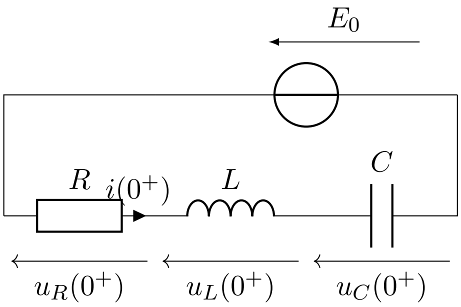
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Il est donc nécessaire de distinguer deux instants initiaux : $t = 0^-$, juste avant qu'on ferme l'interrupteur et $t = 0^+$, juste après.

A $t = 0^-$, on a le circuit électrique suivant :

- Le condensateur est initialement déchargé donc : $u_C(0^-) = 0$.
- L'interrupteur est ouvert depuis longtemps donc : $i_L(0^-) = 0$.



A $t = 0^+$, on a le circuit électrique suivant :



On ne peut *a priori* rien dire sur les grandeurs électriques à $t = 0^+$, sauf :

- la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue donc :
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$
- l'intensité qui circule dans une bobine est une fonction continue donc :
$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

2)Condition initiale de l'équation différentielle On veut $u_C(t = 0)$ et $u'_C(t = 0)$.

D'après la loi du condensateur $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Cette relation est vraie à tout instant, notamment à $t = 0^+$. On a donc :
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$$

Autres grandeurs électriques

▷ Comme $i(0^+) = 0$ alors $u_R(0^+) = 0$
▷ Loi des mailles : $u_L(0^+) = E_0$
▷ Relation de la bobine : $i'(t) = u_L(t)/L$ donc $i'(0^+) = u_L(0^+)/L = E_0/L$
▷ Loi des mailles : $u_L(t) = E_0 - u_R(t) - u_C(t)$ donc
$$u'_L(t) = 0 - u'_R(t) - u'_C(t) = -Ri'(t) - i(t)/C$$
donc $u'_L(0^+) = -\dfrac{RE_0}{L} - 0$.

2 Différentes solutions de l'oscillateur harmonique

. Les résultats de ce paragraphe, bien que nous les étudions dans le cas d'un circuit électrique, sont des résultats généraux, applicables à tout système dont l'évolution est régie par ce type d'équation.

Notation des dérivées : On introduit une nouvelle notation pur les dérivées temporelles qui seront marquées d'un point :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \iff \dot{u}_C(t) \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{u}_C(t)$$

2.1 Décomposition de la solution

Équation différentielle linéaire : la solution est la somme

- ▷ une solution particulière de l'équation $u_{C,\mathrm{p}}(t)$
- ▷ une solution générale de l'équation homogène $u_{C,\mathrm{h}}(t)$

Solution particulière $u_P(t)$ On cherche ici la solution particulière sous la forme d'une constante. Dans ce cas là, les dérivées de $u_{C,\mathrm{p}}(t)$ s'annule. On obtient facilement que : $u_{C,\mathrm{p}}(t) = E_0$.

Forme générale des solutions de l'équation homogène
On cherche $u_{C,H}$, forme générale des solution de l'équation homogène :

$$\ddot{u}_{C,H}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_{C,H}(t) + \omega_0^2 u_{C,H}(t) = 0\ .$$

Problème : on a pu voir expérimentalement que le signal possédait deux régimes bien particuliers : un oscillant, l'autre non. Trouver la solution homogène risque d'être plus compliqué ...

2.2 Le polynôme caractéristique

On calcule le **polynôme caractéristique** de l'équation homogène en remplaçant chaque dérivée de la fonction $u_{C,H}$ par une variable r à la puissance n, où n est l'ordre de dérivation. On a :

$$\begin{cases} u_{C,H}(t) \Rightarrow r^0 = 1 \\ \dot{u}_{C,H}(t) \Rightarrow r \\ \ddot{u}_{C,H}(t) \Rightarrow r^2 \end{cases}$$

Propriété. Polynôme caractéristique d'un oscillateur amorti
L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$\ddot{u}_C(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

est l'équation du second degré, d'inconnue r :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0\ .$$

Discrimant Δ et signe
Selon le signe de ce discriminant, les racines de ce polynôme sont réelles ou complexes.

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)\ .$$

Signe de Δ :

$$\Delta < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{Q^2} < 4 \Rightarrow Q^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$$

- ▷ $\Delta < 0 : Q > 1/2$
- ▷ $\Delta = 0 : Q = 1/2$
- ▷ $\Delta > 0 : Q < 1/2$

2.3 Le régime pseudo-périodique Q>1/2

Sens physique :
Le facteur de qualité est grand, on s'attend à avoir des oscillations. Ce cas s'obtient pour un facteur d'amortissement $\xi < 1$: le système est faiblement amorti.

▶ Solution du polynôme

Dans ce cas, selon l'équation **??**, on a $\Delta < 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont alors sous la forme

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\,\underbrace{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}}_{\omega}\ .$$

▶ Solution de l'équation homogène

$$u_{C,\mathrm{h}}(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos\omega t + B\sin\omega t]$$

avec A et B des constantes inconnues, et $\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \frac{\omega_0}{2}\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}$. *Astuce :* partie réelle dans l'exponentielle, partie imaginaire dans le cos/sin

▶ Solution générale de l'équation

La somme de la solution particulière $u_{C,\mathrm{p}}$ et de la solution homogène $u_{C,\mathrm{h}}$. Il vient la **solution de l'équation différentielle**

$$u_C(t) = u_{C,\mathrm{h}}(t) + u_{C,\mathrm{p}}(t)$$
$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos\omega t + B\sin\omega t] + E_0$$

avec A et B deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

▶ Condition initiales

On donne les condition initiales suivantes :

$$u_C(t=0) = 0 \ \text{ et } \ u'_C(t=0^+) = 0$$

Trouver les deux constantes d'intégration A et B.

Attention ! Bien maîtriser les calculs avec la dérivée : ce n'est pas évident mais ce sera tout le temps le même calcul ! On s'entraîne !!

On a :

$$u_C(t=0) = u_P + 1 \times (a \times 1 + b \times 0) = u_P + a$$

Pour la dérivée :

$$u'_C(t) = 0 + \frac{-\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t)$$

On évalue en zéro :

$$u'_C(t) = \frac{-\omega_0}{2Q}(a+0) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(0 + b\omega) = -\frac{\omega_0}{2Q}a + b\omega$$

Avec nos deux conditions initiales on trouve : $a = -E_0$ et $b = -\frac{\omega_0}{2Q\omega}E_0$.

Application 2 : *Même questions mais avec :*
- ▷ $u_C(t=0) = V_0$ *et* $u'_C(t=0) = 0$
- ▷ $u_C(t=0) = 0$ *et* $u'_C(t=0) = V_0/(RC)$
- ▷ $u_C(t=0) = V_0$ *et* $u'_C(t=0) = V_0/(RC)$

REGIME PSEUDO-PERIODIQUE

Type de régime :
Le régime pseudo périodique correspond à un régime oscillant et faiblement amorti.

Condition d'obtention :
Le régime pseudo-périodique s'observe pour un grand facteur de qualité

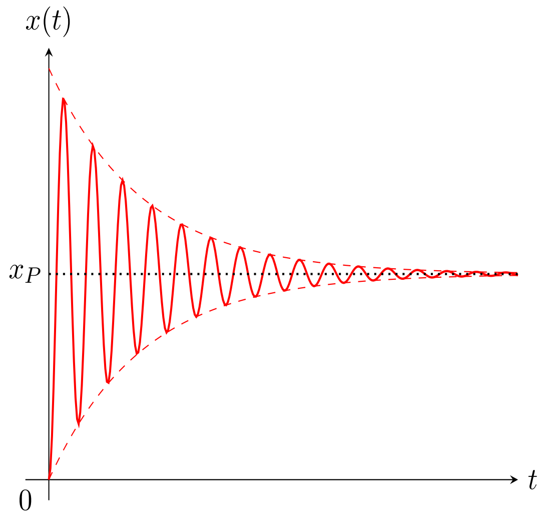
$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

ou un petit coefficient d'amortissement $\xi < 1$

Définition. Solution de l'équation différentielle
Dans ce cas, le régime transitoire est un régime oscillant à une pulsation différente de ω_0 dont l'amplitude décroît exponentiellement.
La solution $x(t)$ s'écrit comme :

$$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{enveloppe}} \times \underbrace{[A\cos\omega t + B\sin\omega t]}_{\text{Oscillateur Harmonique}} + \underbrace{x_P}_{\text{solution particulière}}$$

avec $\dfrac{\omega_0}{2}\left(4 - \dfrac{1}{Q^2}\right)^{1/2}$



Attention ! La pulsation ω des oscillations n'est pas égale à ω_0 ! ! En effet : $\omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - Q^{-2}} \neq \omega_0$
Elle dépend de Q.

Régime transitoire : des oscillations

- Durée : plus Q est grand, plus la durée régime transitoire $\mathcal{T}$ est longue

$$\mathcal{T} \sim \frac{Q}{\omega_0}$$

- Nombre d'oscillations : plus Q est grand, plus le nombre N d'oscillations est grand

$$\boxed{N \simeq 1.5Q}$$

- Période T des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ si Q est grand}$$

2.4 Le régime apériodique (ou sur-amorti) $Q < 1/2$

Sens physique :
Le facteur de qualité est faible, on s'attend à avoir peu voir pas oscillations. Ce cas s'obtient pour un facteur d'amortissement $\xi > 1$: le système est fortement amorti.

▶ Solution du polynôme

Dans ce cas, on a $\Delta > 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont alors réelles

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)$$

Attention ! $r_{1,2} < 0$ car $\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} < \frac{1}{Q}$.

▶ Solution de l'équation homogène

La **solution de l'équation homogène** s'exprime alors par

$$u_{C,\mathrm{h}}(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$$

avec A et B des constantes inconnues, et r_1 et r_2 les deux racines exprimées précédemment.

▶ Solution générale de l'équation

La solution générale de l'équation est sa somme de la solution particulière $u_{C,\mathrm{p}}$ et de la solution homogène $u_{C,\mathrm{h}}$.

$$u_C(t) = u_{C,\mathrm{h}}(t) + u_{C,\mathrm{p}}(t)$$

$$u_C(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) + E_0$$

avec A et B deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

REGIME APERIODIQUE

Type de régime :
Le régime pseudo périodique correspond à un régime sans oscillation et fortement amorti.

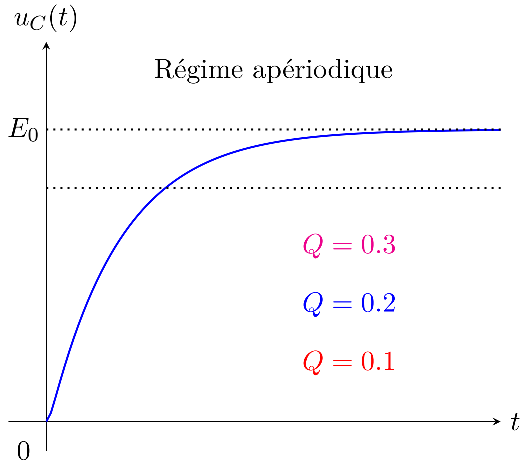
Condition d'obtention :
Le régime pseudo-périodique s'observe pour un petit facteur de qualité

$$\boxed{Q < \frac{1}{2}}$$

ou un grand coefficient d'amortissement $\xi > 1$

Définition. Solution de l'équation différentielle
Il n'y a pas d'oscillation, la solution est la somme de deux exponentielles.

$$u_C(t) = \underbrace{A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)}_{\text{exponentielles décroissantes}} + \underbrace{E_0}_{\text{solution particulière}}$$



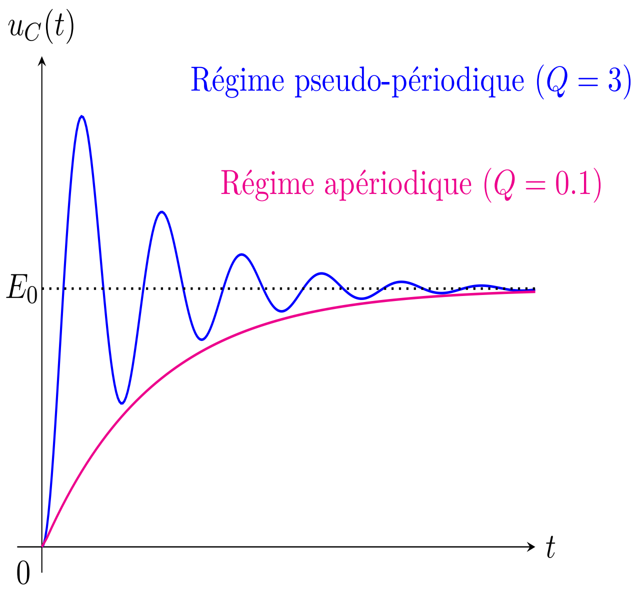
Régime transitoire : pas d'oscillations

▷ Durée : plus Q est petit, plus la durée régime transitoire $\mathcal{T}$ est longue

$$\mathcal{T} \sim \frac{1}{\omega_0 Q}$$

3 Classification des régimes transitoires et régime critique

3.1 Notion de régime transitoire



Les deux solutions décrites précédemment on un point commun : bien que différentes, elles tendent toutes deux aux temps longs vers la solution particulière.
Au bout d'un certain temps, quelle que soit le régime la tension est la même : elle est égale à E_0, la tension du générateur.

Définition. Régime transitoire
Le régime transitoire est la durée pendant laquelle le signal tend vers sa valeur finale.
On le caractérise par sa durée, notée $\mathcal{T}$

La connaissance de $\mathcal{T}$ est souvent cruciale :

▷ on veut observer le régime transitoire : par exemple, on veut observer des oscillations pour faire des mesures sur le système. Il faut observer ce qui se passe avant, soit pour $t < \mathcal{T}$.
On cherche alors à avoir dans ce cas là $\mathcal{T}$ le plus grand possible

▷ le régime transitoire est souvent à éviter.
On veut que le système tendent le plus rapidement possible vers sa valeur finale : on cherche alors à minimiser ce régime transitoire, et donc à minimiser $\mathcal{T}$.

3.2 Régime pseudo-périodique

▶ Durée du régime transitoire

C'est l'amplitude de l'enveloppe qui détermine le régime transitoire. Lorsque l'enveloppe devient très petite, les oscillations sont très faibles : le régime transitoire est terminé.
L'enveloppe est de la forme :

$$\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$.
Dans ce cas la fonction est quasi nulle pour $t > 5\tau$ soit :

$$t > \mathcal{T} = \frac{10Q}{\omega_0}$$

Propriété.
La durée $\mathcal{T}$ du régime transitoire en régime pseudo-périodique est d'autant plus long que Q est grand.

$$\mathcal{T} \sim \frac{Q}{\omega_0}$$

▶ Nombre N de pseudo-oscillations

Combien d'oscillations va-t-on observé ?

$$N = \frac{\text{durée du régime transitoire}}{\text{durée d'une oscillation}} = \frac{5\tau}{T}$$

avec T la période d'une oscillation. Cette dernière est donnée par la partie OH

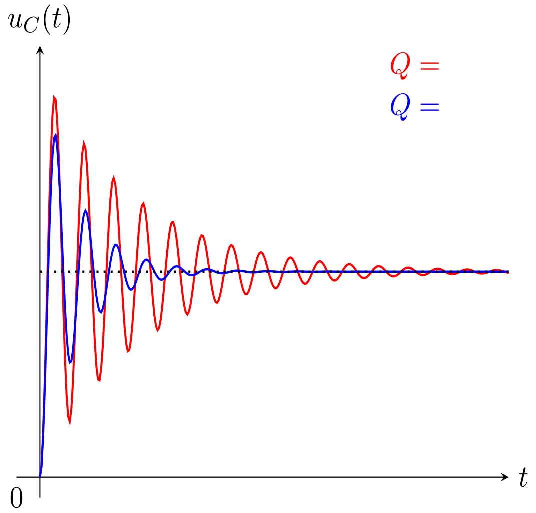
$$A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, il vient

$$N = \underbrace{\frac{10}{4\pi}\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}}_{=\simeq 1.5} Q\ .$$

Propriété.

On retiendra que le nombre N de pseudo-oscillations observables est donné par $\boxed{N \approx 1.5\,Q}$.



3.3 Régime apériodique

La durée d'un régime transitoire d'un régime exponentiel est liée à la constante de temps dans l'exponentielle. Ici :

$$A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + B\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$$

avec $\tau_i = 1/|r_i|$

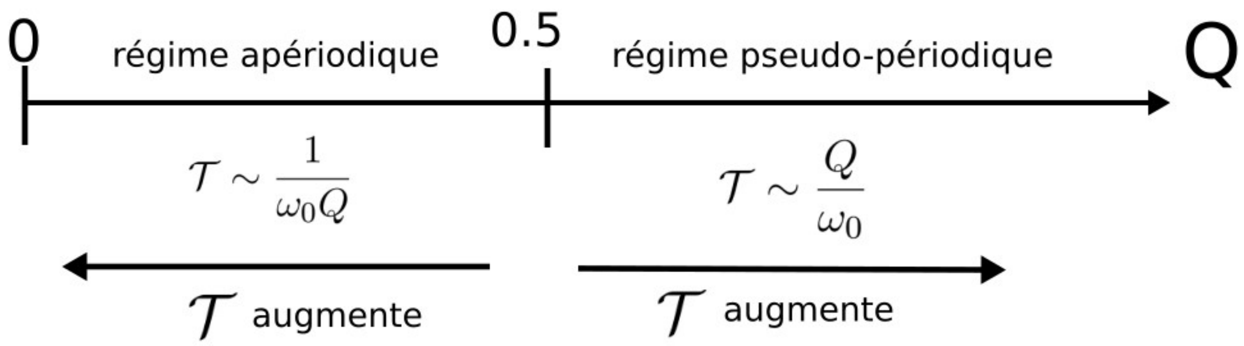
Attention ! $r_i < 0$ et $\tau > 0$.

Il y a deux exponentielles donc deux constantes de temps $1/|r_1|$ et $1/|r_2|$.
La durée du régime transitoire sera imposée par le temps le plus long. Comme $|r_1| > |r_2|$, le temps caractéristique le plus long est $1/|r_2|$ et le durée du régime transitoire est donnée par $5/|r_2|$.
On admettra l'ordre de grandeur de la durée $\mathcal{T}$.

Propriété.
La durée $\mathcal{T}$ du régime transitoire du régime apériodique est d'autant plus long que Q est petit.

$$\mathcal{T} \sim \frac{1}{\omega_0 Q}$$

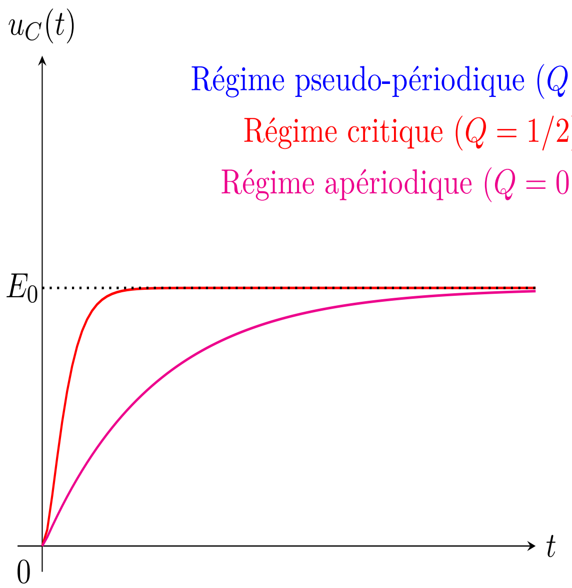
Durée des regimes transitoires :



On voit alors que le régime transitoire le plus court est atteint pour une valeur du facteur de qualité $Q = \frac{1}{2}$: c'est le régime critique.

3.4 Le régime critique $Q = 1/2$

Définition. Régime critique
Le régime critique est le régime intermédiaire entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique.
Il s'observe pour rigoureusement $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$.
Cela correspond à un facteur d'amortissement $\xi = 1$: on parle d'amortissement critique.



Propriété. Durée du régime transitoire
C'est le régime transitoire le plus court et qui se rapproche le plus rapidement possible du régime permanent.

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\omega_0}$$

C'est un régime idéal car, dû aux incertitudes expérimentales, il est impossible d'avoir rigoureusement la condition $Q = 1/2$ sur un système réel. On peut toutefois s'en rapprocher suffisamment pour ne plus voir les oscillations tout en restant le plus court possible.

D'un point de vue mathématique, on a dans ce cas le discriminant du polynôme caractéristique qui est nul, et donc l'unique racine du polynôme caractéristique est égale à :

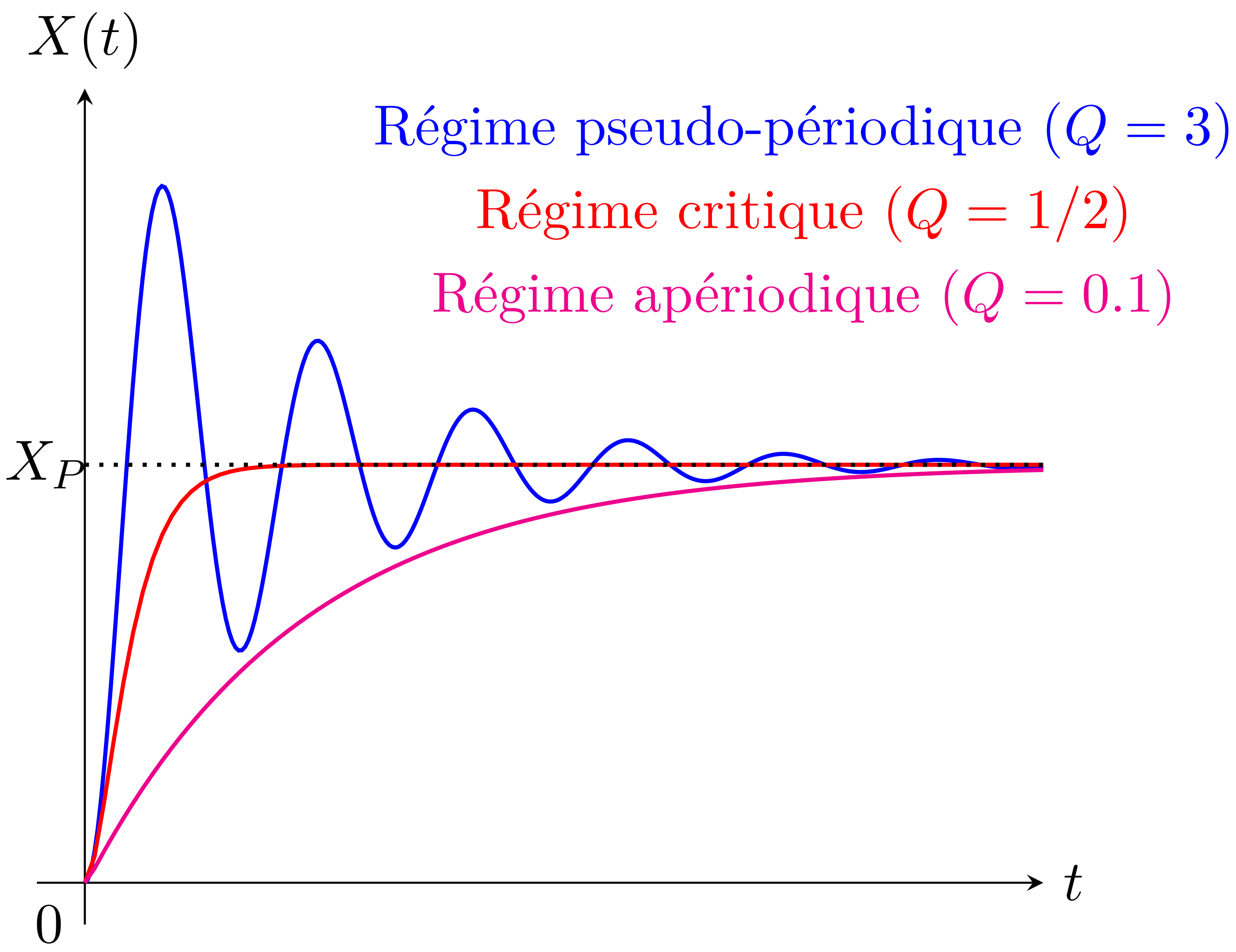
$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = \omega_0.$$

Il vient la solution de l'équation différentielle

$$u_C(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t) + E_0$$

avec A et B des constantes dépendant des conditions initiales.
Attention ! A et B n'ont pas la même dimension !!

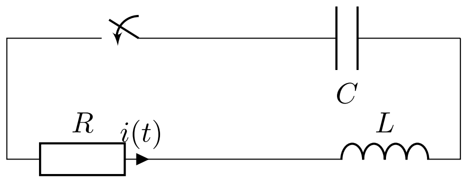
Les différentes solutions de l'oscillateur amorti



4 Circuit RLC libre et approche énergétique

On étudie le circuit suivant :

Le condensateur est initialement chargé à la tension $V_0 = 3$V et il n'y a pas de courant circulant dans la bobine.
A $t = 0$ on ferme l'interrupteur. On donne les valeurs de $C = 50$nF et $L = 10$mH.



Application 3 :

1. S'échauffer

- *Donner l'équation différentielle donc $u_L(t)$, tension aux bornes de la bobine est solution.*
- *A quelle condition sur R peut-on obtenir des oscillations ? Faire l'application numérique.*
- *Donner la valeur de R pour qu'on puisse visualiser environ 10 oscillations.*
- *Pour quelle valeur de R le régime transitoire est-il le plus cours*

2. S'entraîner

- *Donner la valeur de u_L et de sa dérivée à $t = 0^+$*
- *On prend pour cette question $R = 10\Omega$.*
  Donner l'expression de $u_L(t)$ au cours du temps.