Chap IX

Phénomènes de résonance

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Savoirs ♡

- ♡ Définir le phénomène de résonance d'un système physique

- ♡ **Résonance en tension**
  - donner la conditions de résonance
  - influence de Q sur l'acuité de la résonance
  - bande passante : définition et largeur
  - déphasage à $\omega = \omega_0$

- ♡ **Résonance en intensité**
  - influence de Q sur l'acuité de la résonance
  - bande passante : définition et largeur
  - déphasage à $\omega = \omega_0$

Savoir Faire

Identifier un phénomène de résonance dans le comportement d'un système physique

Obtenir l'amplitude complexe d'un signal dans un oscillateur amorti

A partir de l'amplitude complexe :
- *identifier ω_0 et Q à partir d'une formule donnée en référence*
- *reconnaître un résonance en tension ou en intensité*
- *discuter l'apparition ou non d'une résonance en fonction du facteur de qualité*
- *trouver la pulsation de résonance*

A partir d'un graphe de résonance en amplitude et déphasage
- *mesurer ω_0*
- *mesurer la largeur de la bande passante*
- *mesurer Q*

1 Étude des phénomènes de résonance

1.1 Le phénomène de résonance avec les mains

Lorsqu'on pousse quelqu'un en balançoire, on donne nos impulsions à la nacelle à un rythme régulier et à un moment bien précis : lorsqu'elle est au sommet, juste avant de redescendre.
Mais on peut les donner à un autre rythme : se faisant on réalise que les oscillations de la balançoire sont plus petites.

D'un point de vu physique, on est dans le cadre de la RSF : le système (balançoire) est soumis à un signal excitateur (nos bras qui pousse) périodique (assimilé à une sinusoïde).
Suivant la fréquence du signal excitateur, on observe que l'amplitude des oscillations du système peuvent être :

- ▷ maximale
- ▷ bien plus grande que le signal excitateur

Définition. Résonance
Lorsqu'un système (électrique, mécanique...) est soumis à une excitation sinusoïdale, il peut exister certaines fréquences particulières, appelées fréquences de résonance, pour lesquelle l'amplitude de sa réponse passe par un maximum. On dit qu'il y a **résonance**.
A la résonance, même une faible excitation peut suffire pour produire de très grandes oscillations du système (pouvant même mener à sa destruction).

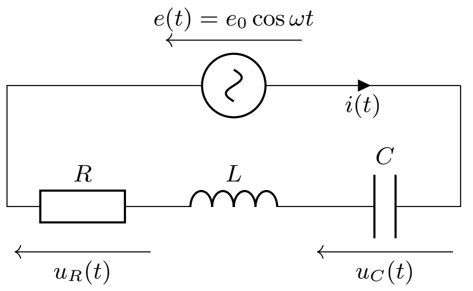
Lorsqu'on fait de la balançoire, sans s'en rendre compte, on participe à un phénomène de résonance. En donnant nos impulsions à un rythme bien précis, on maximise l'amplitude du mouvement de la balançoire.

Propriété. Résonance ou pas résonance
Un phénomène physique présente une résonance si l'amplitude d'un signal X qu'il produit est maximale pour une certaine fréquence d'excitation, appelée fréquence de résonance.

La suite du cours va prendre la forme de questions-réponses auxquelles on cherchera)à répondre. Vous retrouvez dans les exercices les mêmes questions. Ce chapitre est donc à la limite entre le cours et le TD.

1.2 La résonance en tension

On étudie un oscillateur amorti représenté par le circuit RLC série ci dessous. On s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur u_C.



Questions classique :
Montrer que l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur peut se mettre sous la forme :

$$\underline{U_0} = \frac{K}{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Avec K, ω_0 et Q des constantes qu'on exprimera en fonction des caractéristiques du circuit C, L, R et e_0.
En déduire l'amplitude réelle U_0.

▶ Amplitude complexe $\underline{U_C}$

On se place en RSF et en notaiton complexe.
À partir du circuit, on passe directement en régime forcé et, à l'aide d'un pont diviseur de tension, on obtient immédiatement

$$\underline{U_C}(t) = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R} + \underline{Z_L}}\underline{e}(t)$$

soit, en remplaçant les impédances par leurs valeurs

$$\underline{U_C}(t) = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R + jL\omega}\underline{e}(t)\ .$$

Astuce : on essaiera au maximum d'écrire le dénominateur comme une somme de terme sans dimension.

$$\underline{U_C}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\underline{e}(t)$$

On obtient l'amplitude complexe : $\underline{U_C} = \underbrace{\underline{U_0}}\, e^{j\omega t}$:

$$\underline{U_0} = \frac{e_0}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

▶ Introduire ω_0 et Q

Le plus souvent l'énoncé vous demandera d'écrire l'amplitude complexe sous une forme demandée

On a $K = e_0$. On cherche donc :

$$\frac{1}{Q\omega_0} = RC \ \text{ et } \ \frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

On résout la seconde équation en premier : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ puis :

$$\frac{1}{Q} = RC\omega_0 \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On retrouve la pulsation propre et le facteur de qualité de l'oscillateur amorti.

► **Amplitude réelle du signal**

L'amplitude U_0 de la tension est $U_0 = |\underline{U_0}|$ soit :

$$U_0 = \left| \frac{e_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \right| = \frac{e_0}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

1.3 Mise en évidence de la résonance

Propriété. Résonance en tension
On considère un système physique générant un signal $X(t)$ suite à une excitation par un signal sinusoïdal de pulsation ω. Si l'amplitude de X peut s'écrire sous la forme :

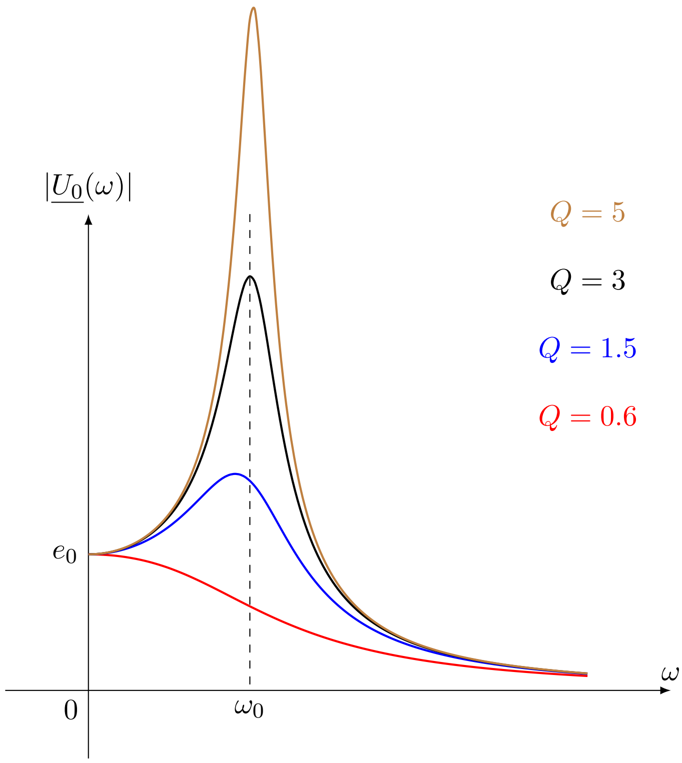
$$\frac{K}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

on parle de résonance en tension.
Les propriétés seront les mêmes que pour l'étude de la tension u_C d'un circuit RLC série.

On trace la fonction $U_0(\omega)$ sur le graphe ci contre pour différente valeur de facteur de qualité.

On remarque :

- ▷ la résonance n'apparaît que pour certaine valeur du facteur de qualité.
  Pour qu'il y ait résonance, Q doit être élevé.
- ▷ lorsqu'il y a résonance, le maximum est atteint pour une fréquence, notée ω_r, appelée fréquence de résonance.
  Elle est proche de ω_0 et plus Q est grand, plus $\omega_r \simeq \omega_0$
- ▷ la largeur du pique de résonance dépend du facteur de qualité : plus Q est grand, plus le pic est étroit.



Propriété. Condition de résonance
Le phénomène de résonance en tension n'apparaît que si $Q > 1/\sqrt{2}$.
Plus Q est grand, plus le pique de résonance est fin et plus l'amplitude est élevée.

Exemple 1 : *On définit la variable* $x = \omega/\omega_0$. *Montrer que la fonction* $f : x \to (1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$ *passe par un minimum* x_r *si* $Q > 1/\sqrt{2}$. *Exprimer* x_r.

On cherche un minimum d'une fonction ⇒ on dérive !

$$f'(x) = -4x(1-x^2) + 2\frac{x}{Q^2} \text{ et donc } -4x_r(1-x_r^2) + 2\frac{x_r}{Q^2} = 0$$

On simplifie pour avoir :

$$(1-x_r^2) - \frac{1}{2Q^2} = 0 \;\Rightarrow\; x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette solution est réelle si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0$ *donc pour* $Q > 1/\sqrt{2}$.

Finalement $x_r = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.

La résonance en tension est atteinte pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ si $Q > 1/\sqrt{2}$. On remarque bien que $\omega \simeq \omega_0$ si Q est grand.

Propriété. Fréquence de résonance

Le maximum de la tension est atteint pour une pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.

Plus Q est grand, plus ω_r est proche de ω_0.

1.4 Résonance en intensité

Application 1 :

1. *Dans le même circuit, en utilisant la tension aux bornes de la résistance, montrer que l'amplitude complexe* $\underline{I_0}$ *de l'intensité* $\underline{i}(t)$ *s'écrit comme :*

$$\underline{I_0} = \frac{K}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

   avec K, ω_0 *et* Q *trois constantes qu'on exprimera à partie de* e_0, R, L *et* C.
2. *En déduire qu'il existe toujours un phénomène de résonance pour* $\omega_r = \omega_0$.
3. *Donner l'amplitude de l'intensité à la résonance.*

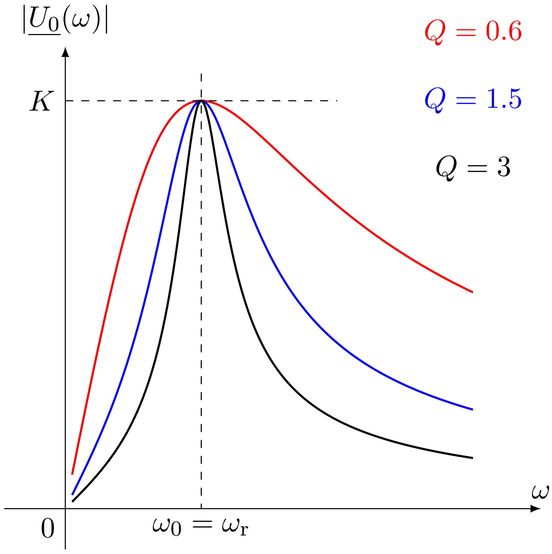
Propriété. Résonance en intensité

On considère un système physique générant un signal $X(t)$ suite à une excitation par un signal sinusoïdal de pulsation ω. Si l'amplitude de X peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{K}{\sqrt{1 + Q\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2})^2\right)}}$$

on parle de résonance en intensité.

Les propriétés seront les mêmes que pour l'étude de l'intensité i d'un circuit RLC série.

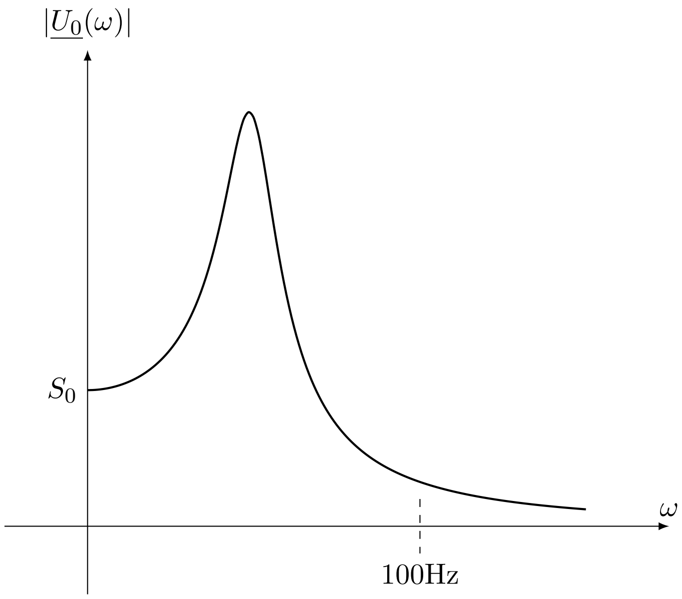


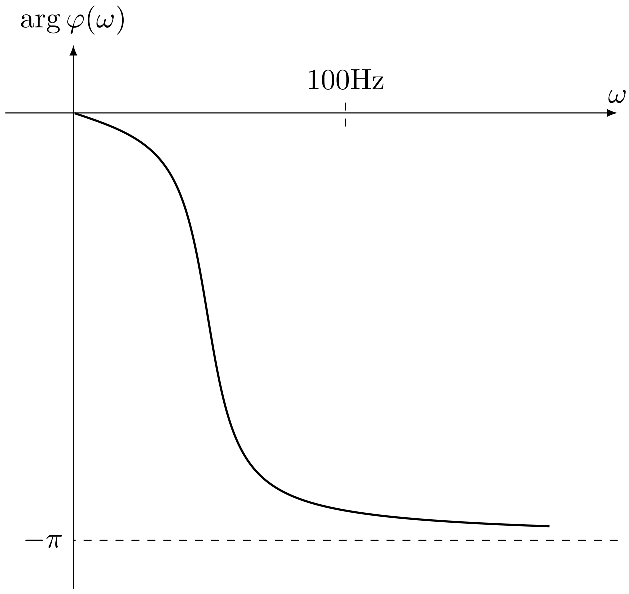
Propriété. Condition de résonance
Le phénomène de résonance en intensité apparaît quelque soit la valeur du facteur de qualité Q.
Plus Q est grand, plus le pique de résonance est fin et mais l'amplitude ne varie pas.

Propriété. Fréquence de résonance
Le maximum de l'intensité est atteint pour une pulsation $\omega_r = \omega_0$.

2 Etude graphique de la résonance d'un oscillateur amorti

Système étudié :
On étudie un oscillateur amorti de pulsation ω_0 et de facteur de qualité Q. Il peut être mécanique, électrique, inductif, ... On excite le système avec un signal sinusoïdal $s(t) = S_0 \cos \omega t$. On mesure le signal $X(t)$ généré par le système $tension$û$_c$, intensité i, ...).
On obtient deux graphes :
- ▷ l'amplitude X_0 de $X(t)$ en fonction de la pulsation ω du signal s
- ▷ le déphasage entre $X(t)$ et $s(t)$





Que mesurer sur un graphe de résonance ?
On cherche à obtenir les caractéristiques ω_0 et Q du système. Pour cela on mesure :
- ▷ la pulsation où le déphasage est particulier (quadrature, opposition ou en phase)
- ▷ la bande passante et sa largeur

2.1 Déphasage particulier

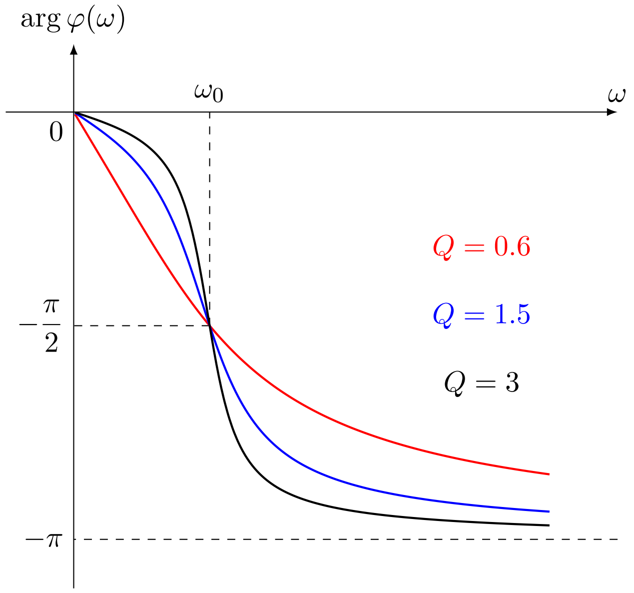
Montrons que pour $\omega = \omega_0$, lors d'une résonance en tension,le déphasage entre $X(t)$ et $s(t)$ prend une valeur particulière.

Pour une résonance en tension, l'amplitude complexe $\underline{X_0}$ de X est :

$$\underline{X_0}(\omega) = \frac{K}{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Soit pour $\omega = \omega_0$: $\underline{X_0}(\omega_0) = \dfrac{K}{\dfrac{j}{Q}} = \dfrac{KQ}{j} = -jKQ.$
Donc $\arg \underline{X_0}(\omega_0) = -\pi/2$.

On peut alors facilement mesurer ω_0 via le graphe du déphasage :

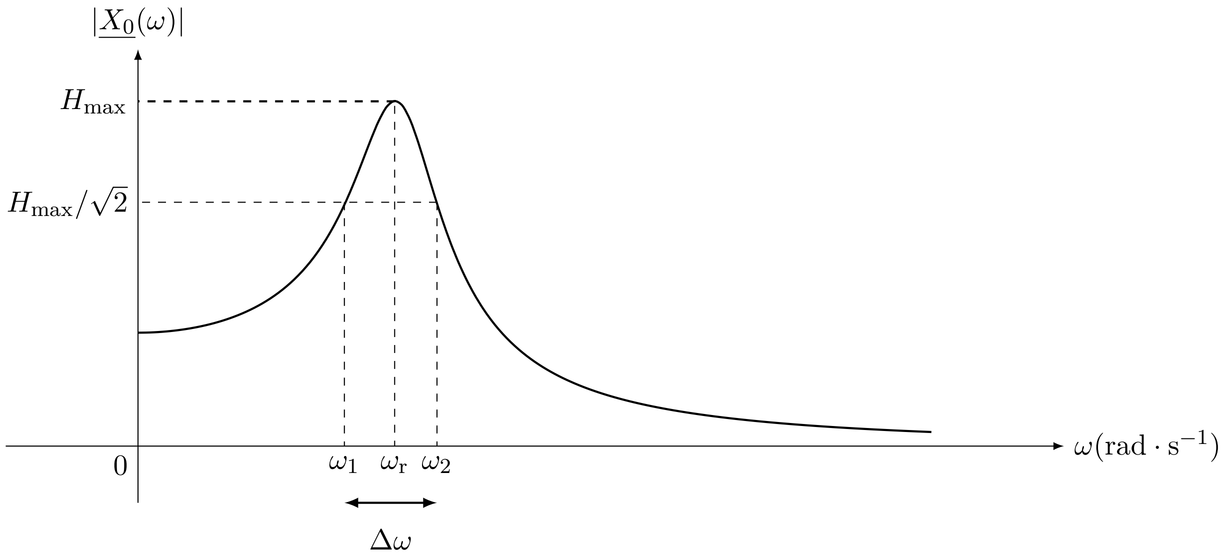


> ***Application 2 :*** *De la même façon, montrer que pour une résonance en intensité le déphasage pour $\omega = \omega_0$ est égal à 0.*

2.2 Bande passante et largeur de bande passante

Définition. Bande passante
La **bande passante** $[\omega_1, \omega_2]$ d'un système correspond à l'ensemble des pulsations telles que

$$\boxed{\omega \in [\omega_1, \omega_2] \qquad \Longrightarrow \qquad |\underline{H}(\omega)| > \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}}.$$



Propriété. Largeur de la bande passante
La largeur de la bande passante $\Delta\omega$ dépend du facteur de qualité :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est petite. On parle de résonance **aïgue**.

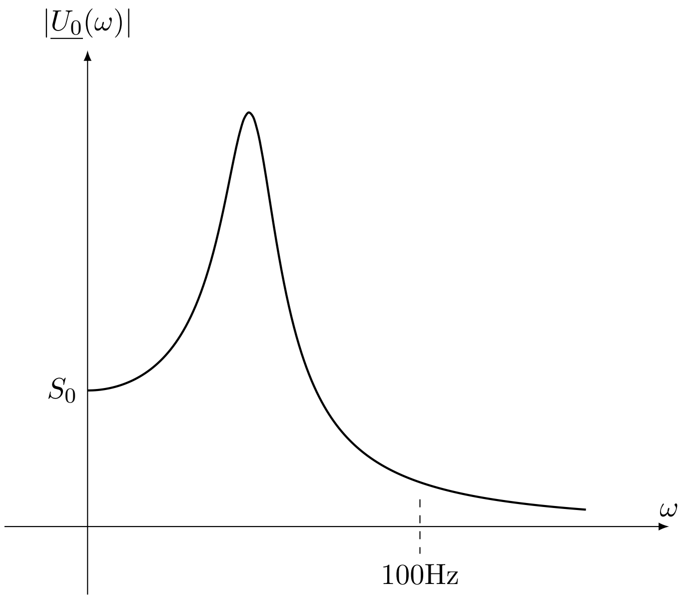
En mesurant la largeur de la bande passante, on obtient facilement une estimation du facteur de qualité :

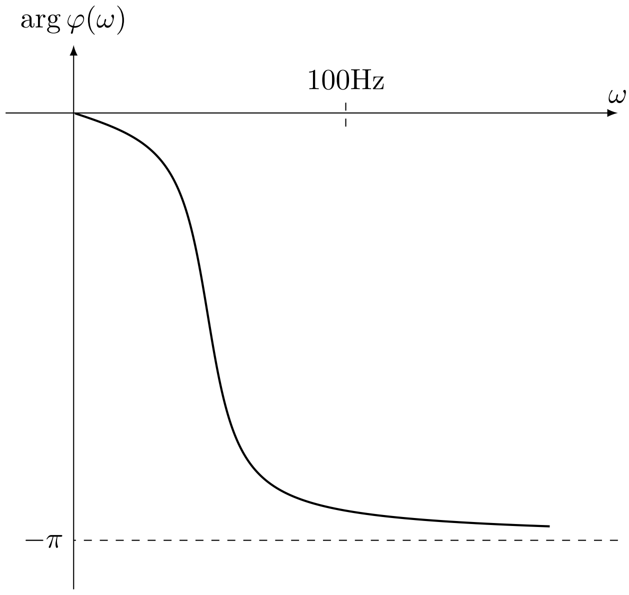
$$Q = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

2.3 Mesure de ω_0 et Q

A partir d'un graphe de résonance, trouver

- ▷ la pulsation propre
- ▷ le facteur de qualité





Application 3 :

On donne ici le graphe de résonance d'une tension $U(t)$.

1. *Est-ce un phénomène de résonance en tension ou en intensité ?*
2. *Donner la pulsation de résonance.*
3. *A l'aide du graphe, estimer la valeur de ω_0 et Q pour la courbe en trait épais.*