TD06

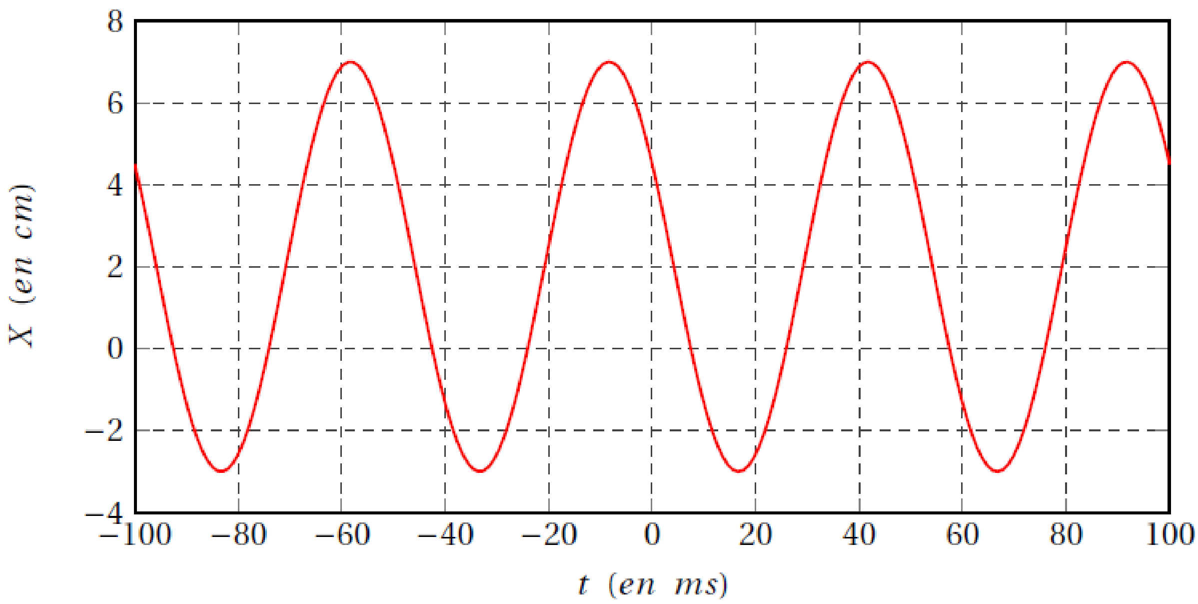
O.H. et signal sinusoïdal

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

1 L'oscillateur harmonique, qu'importe d'où il vienne ...

Exercice 1 - Manipulation du signal d'un OH :

1. Quelles équations correspondent à celles d'un oscillateur harmonique ?
a) $\ddot{X} + \omega X^2 = 0.$ b) $\ddot{X} + \omega^2 X = Cste.$ c) $\ddot{X} - \omega^2 X = 0.$ d) $\ddot{X} - \omega^2 X = Cste.$ e)$\omega^2 \ddot{X} + X = 0.$
2. Donner la solution $x(t)$ de l'équation différentielle $\dfrac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{eq}$ pour des conditions initiales quelconques $x(0) = x_0 > 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 > 0$.
3. Donner les expressions de la moyenne, l'amplitude et de la phase à l'origine.
4. On représente l'évolution temporelle du signal $X(t)$ (mesuré en cm). La position de la masse s'écrit sous la forme $X(t) = X_e + X_m \cos(\omega t + \phi)$. A l'aide de la figure, évaluer
   - ▷ X_e. A quoi correspond X_e ?
   - ▷ X_m. A quoi correspond X_m ?
   - ▷ ω et ϕ.
   - ▷ Calculer $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ en $t = 0$.



Exercice 2 - Oscillations harmoniques :

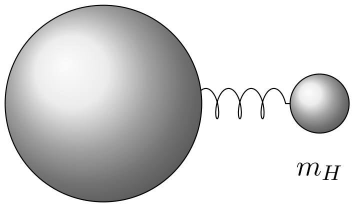
Un point matériel lié à un ressort élastique est en mouvement horizontal sans frottement. Sa position $x(t)$ est solution de l'équation de l'oscillateur harmonique. Au repos, la position de x est $x_{eq} = 2$cm.
On lance la masse depuis la position $x_0 = -3,0$cm, dans le sens des x croissants, avec une vitesse $v_0 =$ 50cm/s. La mesure de la période propre des oscillations donne $T_0 = 1,0$s.
1. Exprimer l'équation différentielle dont x est solution en fonction de T_0 et x_{eq}.
2. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, v_0, T_0 et t

3. Calculer l'amplitude A des oscillations.

Réponse : $x(t) = x_{eq} + x_0 \cos \frac{2\pi}{T_0} t + \frac{v_0 T_0}{2\pi} \sin(\frac{2\pi}{T_0} t)$; $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0 T_0}{2\pi})^2} = 8.5\ cm$

Exercice 3 - Vibration d'une molécule ($*$) :

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8,5.10^{13}$ Hz. On donne les masses atomiques molaires : $M_H = 1$ $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{Cl} = 35,5$ $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ainsi que le nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}.



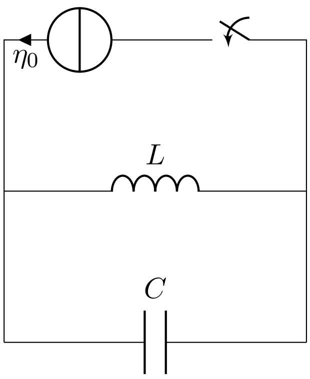
On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un "ressort" de raideur k

1. Calculer la masse d'un atome d'hydrogène m_H et d'un atome de chlore m_C
2. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe
3. A l'aide des données du problème, calculer la constante de raideur k.
4. On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6,63.10^{-34}$ $\text{J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène ainsi que sa vitesse maximale.

Réponse : $m_H = M_H/\mathcal{N}_A = 1.66\ 10^{-24} g$; $m_C = M_C/\mathcal{N}_A = 5.90\ 10^{-23} g$; $m_C >> m_H$; $k = (2\pi)^2 f^2 M_H = 4,7.10^2\ N/m$; $A = 0,1\ \mathring{A}$; $v_{max} = 5,8.10^3\ m.s^{-1}$

2 Circuit électrique

Exercice 4 - Etude d'un circuit LC parallèle :



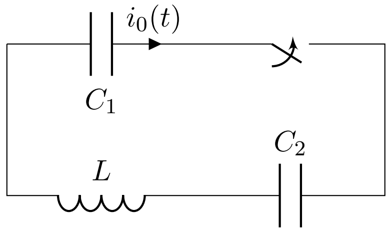
On considère le circuit ci-contre. Initialement :

- ▷ le condensateur n'est pas chargé
- ▷ la bobine n'est parcourue par aucun courant

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$
2. Exprimer $u(t = 0^+)$ et $\dfrac{\text{d}u}{\text{d}t}(t = 0^+)$.
3. En déduire la solution $u(t)$ à l'aide des conditions initiales.

Exercice 5 - Circuit à deux condensateurs :



On considère le circuit ci-contre. Initialement :

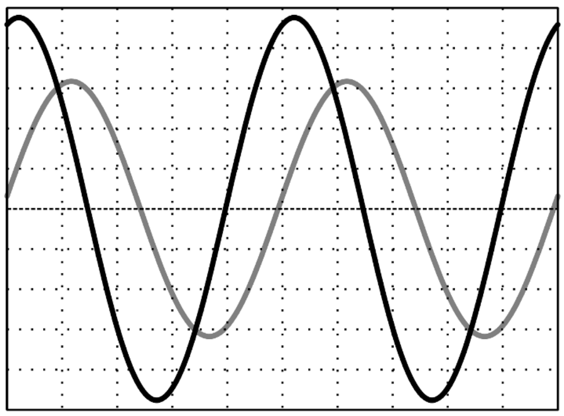
- ▷ le condensateur 1 est chargé à la tension V_0
- ▷ le condensateur 2 n'est pas chargé
- ▷ la bobine n'est parcourue par aucun courant

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la'intensité $i_0(t)$
2. En déduire la solution $u(i_0(t)$ à l'aide des conditions initiales.
3. Exprimer les énergie électrostatique et magnétique dans les 3 dipôles.
4. Exprimer l'énergie totale du circuit.

3 Fonctions sinusoïdales

Exercice 6 - Déphasage :



La figure représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence $s_1(t)$ (en noir) et $s_2(t)$ (en gris). La ligne en tireté représente le niveau zéro pour les deux signaux. Une division de l'axe des temps correspond à 20 ms.

1. Déterminer la fréquence des signaux.
2. Calculer le déphasage entre les deux signaux et celui qui est en avance.
3. Quelle est la phase de s_1 au point le plus à gauche de l'écran ?

Réponses : $f = 10$ Hz ; $s_2(t)$ est en retard de $\phi_0 = 72°$; $\phi_1(t_0) = -\frac{\pi}{10}$

Exercice 7 - Sinusoïde :

1. Représenter sur le même graphe $f(t) = -1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, $\frac{df}{dt}(t)$ et $g(t) = 2.\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Tracer sur le même graphe les fonctions : $x(t) = 1 - 2\sin(2\pi t)$ et $y(t) = 3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.
   On graduera les axes et on écrira toutes les informations utiles sur les graphes.

Exercice 8 - Sinusoïde :

Pour les trois courbes suivantes, donner l'expression numérique de la fonction, expliciter numériquement les deux paramètres de l'équation différentielle (ω_0 et la solution particulière) ainsi que les conditions initiales : valeur de la fonctione t de sa dérivée en $t = 0$.