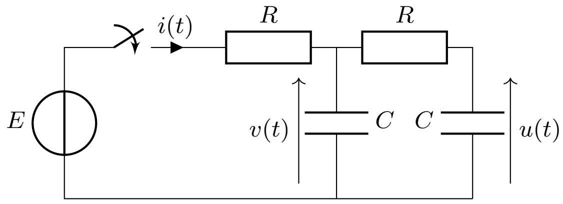
TD07 Oscillateurs amortis

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Circuit électrique

Exercice 1 - Deux condensateurs : :

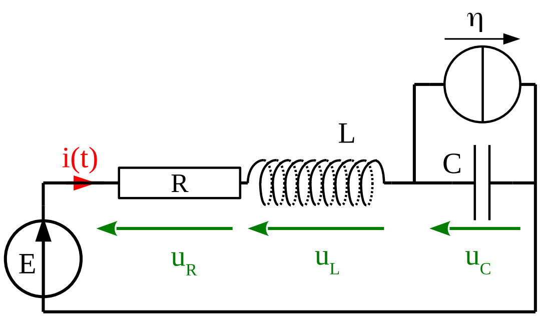
Le circuit schématisé ci-dessous comporte deux résistances R et deux condensateurs de capacité C, initialement déchargés. À l'instant $t = 0$ le branche sur un générateur de tension E.



1. On pose $\tau = RC$, montrer que la tension $u(t)$ vérifie l'équation différentielle
$$\frac{E}{\tau^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{\tau^2} \ .$$
2. Quel est le facteur de qualité Q du montage ?
3. Déterminer les conditions initiales
4. En déduire l'expression de $u(t)$.

Exercice 2 - Deux générateurs : :

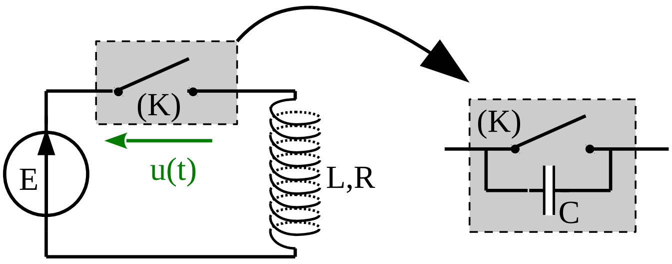
On considère le circuit ci-contre. Le générateur de tension continue a une FEM constante E et le générateur de courant idéal délivre un courant constant η. À l'instant $t = 0^-$, on suppose que le courant $i(t = 0^-) = i_0$ et la tension aux bornes du condensateur vaut $u_c(t = 0^-) = u_0$.



1. Déterminer par un minimum de calculs le courant i et les tensions aux bornes des différents éléments à l'instant $t = 0^+$. En déduire la valeur de $\frac{di}{dt}(t = 0^+)$
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée pas $i(t)$.
3. Quelle doit être la relation entre R, L et C pour avoir un régime transitoire pseudo-périodique ? Donner dans ce cas l'expression de $i(t)$ en fonction de la pseudo-pulsation ω.
4. Déterminer le courant i et les tensions aux bornes des différents éléments lorsque le régime permanent est atteint.
Comparé avec la valeur obtenue via l'expression de $i(t)$.

Réponses : 1. A $t = 0^+$, $i = i_0$, $u_c = u_0$, $u_R = Ri_0$ et $u_L = E - u_0 - Ri_0$; $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{E - u_0 - Ri_0}{L}$
2. $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{LC}\eta$
3. Il faut que $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$; $i(t) = \eta + e^{-\frac{R}{2L}t}\left[(i_0 - \eta)\cos(\omega t) + \frac{2E - R\eta - 2u_0 - Ri_0}{2L\omega}\sin(\omega t)\right]$
4. A la fin du transitoire, $u_L = 0$, $i = \eta$, $u_R = R\eta$ et $u_c = E - R\eta$

Exercice 3 - Etincelle de rupture : :



On considère le montage de la figure ci-contre comprenant notamment une bobine réelle d'inductance $L = 10$ mH et de résistance $R = 10\ \Omega$. On donne $E = 1.0$ V.

1. Initialement, l'interrupteur (K) est fermé depuis longtemps. Quelle est la valeur du courant dans la bobine. A un instant $t = 0$ pris comme origine des temps, on ouvre (K). Que se passe-t-il ?

Afin de modéliser plus en détail le phénomène, on prend en compte qu'un interrupteur ouvert possède une certaine capacité C, très faible, mais non nulle. Un modèle plus réaliste est donc présenté sur la figure : l'interrupteur est équivalent à un interrupteur idéal en parallèle à une capacité $C = 10$ pF.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ après l'ouverture de l'interrupteur. Calculer numériquement le facteur de qualité.

3. En faisant les approximations permises par la valeur de Q, donner une expression simplifiée de $u(t)$. Calculer numériquement la tension maximale atteinte aux bornes de l'interrupteur. Conclure.

Réponses : $Q = 3200$; $u_{max} \approx 3200$ V

Oscillateur mécanique

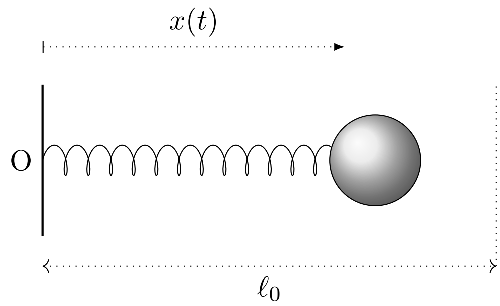
Exercice 4 - Oscillation d'une masse ralenti par frottement fluide :

Une masse est attachée au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Elle est libre de se déplacer horizontalement le long d'un axe (Ox) et l'autre extrémité du ressort est maintenu fixe en $x = 0$.

La masse oscille dans un fluide visqueux qui va exercer sur cette dernière une force F_α de **frottement fluide**. Cette force s'oppose au mouvement de la masse et on admettra son expression :

$$F_\alpha = -\alpha \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

avec v la vitesse de la mass et et α un coefficient de frottement fluide qui dépend de la forme de la masse et de la viscosité du fluide.



On appelle $x(t)$ la longueur du ressort à l'instant t. L'étude mécanique du système permet d'obtenir l'équation du mouvement de la masse :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - k(x(t) - l_0)$$

1. Identifier chacun des termes de l'équation : variation de la quantité de mouvement, force du fluide visqueux, force de rappel du ressort.

2. Donner la pulsation propre et le facteur de qualité du système.
   Discuter l'évolution de Q en fonction de α. Est-ce cohérent avec une analyse "intuitive" ?

3. On rappelle la valeur du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 pour un circuit RLC :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

   On remarque alors que L, l'inductance de la bobine, et m, la masse, joue des rôles symétriques. Compléter le tableau d'équivalence suivant :

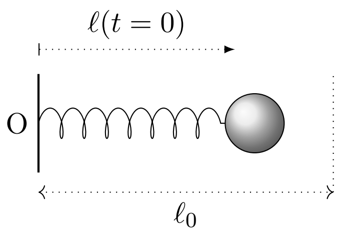
Électrique	**Mécanique**
L	m
R	
C	

4. On donne $m = 200$g et $\alpha = 10$kg.s^{-1}
   Donner la valeur minimal de k pour qu'on puisse observer des oscillations.

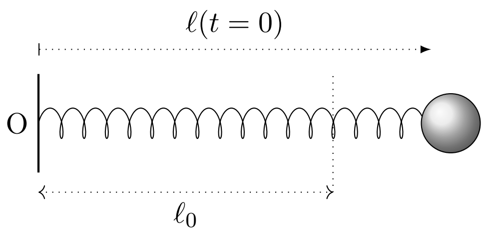
   On prendra par la suite $k = 10^5$N.m^{-1}.
5. Donner le nombre d'oscillations qu'on observera.
6. Initialement, on place à la masse à une distance $L > l_0$ du mur et on la lâche sans vitesse initiale.
   Donner l'expression de $x(t)$ au cours du temps en fonction de L, l_0, k, m, α.
7. Différence d'amplitude entre la première et la deuxième oscillation

Exercice 5 - Prévoir les comportements :
Pour chacun des cas suivant, on donne les conditions initiales et les valeurs de raideur du ressort k, de la masse m et du coefficient de frottement fluide α. A chaque fois
- ▷ donner la valeur du facteur de qualité et de la pulsation propre
- ▷ le régime transitoire qu'on observera
- ▷ la durée de ce régime et le nombre d'oscillations observées
- ▷ donner la solution $l(t)$ (on pourra se limiter aux cas 1 et 3)

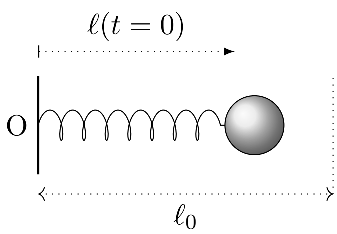
1)
- ▷ $l(t = 0) < l_0$ et $v(t = 0) = 0$
- ▷ $m = 10$ g
- ▷ $k = 100$ N.m^{-1} et $\alpha = 7$ kg.s^{-1}



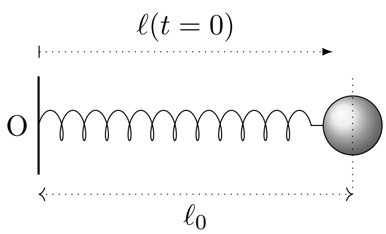
2)
- ▷ $l(t = 0) > l_0$ et $v(t = 0) = 0$
- ▷ $m = 100$ g
- ▷ $k = 50$ N.m^{-1} et $\alpha = 5.10^{-2}$ kg.s^{-1}



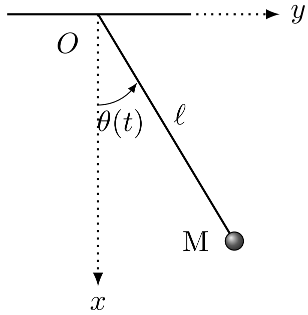
3)
- ▷ $l(t = 0) < l_0$ et $v(t = 0) = v_0$
- ▷ $m = 20$ g
- ▷ $k = 30$ N.m^{-1} et $\alpha = 4.9$ kg.s^{-1}



4)
- ▷ $l(t = 0) = l_0$ et $v(t = 0) = v_0$
- ▷ $m = 342$ g
- ▷ $k = 523$ N.m^{-1} et $\alpha = 0.2$ kg.s^{-1}



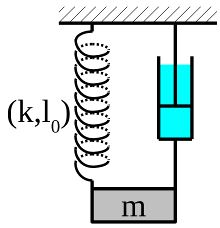
Exercice 6 - Pendule dans un fluide visqueux : Un pendule simple baigne dans un fluide visqueux
On écarte un pendule d'un angle θ_0 avec la verticale et on le lâche sans vitesse initiale.
On donne l'équation d'évolution de l'angle θ :



$$ml_0\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - mg\theta$$

1. Donner la dimension de α
2. On donne $l_0 = 50$cm, $m = 3$kg et $\alpha = 1.3$ SI
   Combien va-t-on observer d'oscillations environ ?
3. On lâche le pendule avec une vitesse initiale $\dot{\theta}_0$ depuis un angle θ_0
   Donner l'expression de $\theta(t)$ au cours du temps.
4. Exprimer la pseudo-période T des oscillations et le temps τ de décroissance de l'enveloppe.
5. En déduire la durée $\mathcal{T}$ du régime transitoire

Exercice 7 - Détermination des caractéristiques dynamiques d'un accéléromètre (*) : *Peu guidé* :



Nous nous proposons de déterminer expérimentalement les caractéristiques mécaniques (m, b, k) de l'accéléromètre schématisé par la figure **??** ci-contre.

m est la masse de la masselotte de l'accéléromètre, b le coefficient de frottement visqueux tel que la force de frottement que subit la masselotte s'écrit $\vec{F} = -b\vec{v}$ et k la raideur du ressort.

Pour cela, on suspend une masse $M = 200,0 \pm 0,1$ g à la masselotte de l'accéléromètre et on attend que le système soit à l'équilibre. On décroche alors la surcharge M et la masselotte est abandonnée sans vitesse initiale.

On observe un mouvement sinusoïdal amorti, avant un retour à une nouvelle position d'équilibre. Les mesures effectuées donnent une pseudo période $T = 20 \pm 2$ ms. L'écart initial à la nouvelle position d'équilibre est de $A_0 = 1,25 \pm 0,01$ mm et celui du premier maximum de même signe $A_1 = 0,05 \pm 0,01$ mm.

En prenant $g = 9.8\,\mathrm{m}.s^{-2}$, calculer les caractéristiques suivantes : la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, la masse m et la raideur k.

Réponses : $k = \dfrac{Mg}{A_0} = 1570 \pm 20$ *N/m; Décrément logarithmique* $\delta = 3.2 \pm 0.2$*; donc* $Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{\delta^2} + 1} = 1,10 \pm 0.05$; $\omega_0 = \dfrac{2Q\delta}{T} = 350 \pm 70$ *rad/s; enfin* $m = \dfrac{k}{\omega_0^2} = \dfrac{Mg}{A_0\omega_0^2} = 13 \pm 5$ *g*