Chap X

Filtrage linéaire

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ **Quadripôle**
  - tension d'entrée, tension de sortie
  - intensité d'entrée, intensité de sortie

- ♡ **Filtre linéaire**
  - Notion de filtrage
  - Nature des filtres : passe-haut, passe-bas, passe bande, coupe-bande
  - Fonction de transfert

- ♡ **Diagramme de Bode**
  - notion d'échelle logarithmique
  - gain et gain en décibel
  - bande passante
  - asymptote et pente (décibel par décade)

- ♡ **Théorème de Fourier**
  - Décomposition d'un signal périodique
  - Spectre d'un signal
  - Notion de fondamental et d'harmoniques, amplitudes associées

Savoir Faire

Etude d'un filtre
- *obtenir la nature d'un filtre par une étude asymptotique*
- *obtenir la fonction de transfert $\underline{H}$*
- *obtenir le gain ; le gain en décibel et le déphasage*
- *tracer le diagramme de Bode pour un passe-bas ou un passe-haut d'ordre 1*

Construire un filtre en fonction d'un cahier des charges donné

Réponse d'un filtre : *Donner la réponse $s(t)$ d'un filtre à une excitation $e(t)$*
- *$e(t)$ sinusoïdale*
- *$e(t)$ somme de sinusoïdes*
- *$e(t)$ périodique quelconque donnée avec son spectre*

en utilisant soit la fonction de transfert soit le diagramme de Bode

Reconnaître un effet moyenneur dérivateur et intégrateur d'un filtre

Discuter la qualité d'un filtre d'ordre 2 à l'aide de son facteur de qualité ou de sa bande passante

1 Notion de filtre : étude d'un filtre passe-bas du premier ordre

1.1 Position du problème et notion de quadripôle

On étudie à nouveau le circuit RC mais on branche aux bornes du condensateur deux fils. On alimente le circuit avec une tension $e(t)$ et on mesure la tension de $s(t)$ aux bornes des fils.

> ***Expérience 1 :*** *Filtre RC avec signal sinusoïdal en entrée, $R = 1\text{k}\Omega$ et $C = 10nF$..*

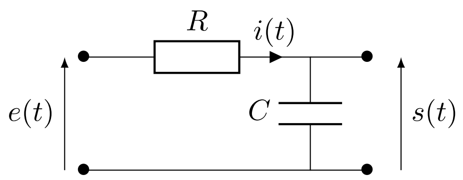


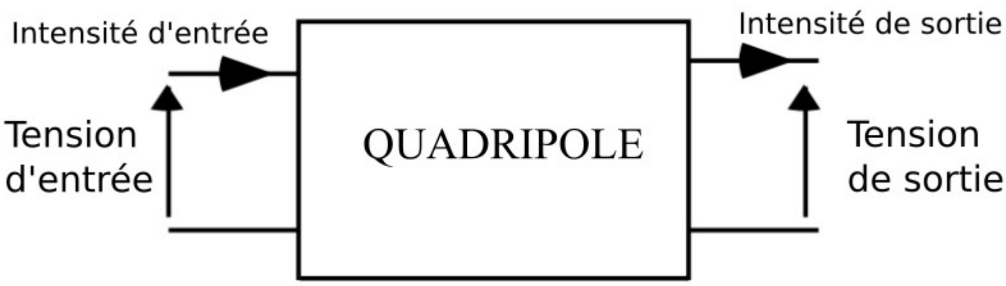
Fig. 1 – Le filtre RC.

On choisit successivement un signal sinusoïdal $e(t)$ d'amplitude $E_0 = 2\text{V}$ et de pulsation ω avec :
- ▷ $\omega = 10\text{MHz}$
- ▷ $\omega = 1\text{MHz}$
- ▷ $\omega = 100\text{kHz}$
- ▷ $\omega = 10\text{kHz}$

On a ainsi créer un composant électrique possédant quatre bornes de branchement : c'est un quadripôle.

Définition. Quadripôle
Un quadripôle possède deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.
On appelle grandeurs d'entrée et de sortie les courants et tensions à l'entrée et à la sortie.

Schéma d'un quadripole :



Le quadripôle n'est pas utilisé seul. On distingue :

- ▷ **le dispositif d'entrée** (en général un générateur de tension ou de courant, ou la sortie d'un autre quadripôle)
- ▷ **le dispositif de sortie** (en général une simple résistance dite de charge, ou l'entrée d'un autre quadripôle)

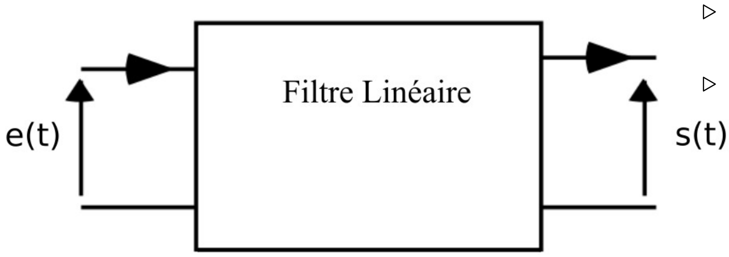
1.2 Nature du filtre : étude expérimentale et asymptotique

▶ Étude expérimentale

On observe :
- ▷ « basse fréquence », le signal de sortie semble être de même amplitude que le signal d'entrée ;
- ▷ « haute fréquence », le signal de sortie est d'amplitude très faible.

Le quadripôle fournit un signal $s(t)$:
- ▷ quasi-similaire au signal d'entrée $e(t)$ si ce dernier possède une faible fréquence
- ▷ nul si le signal d'entrée $e(t)$ possède une fréquence élevée

Schéma de fonctionnement du quadripole :



En reprenant le schéma d'un quadripôle, le circuit
- ▷ laisse passer $e(t)$ si sa fréquence est suffisamment basse
- ▷ bloque $e(t)$ si sa fréquence est trop élevée

▶ Notion de filtre

Le quadripôle permet de trier les signaux suivants leur fréquence : c'est un filtre.

Définition. Filtre
Un filtre est un dispositif électronique qui agit de façon sélective sur un signal en fonction de la fréquence de ce dernier.

Celui-ci est passe-bas : les basses fréquences passent et les hautes sont bloquées On étudiera également des filtres :
- ▷ passe-haut : laisse passer les hautes f, coupe les basses f
- ▷ passe-bande : coupe les hautes f, coupe les basses f
- ▷ réjecteur de bande : laisse passer les hautes f et les basses f

▶ Prévision du caractère : étude asymptotique

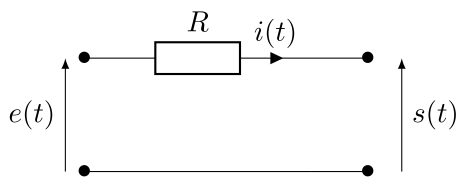
Propriété. Etude asymptotique
L'étude du comportement à hautes et basses fréquences d'un filtre en RSF permet de déduire son caractère (passe-bas, passe-haut et passe-bande).

Nous étudions le circuit en régime sinusoïdal forcé (RSF).

Rappel des comportements à hautes et basses fréquences :

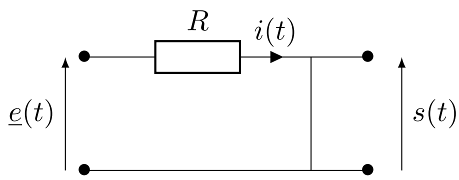
Basses fréquences :

A « basses fréquences », le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.
La tension de la résistance est nulle et, par une loi des mailles, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée



Hautes fréquences :

A « hautes fréquences », le condensateur est équivalent à un fil. La tension de sortie est la tension à ses bornes, elle est donc nulle.



On retrouve bien le comportement d'un filtre passe-bas.

1.3 La fonction de transfert

Définition. Fonction de transfert
La **fonction de transfert** d'un filtre est la grandeur complexe

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}}$$

avec $\underline{s}(t)$ le signal de sortie complexe et $\underline{e}(t)$ le signal d'entrée complexe du filtre.

▶ Calcul de la fonction de transfert

Astuce pratique :
La fonction de transfert d'un filtre se trouve le plus souvent en associant des impédances complexes jusqu'à pouvoir appliquer un pont diviseur de tension.

Cas du circuit RC :
Ainsi, à partir de la figure 1, il vient

$$\underline{s}(t) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}\underline{e}(t) = \frac{1/(jC\omega)}{R + 1/(jC\omega)}\underline{e}(t) .$$

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{e}(t) .$$

Propriété. Fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre
La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{K}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

avec ω_0 la **pulsation de coupure du filtre** et K une constante.

Ici $K = 1$ On reconnaît pour le filtre RC la pulsation de coupure

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

.

Ordre d'un filtre :
Le filtre est dit du premier ordre car les polynômes en $j\omega$ du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert sont d'ordres 1 au maximum.

▶ Utilité pratique de la fonction de transfert

Le signal en sortie du filtre $s(t)$ s'écrit comme :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- ▷ S_0 amplitude réelle : $S_0 = |\underline{S_0}|$, amplitude complexe
- ▷ ω pulsation du signal en entrée, ici e(t)
- ▷ φ déphasage par rapport à $e(t)$: $\varphi = \arg \underline{S_0}$

Signal complexe de sortie $\underline{s}(t)$:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \Rightarrow \underline{s}(t) = \underline{H}(\omega)\underline{e}(t)$$

Attention ! ω la pulsation du signal d'entrée $\underline{e}(t)$. A ne pas confondre avec ω_0.

▷ **Amplitude en sortie S_0 et fonction de transfert**
L'amplitude S_0 du signal de sortie est donnée par l'amplitude complexe : $\underline{s}(t) = \underline{S_0}e^{j\omega t}$.

$$\underline{s}(t) = \underline{H}(\omega)\underline{e}(t) \;\Rightarrow\; \underline{S_0}e^{j\omega t} = \underline{H}(\omega)e_0e^{j\omega t}$$

En prenant le module :

$$S_0 = |\underline{S_0}| = |\underline{H}(\omega)|e_0$$

Définition. Gain et gain en décibel
Le **gain** d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|}\,.$$

Le **gain en décibel** d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(\omega)|}$$

avec log le logarithme décimal. Le gain en décibel s'exprime en **décibels** (dB).

▷ **Phase en sortie et fonction de transfert**
Le déphasage φ_0 du signal de sortie par rapport au signal 'entrée $e(t)$ est :

$$\varphi_0 = \arg[\underline{H}(\omega)]$$

Finalement, avec u signal d'entrée $e(t) = e_0\cos\omega t$, le signal de sortie $s(t)$ est :

$$s(t) = G(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega)$$

avec $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg\underline{H}(\omega)$

2 Diagramme de Bode

2.1 Définition et échelle logarithmique

Un filtre possède un comportement différent suivant la pulsation ω du signal en entrée. Pour représenter ses variations, on va tracer un graphe de $|\underline{H}(\omega)|$ et de $arg\underline{H}(\omega)$.
Problème : ω la pulsation du signal d'entrée possède de grande variations d'amplitude.

Application 1 : ***Intérêt de la représentation logarithmique***
On veut représenter sur un axe une grandeur x qui varie de 1 à 10 000. Par soucis de clarté, on veut que le point représentant $x = 1$ et celui représentant $x = 10$ soient distants de 1cm.
Calculer la taille de l'axe nécessaire suivant qu'on représente la grandeur sous forme linéaire x ou logarithmique $\log(x)$.

Définition. Diagramme de Bode
Le diagramme de Bode d'un filtre est le double tracé de
- ▷ le **gain en décibels** du filtre ;
- ▷ la **phase** de la fonction de transfert.

Ces deux tracés sont réalisés en fonction du **logarithme de la pulsation**.

2.2 Tracé du diagramme de Bode du passe bas d'ordre 1

On calcule le module $|\underline{H}(\omega)|$ et l'argument $\arg \underline{H}(\omega)$ de la fonction de transfert.

Gain en décibel :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

Donc

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log(1) - 20\log(\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2})$$

♡ *Instant math* ♡

$$\log x^{\alpha} = \alpha \log x$$

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -10\log(1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2)$$

Phase :

$$\arg \underline{H}(\omega) = \arg 1 - \arg(1+j\omega/\omega_0) = -\arctan(\omega/\omega_0)$$

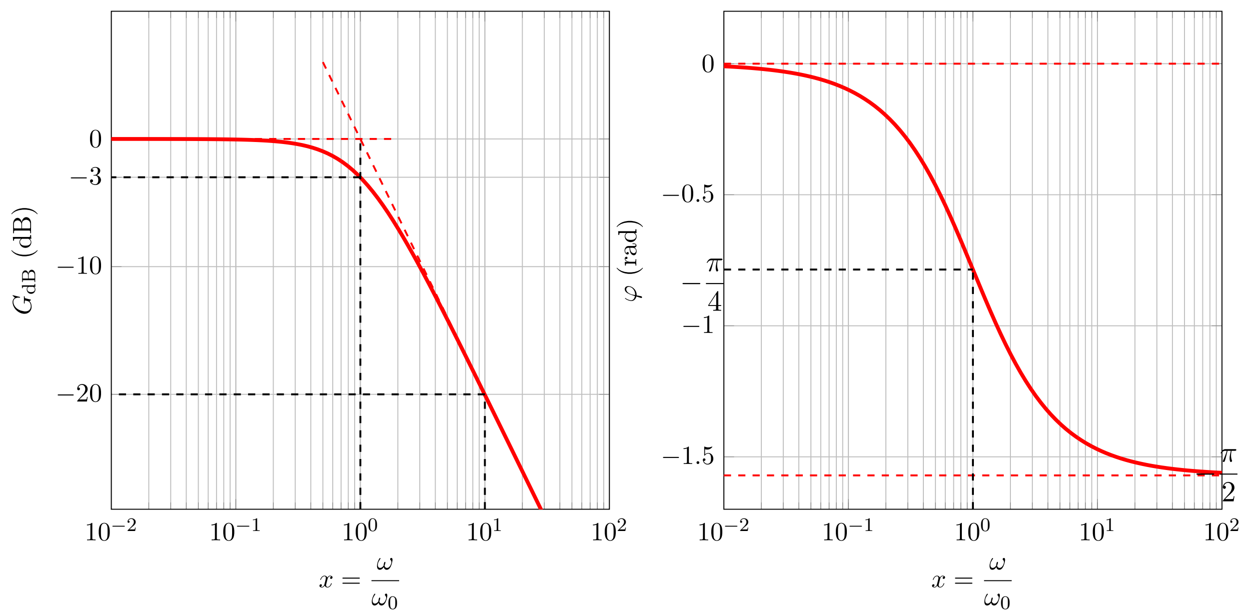


Fig. 2 – Diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 1.

Tracé "à la main"
Il faut retenir : a forme générale ; la limite en $\omega \to 0$; la valeur en $\omega = \omega = 0$; la valeur en $\omega = 10\omega_0$:

2.3 Utilisation d'un diagramme de Bode

♡ *Instant math* ♡

$$G_{dB} = 20 \log G \ \Rightarrow \ G = 10^{\dfrac{G_{dB}(\omega)}{20}}$$

> **Exemple 1 :** *On alimente le filtre RC, $R = 1k\Omega$ $C = 10nF$, précédent à l'aide d'un signal sinusoïdal :*
>
> $$e(t) = 2\cos(\omega t) \ \ avec \ \ \omega = 10^6 Hz$$
>
> *A l'aide du diagramme de Bode précédent, donner le signal de sortie $s(t)$.*
> *Correction*
> *Pour ce filtre $\omega_0 = 10^5 Hz$, et on remarque que $\omega = 10\omega_0$.*
> *Sur le diagramme pour $x = 10$, on lit $G_{dB} = -20$ et $\varphi \simeq -\pi/2$.*
> *Le gain est donc : $G = 10^{\dfrac{-20}{20}} = 10^{-1}$.*
>
> $$s(t) = \frac{2}{10}\cos(\omega t - \pi/2)$$

Propriété. Perte de 20 décibels
Lorsque le gain en décibel diminue de 20 décibels, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 10.

> **Application 2 :** *Reprendre l'exercice précédent mais avec $\omega = 10^5 Hz$.*

2.4 Zones rectilignes du diagramme de gain :

Asymptote horizontale

Pour $\omega << \omega_0$, la courbe est une droite horizontale. En effet :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Le gain en décibel à peu près constant, $G_{bB} \simeq 0$, on obtient bien une droite horizontale.

Attention ! Si le gain en décibel est nul, le gain est égal à 1 et l'amplitude du signal de sortie est la même que celle du signal d'entrée.

Asymptote décroissante

Pour $\omega >> \omega_0$, le diagramme de Bode est une droite décroissante. On constate que la droite diminue de 20dB lorsque la fréquence augmente d'un facteur 10. On dit que la pente vaut **- 20 dB par décade**.

Pour $\omega >> \omega_0$ on a :

$$\underline{H}(\omega) \approx 1/(j\omega/\omega_0)$$

soit

$$G_{dB} \approx -20\log(\omega/\omega_0)$$

Comme on trace G_{dB} en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$, on obtient bien une droite descendante.

▶ **(Pour aller plus loin) Effet intégrateur**

On considère un signal périodique de pulsation $\omega \gg \omega_0$.

Dans ce cas, on a $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \approx \dfrac{\omega_0}{j\omega}$

Ainsi, on a

$$\underline{s} = \omega_0 \frac{\underline{e}}{j\omega}$$

On reconnaît la forme de l'intégration en RSF. En revenant en notation temporelle, on a

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_0 e(t) \text{ soit } s(t) = \omega_0 \int e(t)\mathrm{d}t$$

Propriété. Intégrateur
Un signal périodique de pulsation fondamentale ω filtré par un filtre passe-bas d'ordre 1 de pulsation de coupure ω_0 telle que $\omega_0 << \omega$ donne un signal de sortie $\underline{s}(t)$:

$$\underline{s}(t) = \omega_0 \frac{\underline{e}(t)}{j\omega}$$

Le signal d'entrée est **intégré**.

2.5 Notion de bande passante

Définition. Bande passante
Une pulsation est dans la bande passante d'un filtre si :

$$|H(\omega)| > \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Au niveau du gain en décibel :

$$G(\omega) = 20 \log |H(\omega)| > 20 \log \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = 20 \log H_{\max} - 10 \log 2 \ .$$

Numériquement, on a $10 \log 2 \approx 3$, soit :

$$G(\omega) > G_{\max} - 3 \text{ dB}$$

Propriété. Bande passante
La **bande passante d'un filtre** est l'ensemble des pulsations tels que le gain soit compris entre le gain maximal $G_{\max}$ et $G_{\max}-$ 3 dB.

Pour le filtre RC, la bande passante est donnée pour $\omega < \omega_0$.

3 Théorie générale du filtrage linéaire

3.1 Réponse d'un filtre linéaire

Définition. Filtre linéaire passif
Un filtre est linéaire s'il est composé uniquement de composants linéaires et passifs (résistances, condensateurs et bobines).

On exclue tout composant actifs (générateur, ampli, ...) et non-linéaire (diode).

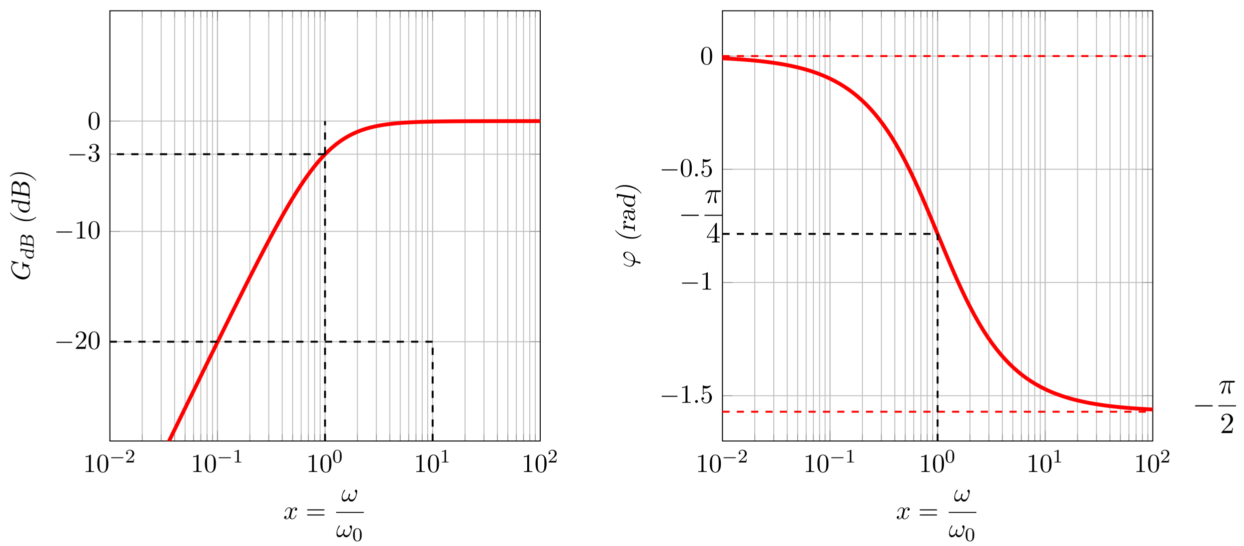
Propriété. Filtrage linéaire d'un signal
Si un signal d'entrée $e(t)$ d'un filtre linéaire s'écrit comme :

$$e(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

alors le signal de sortie $s(t)$ sera :

$$s(t) = A_1 G(\omega_1) \cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) + A_2 G(\omega_2) \cos(\omega_2 t + \varphi(\omega_2))$$

On peut généraliser cette propriété à une somme quelconque de signaux sinusoïdaux.

> **Exemple 2 :** *Un filtre linéaire possède le diagramme de Bode suivant, avec comme fréquence propre $\omega_0 = 100Hz$:*
>
> 
>
>
> 1. *Donner le comportement du filtre : passe-bas, passe-haut, passe-bande, exclue-bande.*
> 2. *On envoie en entrée du filtre le signal $e(t)$ suivant :*
>
> $$e(t) = 2\cos(30t) + \frac{2}{3}\cos(100t + \pi/3) + \cos(2000t)$$
>
> *Donner le signal de sortie $s(t)$*

CORRECTION

1. Le gain en décibel (et donc le gain) est très faible à basses fréquences et élevé à hautes fréquences : c'est un passe-haut.
2. **Principe du filtrage linéaire :** on va filtrer séparément chaque signal sinusoïdal, en utilisant sa fréquence.

$$A_0 \cos(\omega t + \phi) \;\rightarrow\; A_0 G[\omega] \cos(\omega t + \phi + \varphi[\omega])$$

Ici :

$$e(t) = \underbrace{2\cos(30t)}_{\text{pulsation 30rad/s}} + \underbrace{\frac{2}{3}\cos(100t+\pi/3)}_{\text{pulsation 100rad/s}} + \underbrace{\cos(2000t}_{\text{pulsation 2000rad/s}}$$

On exprime chacune des pulsation en fonction de ω_0 et on trouve alors :

$$s(t) = 2G\left[\frac{1}{3}\right]\cos(30t+\varphi\left[\frac{1}{3}\right]) + \frac{2}{3}G[1]\cos(\omega_0 t+\pi/3\varphi[1]) + G[20]\cos(2\omega_0 t+\varphi[20]$$

On mesure à chaque fois sur le graphe φ et **Attention !** G_{dB} (pas G !!!)

$$\text{lien } G - G_{dB} \ : \ G_{dB} = 20\log G \ \Rightarrow \ G = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$$

3.2 Représentation de Fourier d'un signal périodique

Théorème. Théorème de Fourier
Tout signal périodique de fréquence f_0 se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences $f_n = nf_0$.

▶ Décomposition d'un signal

Ainsi, un signal $s(t)$ de fréquence f_0 s'écrit

$$s(t) = c_0 + c_1\cos(2\pi f_0 t+\varphi_1) + c_2\cos(4\pi f_0 t+\varphi_2) + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\cos(2\pi n f_0 t+\varphi_n)$$

- c_0 la valeur moyenne du signal
- la fréquence f_0 est le fondamentale, d'amplitude associée c_1
- les autres fréquences qui apparaissent $(2f_0, 3f_0, 4f_0, ...)$ sont appelés des harmoniques.
- les différentes valeurs des amplitudes des harmoniques c_n caractérisent le signal

Exemple 3 : Signal créneau de fréquence f_0 :

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t-\pi) + \frac{1}{3}\cos(6\pi f_0 t-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5}\cos(10\pi f_0 t-\frac{\pi}{2}) + ... = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n}\cos(2\pi n f_0 t-\frac{\pi}{2})$$

En calculant plus en plus de terme, le signal $s(t)$ tend vers un signal créneau.

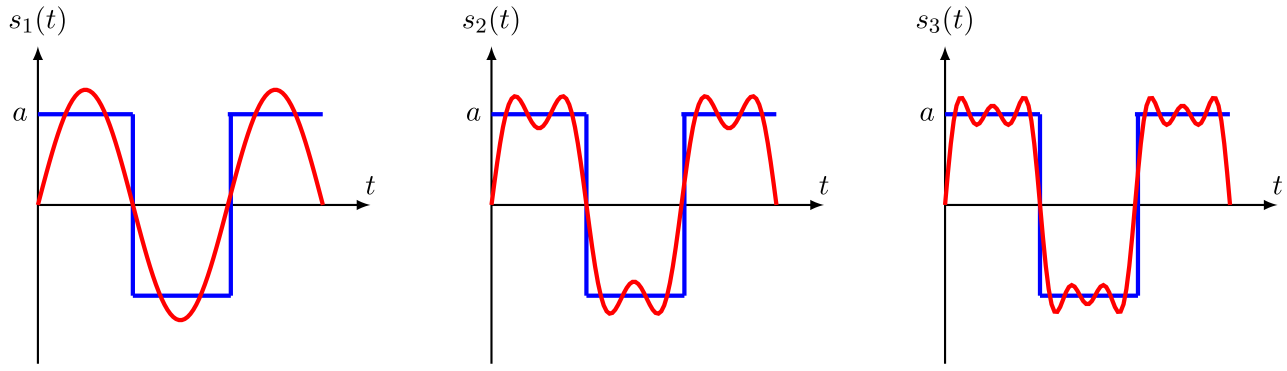


Fig. 3 – Décomposition de Fourier d'un créneau avec les premières harmoniques

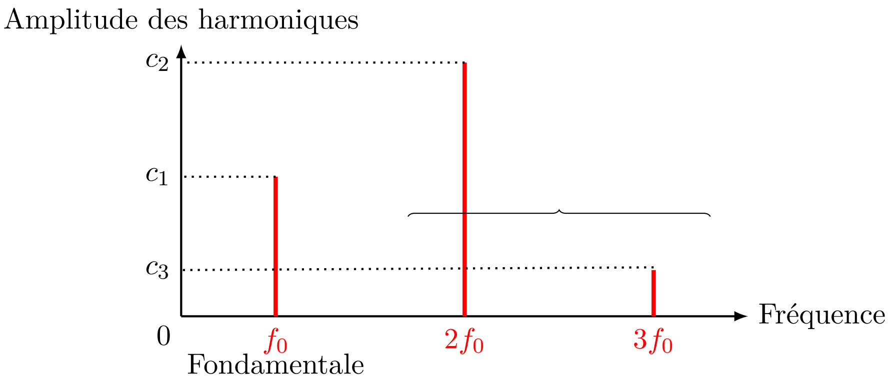
▶ Spectre d'un signal

Pour représenter un signal périodique, plutôt que d'écrire toute la décomposition de Fourier, on peut représenter son spectre.

Définition. Spectre d'un signal Le spectre d'un signal est sa représentation graphique de sa décomposition de Fourier. On représente sur un graphe :

- ▷ en abscisse les différentes valeurs des harmoniques f_n
- ▷ en ordonnées les amplitudes c_n associés

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$



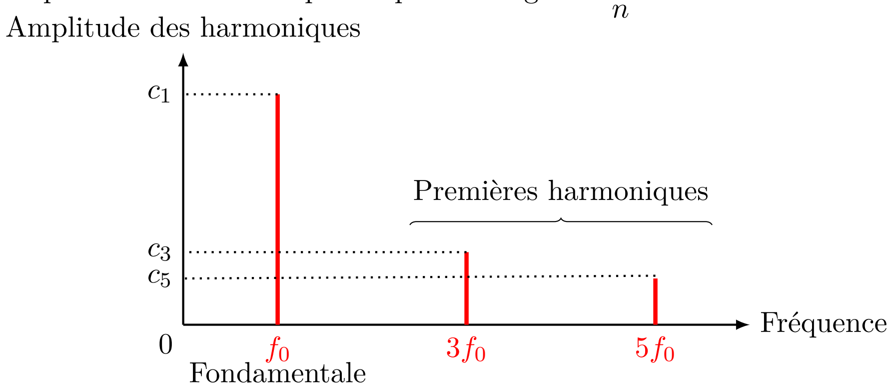
Exemple 4 : On considère le signal créneau $e(t)$ de période $T = 2s$:

$$e(t) = e_0 + \sum_{n \text{ impair}} \frac{e_0}{n} \cos(2\pi n f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

avec $e_0 = 2V$.

1. *Donner f_0 et représenter $e(t)$*
2. *Donner le spectre de $e(t)$*
3. *Ce signal créneau sert d'entrée à un filtre passe bas de pulsation propre $\omega_0 = 10^{-2}$rad.Hz. Donner le signal de sortie.*

- ▷ toutes les harmoniques pairs ont une amplitude nulle
- ▷ l'amplitude des harmoniques impairs est égale à $\dfrac{1}{n}$

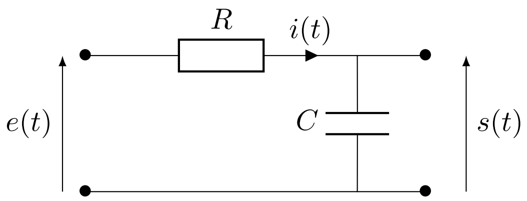


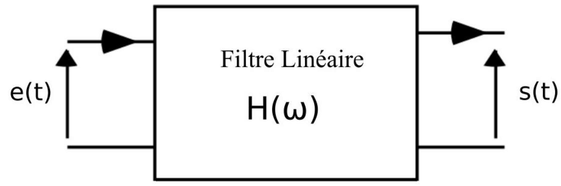
3.3 Filtrage linéaire d'un signal périodique quelconque

▶ 0) Filtre et quadripôle

Un **filtre linéaire** est un quadripôle qui permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence d'un signal d'entrée $e(t)$.

Un filtre est caractérisée par sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$.
Exemple de filtre passe-bas d'ordre 1.





▶ 1) Étude fréquentielle

Objectif :
obtenir le gain $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$ et le déphasage $\varphi(\omega) = \arg[\underline{H}(\omega)]$ (diagramme de Bode).

Mise en place :

- ▷ toujours faire rapidement une étude asymptotique ($\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$) pour connaître la nature du filtre.
- ▷ on se place en RSF, à l'aide d'association d'impédances et de ponts diviseurs on trouve $\underline{H}(\omega)$ via sa définition
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$
avec $e(t)$ un signal sinusoïdal de pulsation ω quelconque.

▶ 2) Réponse à un signal d'entrée quelconque

Objectif : trouver $s(t)$ sachant $e(t)$, un signal périodique quelconque

Mise en place :

1. on décompose $e(t)$ suivant ses harmoniques $\omega, 2\omega, 3\omega, ...$ (étudier son spectre)
2. à l'aide du diagramme de Bode, on applique la réponse du filtre à chaque composante du spectre de Fourier du signal $e(t)$.
$$e(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + A_3 ...$$
$$\downarrow$$
$$s(t) = A_1 G(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + A_2 G(2\omega) \cos(2\omega t + \varphi(2\omega)) + A_3 G(3\omega) ...$$

▶ Nature des filtres

▶ Le filtrage dans la vie de tous les jours

Les utilités du filtrage sont multiples, on peut par exemple citer :

- ▷ la sélection de fréquence (radio) ;
- ▷ l'annulation de la composante continue (augmentation du contraste) ;
- ▷ augmenter ou baisser certaines composantes fréquentielles (« augmenter les basses » en audio)...

Le filtrage est une des bases de l'électronique de commande moderne.

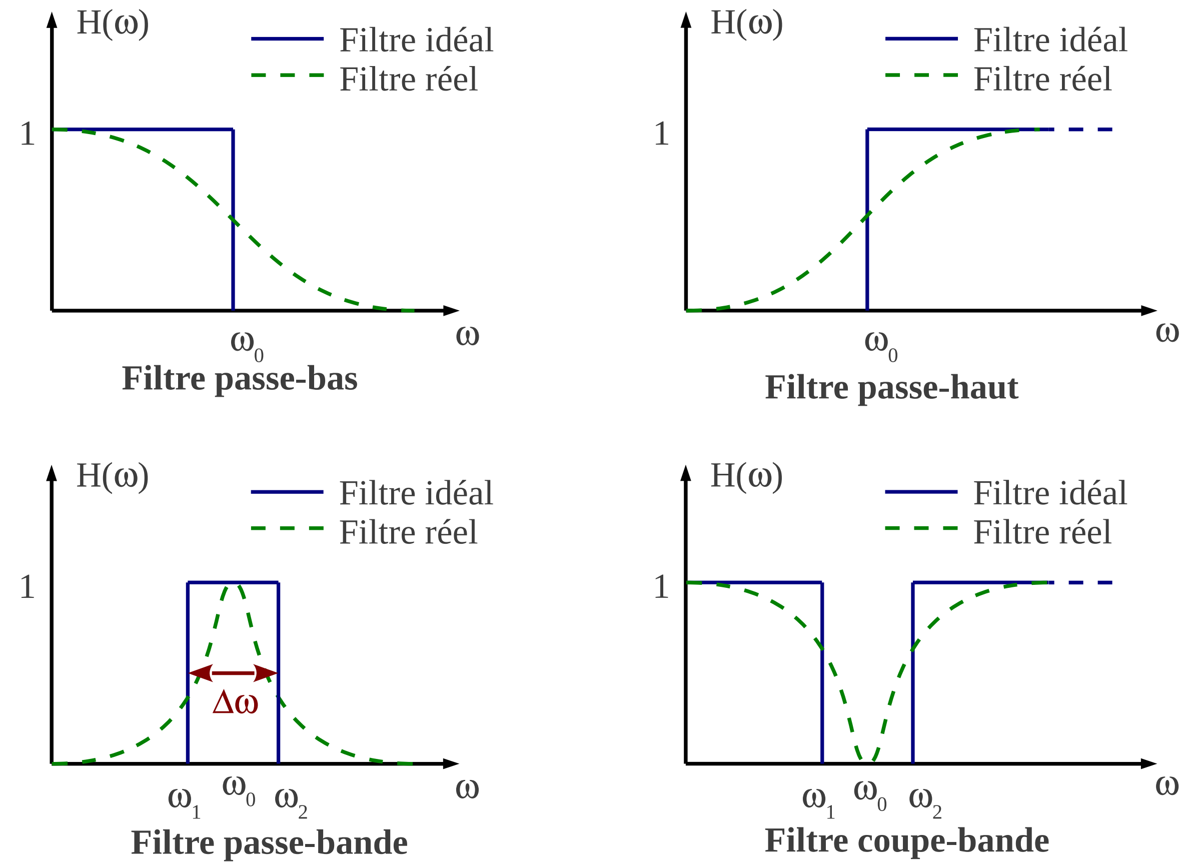


Fig. 4 – Différents types de filtres : Passe-bas et passe-haut ; passe-bande et coupe bande. Dans le cas idéal, la bande passante correspond à l'intervalle de pulsation sur lequel le module $H(\omega)$ est non nul.

4 Applications : étude de filtre

4.1 Le filtre passe-haut du premier ordre

Un **filtre passe-haut** coupe les basses fréquences et n'agit pas sur les hautes fréquences.

Application 3 :

Les façon de réaliser un filtre passe-haut sont nombreuses. Nous allons chercher le moyen d'en construire un à l'aide d'une résistance R et d'une bobine L.

1. *Représenter le circuit électrique des deux quadripôle qu'il est possible de réaliser avec une résistance et une bobine.*
   On représentera les tension d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$.
2. *En étudiant le comportement asymptotique à haute et basse fréquence des deux filtres, déterminer celui qui joue le rôle d'un filtre passe haut.*
3. *Montrer que la fonction de transfert du filtre passe-haut obtenu précédemment peut s'écrire sous la forme :*
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = K\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$
   On introduira la pulsation caractéristique du filtre ω_0.
4. *Montrer que pour des pulsation $\omega << \omega_0$, le filtre a un effet dérivateur.*

   On considère le signal d'entrée $e(t) = 2e_0\cos(\omega_1 t) + 3e_0\cos(\omega_2 t) + e_0\cos(\omega_3 t)$ avec $e_0 = 1V$, $\omega_1 = \omega_0/10$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_2 = 10\omega_0$.
5. *Représenter le spectre du signal $e(t)$.*

6. Donner le signal de sortie $s(t)$ et représenter son spectre.

Les façon de réaliser un filtre passe-haut sont nombreuses. Nous allons chercher le moyen d'en construire un à l'aide d'une résistance R et d'une bobine L.

On peut réaliser deux quadripôles différents :

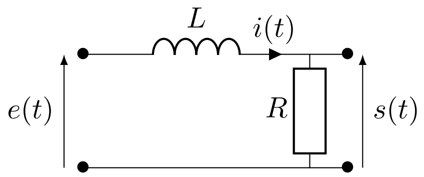


Fig. 5 – Quadripôle 1

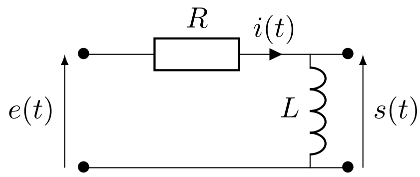


Fig. 6 – Quadripôle 2

2) Analyse fréquentielle :

- ▷ aux « basses fréquences », une bobine est un fil
- ▷ aux « hautes fréquences », une bobine est un interrupteur ouvert

Par conséquent :

- ▷ **quadripôle 1 :**
  - ▷ basse fréquence : $s(t) = e(t)$
  - ▷ haute fréquence : $s(t) = 0$
- ▷ **quadripôle 2 :**
  - ▷ basse fréquence : $s(t) = 0$
  - ▷ haute fréquence : $s(t) = e(t)$

On garde donc le filtre 2.

3) Obtention de la fonction de transfert

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}}\underline{e}$$

Donc :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

On a ici $\boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$. Ici, $K = 1$.

4) Effet dérivateur

pour $\omega << \omega_0$, on a :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} \approx j\frac{\omega}{\omega_0}$$

Ainsi, on a $\underline{s} = j\dfrac{\omega}{\omega_0}\underline{e}$.

En revenant en notation temporelle, on a $\omega_0 s(t) = \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$.

▶ Propriété d'un filtre passe haut du premier ordre

Propriété. La **fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre** est

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = K\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

avec ω_0 la **pulsation de coupure du filtre** et K une constante.

Propriété. Dérivateur
Un signal périodique de pulsation fondamentale ω filtré par un filtre passe-haut d'ordre 1 de pulsation de coupure ω_0 telle que $\omega_0 \gg \omega$ donne un signal de sortie $\underline{s}(t)$:

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{\omega_0}j\omega\underline{e}(t)$$

Le signal d'entrée est **dérivé**.

▶ Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode correspondant est tracé figure 7.

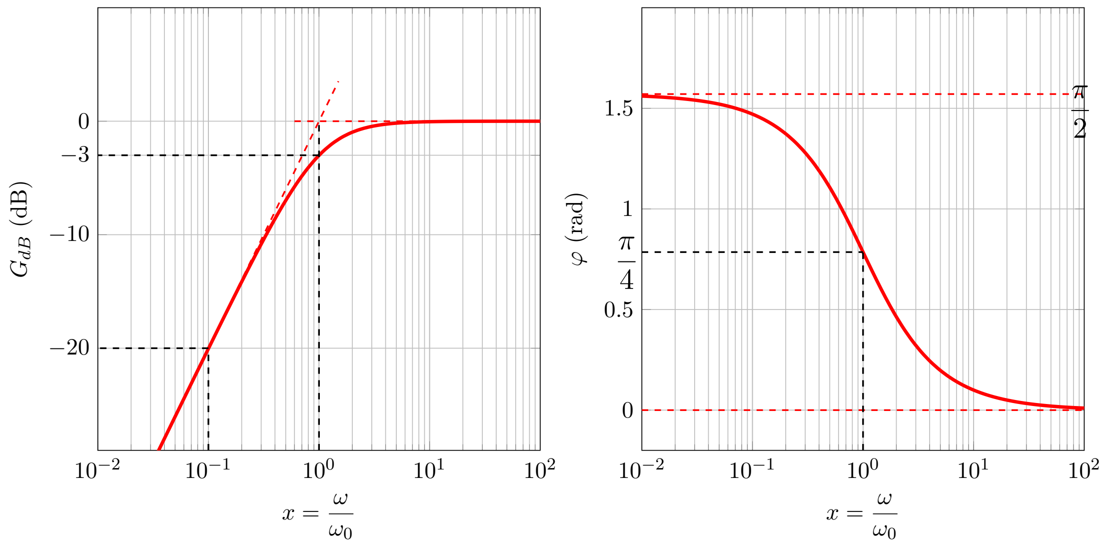


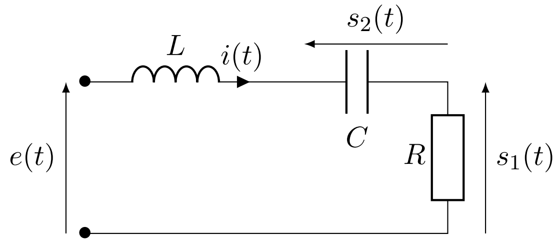
Fig. 7 – Diagramme de Bode du filtre passe-haut d'ordre 1

> ***Exemple 5 :*** *À l'aide de la fonction de transfert, justifier la valeur de la bande passante, le plateau aux hautes fréquences et la valeur de la pente aux basses fréquences.*

4.2 Deux filtres du second ordre

Cette partie est à travailler de façon autonome (comme un exercice). L'étude des diagrammes de Bode est complètement similaire à celle des amplitudes en tension et intensité du chapitre précédent.

Étudions maintenant le circuit RLC de la figure ci-contre. Selon la tension de sortie s_1 ou s_2 que nous étudierons, soit aux bornes du condensateur soit aux bornes de la résistance, le filtre sera soit passe-bas, soit passe-bande.



► Le filtre passe-bas du second ordre

On choisit de prendre comme tension de sortie la tension aux bornes du condensateur.

Etude du filtre

Application 4 :

1. *Par une étude asymptotique, vérifier que ce choix conduit bien à un filtre passe-bas.*
2. *Montrer que la fonction de transfert du filtre peut s'écrire sous la forme :*

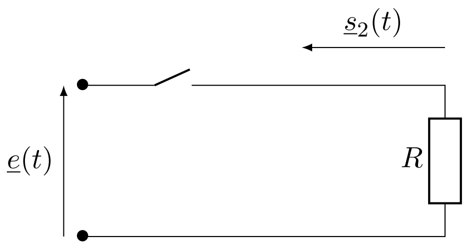
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

   On précisera la valeur de ω_0 et K.
3. *Donner l'ordre du filtre.*

CORRECTION

1. On remplace à Hautes Fréquences et Basses Fréquences les condensateurs et bobines

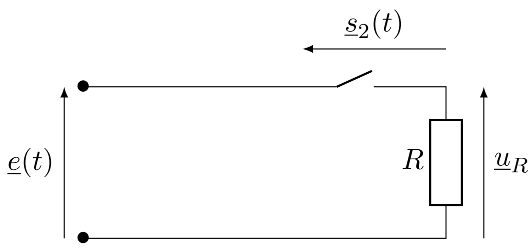
HF



Tension aux bornes d'un fil

$$\underline{s}_2 = 0$$

BF



Tension aux bornes d'un interrupteur ouvert ⇒ loi des mailles

$$\underline{e} = \underline{s}_2 + \underline{u}_R = \underline{s}_2$$

car pas de courant dans la résistance

On a bien un filtre passe-bas.

2. Pont diviseur de tension, en associant R et L :

$$\underline{s}_2 = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega}\underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}\underline{e}$$

On identifie : $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \dfrac{1}{Q\omega_0}$.

On a alors bien $\underline{H}(\omega) = \dfrac{K}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

3. On a un filtre d'ordre 2, car un polynôme d'ordre 2 au dénominateur.

Le diagramme de Bode

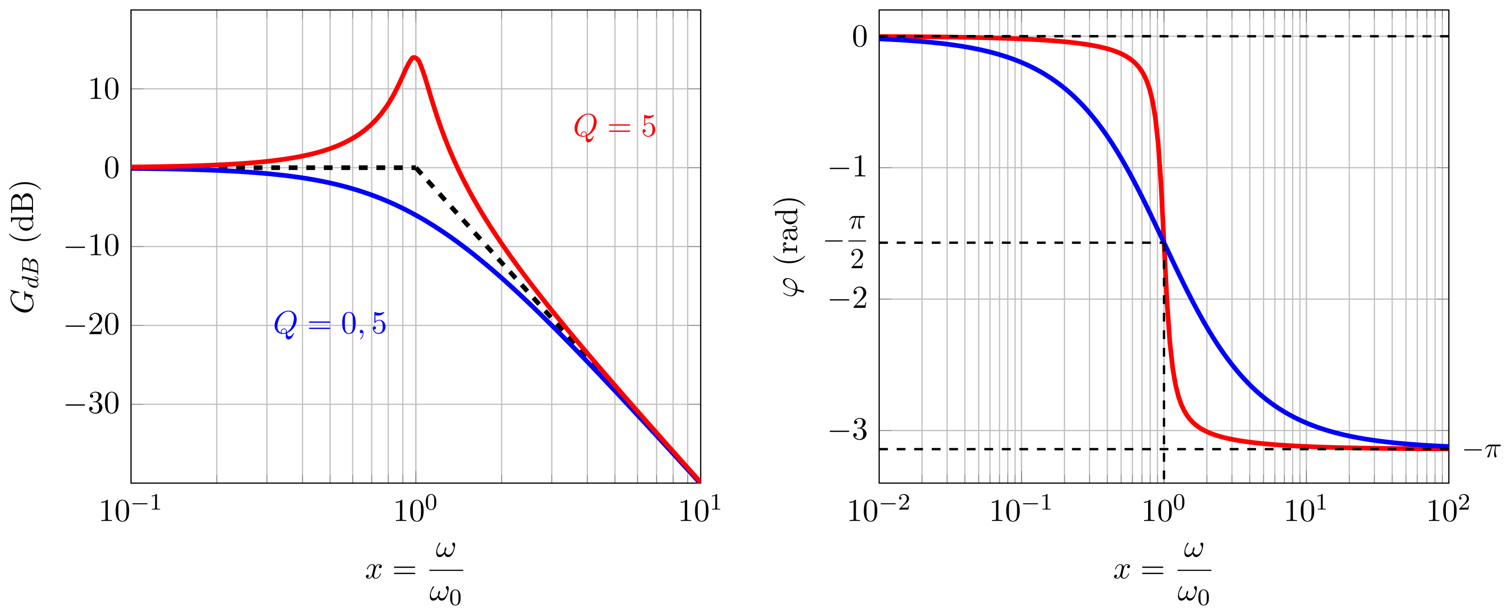


Fig. 8 – Diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 2.

> ***Application 5 :*** *A l'aide du diagramme de Bode, donner le signal en sortie $s(t)$ lorsque le signal en entrée $e(t)$ est de la forme :*
>
> $$e(t) = e_0\cos(\frac{\omega_0}{3}t) + 2e_0\cos(\omega_0 t) + \frac{e_0}{3}\cos(2\omega_0 t + \pi/2)$$
>
> *pour les cas $Q = 0.5$ et $Q = 5$.*

CORRECTION

Principe du filtrage linéaire : on va filtrer séparément chaque signal sinusoïdal, en utilisant sa fréquence.

$$A_0\cos(\omega t + \phi) \;\rightarrow\; A_0 G[\omega]\cos(\omega t + \phi + \varphi[\omega])$$

Ici :

$$e(t) = \underbrace{e_0\cos(\frac{\omega_0}{3}t)}_{\text{pulsation } \omega_0/3} + \underbrace{2e_0\cos(\omega_0 t)}_{\text{pulsation } \omega_0} + \underbrace{\frac{e_0}{3}\cos(2\omega_0 t + \pi/2)}_{\text{pulsation } 2\omega_0}$$

On a alors :

$$s(t) = e_0 G\left[\frac{1}{3}\right]\cos(\frac{\omega_0}{3}t + \varphi\left[\frac{1}{3}\right]) + 2e_0 G[1]\cos(\omega_0 t + \varphi[1]) + \frac{e_0}{3}G[2]\cos(2\omega_0 t + \pi/2 + \varphi[2])$$

On mesure à chaque fois sur le graphe φ et **Attention !** G_{dB} (pas G !!!)

$$\text{lien } G - G_{dB} \;:\; G_{dB} = 20\log G \;\Rightarrow\; G = 10^{\dfrac{G_{dB}}{20}}$$

Analyse du diagramme de Bode en gain

Astuce : l'analyse du diagramme en gain est similaire à l'étude des résonances en tension du chapitre précédent :

- ▷ existence d'un maximum pour $Q > 1/\sqrt{2}$
- ▷ amplitude de résonance plus importante à grand Q
- ▷ pulsation de résonance $\omega_r \simeq \omega_0$

Propriété. Bande passante

La bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est d'autant plus fine que Q est grand, plus elle est fine :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est fine, donc plus le filtre est sélectif : plus Q est grand, plus le filtre est de bonne qualité, d'où la dénomination de Q.

Analyse des asymptotes

On constate que l'asymptote du gain aux hautes fréquences est de **- 40 décibels par décade**. C'est une marque des filtres passe-bas (ou passe-haut) du second ordre. Cela se justifie car, en hautes fréquences,

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \approx -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

donc :

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow |\underline{H}(\omega)| \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

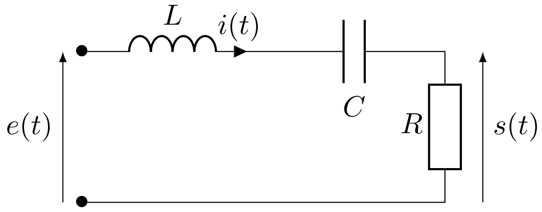
soit bien

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \approx 20\log\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = -40\log\frac{\omega}{\omega_0}$$

Cette pente plus forte permet de couper de façon plus efficace les hautes fréquences, le filtre d'ordre 2 est donc plus sélectif qu'un filtre d'ordre 1.

▶ Le filtre passe-bande du second ordre

Un **filtre passe-bande** coupe les basses fréquences et les hautes fréquences mais n'agit pas sur une bande de fréquences intermédiaires. Il s'agit de la **bande passante** du filtre.



Sur le montage, on choisit de prendre comme tension de sortie la tension aux bornes de la résistance.

Etude fréquentielle

Application 6 :

1. *Par une étude asymptotique, vérifier que ce choix conduit bien à un filtre passe-bande.*
2. *Montrer que la fonction de transfert du filtre peut s'écrire sous la forme :*

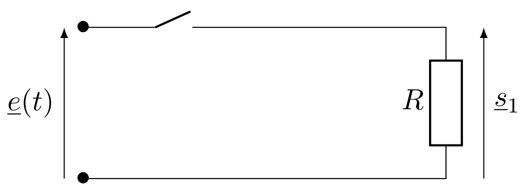
$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{K}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

   On précisera la valeur de ω_0 et K.
3. *Donner l'ordre du filtre.*

CORRECTION

1. On remplace à Hautes Fréquences et Basses Fréquences les condensateurs et bobines

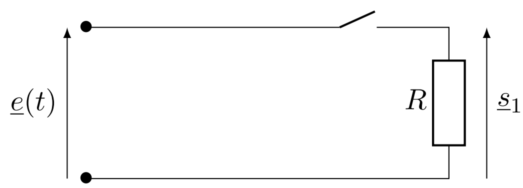
HF



Tension aux bornes d'une résistance sans courant

$$\underline{s}_1 = 0$$

BF



Tension aux bornes d'une résistance sans courant

$$\underline{s}_1 = 0$$

On a bien un filtre passe-bande (*ou un passe rien mais non étudié ici*).

2. Pont diviseur de tension, en associant C et L :

$$\underline{s}_2 = \frac{R}{\dfrac{1}{jC\omega} + R + jL\omega}\underline{e}$$

On simplifie par R (*ancre*) et on trouve :

$$\underline{s}_2 = \frac{1}{-j\dfrac{1}{RC\omega} + 1 + j\dfrac{L}{R}\omega}\underline{e}$$

On identifie : $\dfrac{1}{RC} = Q\omega_0$ et $\dfrac{L}{R} = \dfrac{Q}{\omega_0}$.

3. **Attention !** Dans la forme canonique, on n'a pas un polynôme ! Il faut multiplier par ω le numérateur et dénominateur et on trouve un polynôme d'ordre 2 au dénominateur. L'ordre du filtre est donc 2.

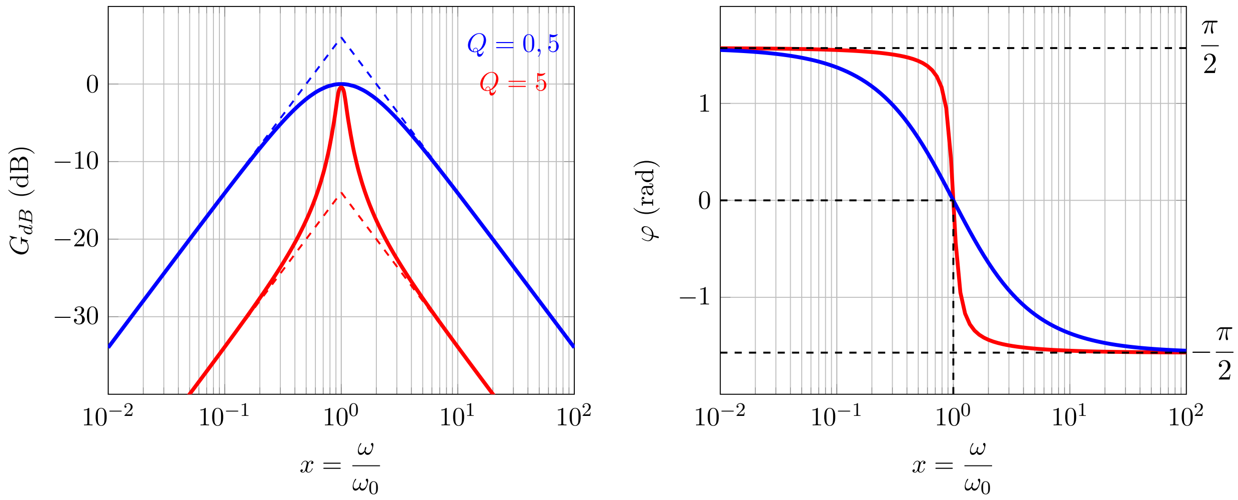


Fig. 9 – Diagramme de Bode du filtre passe-bande d'ordre 2

Le diagramme de Bode

Astuce : l'analyse du diagramme en gain est similaire à l'étude des résonances en tension du chapitre précédent :
- ▷ toujours existence d'un maximum
- ▷ amplitude de résonance indépendante de Q
- ▷ pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0$

Propriété. Bande passante
La bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est d'autant plus fine que Q est grand, plus elle est fine :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est fine, donc plus le filtre est sélectif : plus Q est grand, plus le filtre est de bonne qualité, d'où la dénomination de Q.

Application 7 :
1. *À l'aide de la figure, déterminer la bande passante et vérifier les valeurs du facteur de qualité annoncées.*
2. *Exprimer les pentes des deux asymptotes, aux hautes et basses fréquences.*
3. *Existe-t-il des effets dérivateurs ou intégrateurs avec ce filtre ?*

CORRECTION

1. Bande passante :
   - ▷ avec le gain : $G[\omega] > G_{max}/2$
   - ▷ avec le gain en décibel : $G_{dB}[\omega] > G_{dB,max} - 3$

   On mesure les deux bornes ω_1 et ω_2 telle que $G_{dB}[\omega_1] = G_{dB,max} - 3dB = 0 - 3$.
   La largeur de la bande passante $\Delta\omega$ est :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} =$$

2. **Trouver les pentes :** on simplifie la fonction de transfert $\underline{H}$ à HF et BF puis on calcule G et G_{dB} !

   ▷ Hautes Fréquences : $\underline{H} \simeq \dfrac{K}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)} \simeq \dfrac{K}{jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)} = \dfrac{-jK\omega_0}{Q\omega}$

   Donc : $G = \dfrac{K\omega_0}{Q\omega}$ et $G_{dB} = 20\log\left[\dfrac{K\omega_0}{Q\omega}\right]$.
   On sépare les constantes et les ω/ω_0 via $\log a \times b = \log a + \log b$

$$G_{dB} = 20\log\frac{K}{Q} + 20\log\frac{\omega_0}{\omega}$$

On écrit le gain en décibel sous la forme

$$G_{dB} = 20\log \text{ constante } \pm \alpha \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

La pente est alors de $\pm\alpha$dB/dec. Ici :

$$G_{dB} = 20\log\frac{K}{Q} - 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$$

On trouve alors un pente de -20dB/dec.

▷ Basses Fréquences : $\underline{H} \simeq \dfrac{K}{1+jQ\left(-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \simeq \dfrac{K}{-jQ\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \dfrac{jK\omega}{Q\omega_0}$

Donc $G_{dB} = 20\log\dfrac{K}{Q} + 20\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$. On trouve une pente de $+20$dB/dec.

3. **Effet dérivateur/intégrateur** : on récupère les expression de $\underline{H}$ en HF et BF et on identifie les effets dérivateurs ($\sim j\omega$) et les effets intégrateurs ($\sim 1/j\omega$).
   ▷ Hautes fréquences : $\underline{H} = \dfrac{-jK\omega_0}{Q\omega}$. On reconnaît un effet dérivateur.
   ▷ Basses Fréquences : $\underline{H} = \dfrac{jK\omega}{Q\omega_0}$. On reconnaît un effet intégrateur.

LES QUATRES FILTRES A CONNAITRE