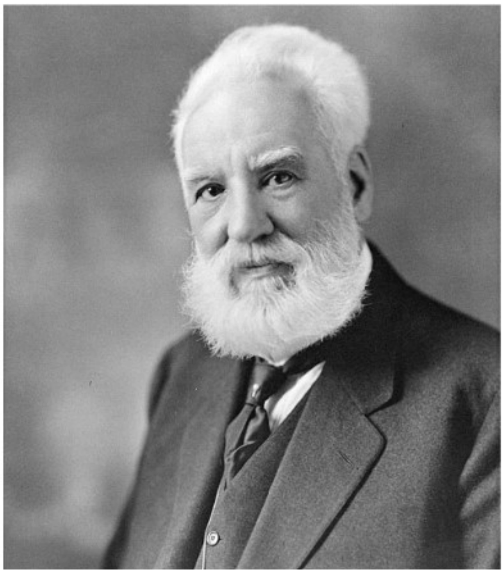
Chap XII

Ondes progressives et stationnaires

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ **Onde progressive**
  - forme mathématiques suivant la direction de propagation
  - notion de retard du à la propagation
  - célérité et vitesse de phase
  - lien avec la source émettrice

- ♡ **Onde progressive sinusoïdale**
  - forme mathématique de l'OPS
  - notion de phase
  - période spatiale et période temporelle
  - lien vecteur d'onde-pulsation et longueur d'onde-fréquence

- ♡ Notion de milieux absorbant et milieux dispersifs.
- ♡ **Onde stationnaire**
  - condition d'existence et forme mathématiques
  - notion de modes propres de vibration
  - nœuds et ventres de vibration ; écart entre deux ventres/deux nœuds successifs
  - notion de quantification et quantification des fréquences/longueurs d'onde

Savoir Faire

Propagation d'une onde

1. *A partir du signal émis par la source*
   - *représenter l'évolution temporelle à position fixée*
   - *représenter l'évolution spatiale à différents instants*
2. *Savoir passer d'une représentation spatiale à une représentation temporelle*

Onde progressive sinusoïdale

- *Établir à partir du signal source l'expression de l'onde dans tout l'espace*
- *Établir la relation entre la fréquence ; la longueur d'onde et la vitesse de phase*
- *Établir le déphasage entre deux ondes mesurées à deux endroits différents à l'aide du retard à la propagation*

Onde stationnaire

1. *A partir d'une forme proposée*
   - *utiliser les conditions aux limites pour trouver φ_n ; k_n et ω_n*
   - *établir la quantification des longueur d'ondes et des fréquences*
   -
2. *A l'aide de schémas :*
   - *Etablir la quantification des longueurs d'ondes*
   - *En déduire la quantification des fréquences*

1 Propagation d'un onde

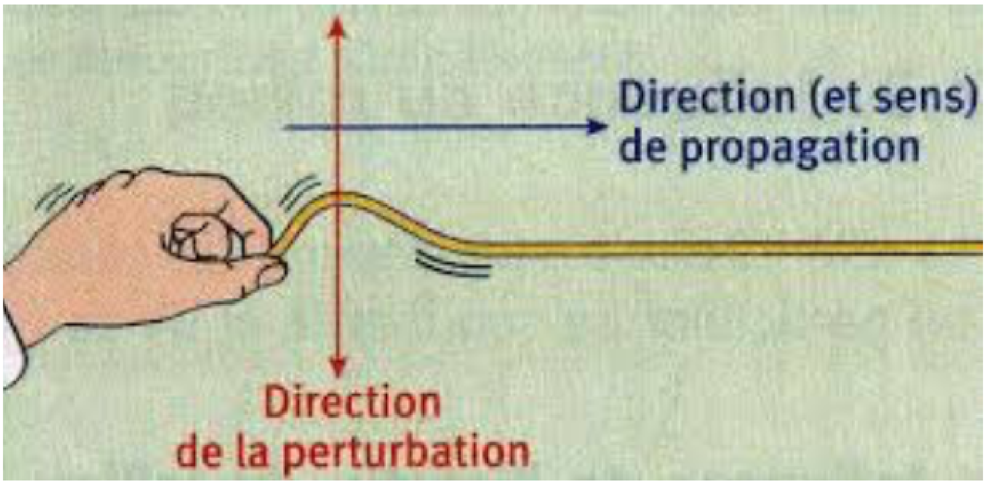
1.1 Ondes et milieux de propagations

▶ Qu'est-ce qu'une onde

Définition. Onde
Une onde est une perturbation locale d'une grandeur physique qui se propagation de proche en proche à une vitesse appelée célérité, notée c.

Par la suite on ne considèrera uniquement des ondes se propageant suivant une seule directions. On définit l'axe (Ox) comme l'axe suivant lequel l'onde se propage.

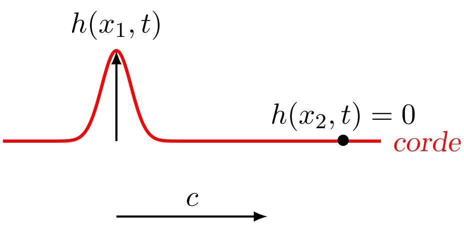
Exemple 1 : ***Onde sur une corde***



La perturbation créée par la main se propage le long de la corde. Elle dépend :
- ▷ *de l'espace : en chaque point de la corde, le déplacement de cette dernière varie*
- ▷ *du temps : à deux instants différents, le déplacement de la corde en un point n'est pas le même*

Propriété. Représentation mathématique d'une onde
Une onde unidirectionelle se propage suivant un axe (Ox). Elle est décrite mathématiquement par un **champ** $s(x,t)$ qui correspond
- ▷ à l'amplitude s de l'onde
- ▷ au point x de l'axe
- ▷ à l'instant t

Exemple 2 :



Si on étudie la propagation d'une perturbation le long d'une corde.
- ▷ *l'axe (Ox) est l'axe de la corde au repos*
- ▷ *la perturbation s est la hauteur de la corde, mesurée par rapport à sa position de repos, au point d'abscisse x à l'instant t : $s(x,t) = h(x,t)$*

Exemple d'onde et de signal

électrique	acoustique
intensité électrique i	surpression acoustique ΔP

vague/corde vibrante	électromagnétique/lumière
écart à la position d'équilibre h	champ électromagnétique $\{\vec{E},\vec{B}\}$

▶ Milieux de propagation

La propagation d'une onde dépend du milieu dans lequel elle se propage.

Définition. Absorbant et dispersif
Un milieu de propagation est
- ▷ **absorbant** si il y a une atténuation de l'onde au fur et à mesure qu'elle se propage ($\sim$ l'amplitude décroit)
- ▷ **dispersif** si il y a une déformation du profil de l'onde au fur et à mesure qu'elle se propage

On considèrera par la suite des milieu non absorbant et non dispersif.

Propriété. Propagation d'une onde dans un milieu non absorbant et non dispersif
Une onde se propage sans s'atténuer et sans se déformer : elle se retrouve alors un peu plus loin un peu plus tard.

1.2 Ondes progressives

▶ Définition et signal

Définition. Onde progressive
Une onde est dite progressive lorsque la perturbation initiale se déplace en moyenne dans une direction particulière.

Une onde progressive est généralement générée par une source situé sur l'axe.

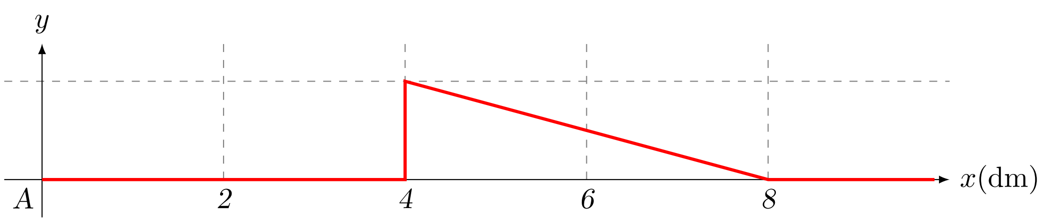
Propriété. Onde progressive et source
Une source placé en $x = x_S$ émet un signal $S_0(t)$. L'onde progressive générée au niveau de la source S est égal au signal émis :

$$s(x = x_S, t) = S_0(t)$$

▶ Représentation spatiale et propagation d'une onde

Définition. Représentation spatiale
On regarde à un **temps fixé** la perturbation dans **tout l'espace**. On fixe la variable temporelle au moment de la photo $t = t_{\text{photo}}$ et on trace l'onde en fonction de la variable spatiale x.

C'est comme prendre une photographie.

> *Exemple 3 : Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 100\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ vers les x croissants. À $t = 0$, le signal créé au point A débute.*
>
> 
>
>
> 1. *En utilisant la figure, déterminer*
>   - ▷ *le front ($\sim$ début) de l'onde*
>   - ▷ *l'instant correspondant à l'image*
>   - ▷ *la durée de la perturbation*
> 2. *Que représente la courbe rouge :*
>
> $$s(x,t)\ ;\ s(x=0,t)\ ;\ s(x,t=0,4)\ ;\ s(x,t=0)\ ;\ s(x=0;t=0,8)$$
>
> 3. *Représenter la corde à $t = 1\,\text{s}$.*

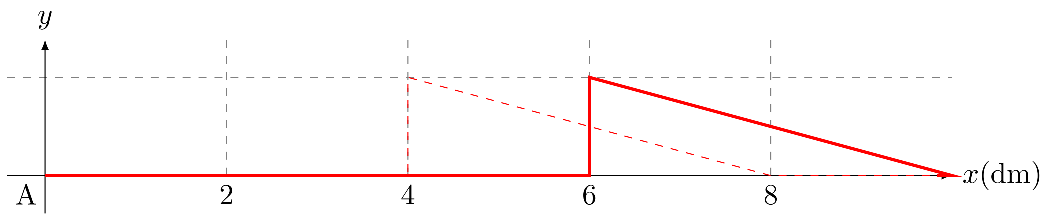
CORRECTION

1. ▷ Le front de l'onde est en $x = 0,8$m car l'onde se propage de la gauche vers la droite. (*si elle se propageait dans l'autre sens, le front serait en $x = 0,4m$)*)
   ▷ L'instant correspondant à l'image est $t = 0,8$s : le front de l'onde a parcouru 8dm à la vitesse $c = 1$m/s.
   ▷ La perturbation fait $8 - 4 = 4$dm de longueur. En se propageant à la vitesse $c = 1$m/s, elle dure $0,4/1 = 0,4$s.

2. On va étudier chacune des propositions
   ▷ $s(x, t)$: c'est la forme générale de l'onde en tout point x et à tout instant t. On ne peut la représenter sur un graphe (*ou alors il faudrait deux axes des abscisses*)
   ▷ $s(x = 0, t)$: c'est l'onde au niveau du point d'abscisse $x = 0$ à tout instant t. Sa représentation serait un graphe où l'axe des abscisses serait les temps t : c'est une représentation temporelle, $\sim$ un enregistrement.
   ▷ $s(x, t = 0,4)$: c'est l'onde à l'instant $t = 0,4$ en tout point de l'espace. C'est donc bien un représentation spatiale, $\sim$ une photographie, **MAIS** l'instant n'est pas bon.

   ▷ comme avant mais à l'instant $0,4$
   ▷ $s(x = 0, t = 0,8)$; c'est l'onde à l'instant $t = 0,8$au point $x = 0$. C'est un nombre, qui vaut ici 0.

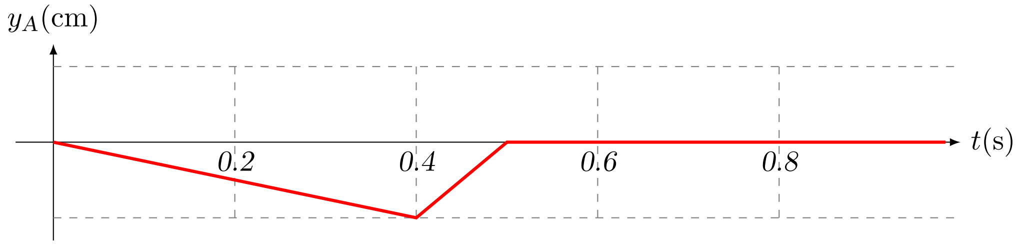
3. Pour représenter l'onde à $t = 1$s on se base sur la représentation qu'on a de l'onde à $t = 0,8$s. Entre les deux instant l'inde se propage de $(1 - 0,8) \times c$ mètres soit $0,2$m=2dm. On a juste a représenté le même graphe (milieu non-dispersif et non absorbant) mais décalé de 2dm vers la droite.



▶ Représentation temporelle

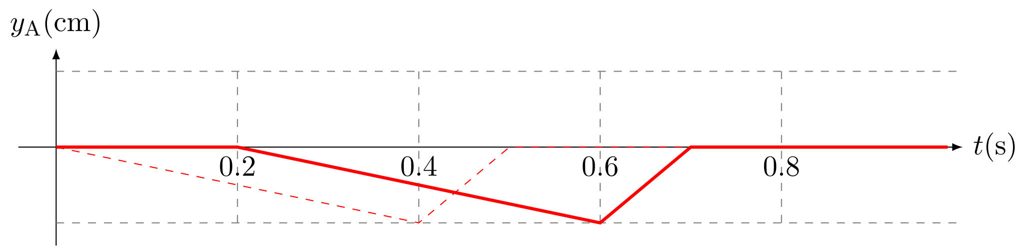
Définition. Représentation temporelle
On regarde à un **endroit fixé** la perturbation passer. On fixe la variable spatiale à la position du capteur $x = x_{\text{capteur}}$ et on trace l'onde en fonction de la variable temporelle t.

On se place à un endroit et on regarde l'onde passer.

> ***Exemple 4 :*** *Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 10\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ vers les x croissants. En $x = 0\text{m}$ (point A de la corde), on crée le signal représenté sur le schéma.*
>
> 
>
>
> 1. *Déterminer*
>   - ▷ *le début de la perturbation*
>   - ▷ *la durée*
>   - ▷ *la longueur de la perturbation*
> 2. *On place un capteur au point B $x_B = 2\text{cm}$. Tracer le signal mesuré en B au cours du temps $y_B(t)$.*

CORRECTION

1. ▷ **Attention !** sur un axe temporelle, le temps s'écoule toujours de gauche à droite : le début d'une perturbation **quelque soit son sens de propagation**, est "à gauche". (*c'est évident, mais on peut se tromper bêtement*).
   Début $t = 0\text{s}$
   ▷ L'onde dure entre 0s et $0,5\text{s}$ soit une durée de $0,5\text{s}$.
   ▷ Sa longueur est alors $0,5 \times c = 5\text{cm}$
2. Tout se qui est mesurée en A va être mesuré en B mais **avec un retard** τ correspondant au temps de propagation pour aller de $A \to B$ soit $(x_B - x_A)/c$ =0,2s.
   On retrace alors la même courbe (milieu non-dispersif et non absorbant) décalé de $0,2\text{s}$.

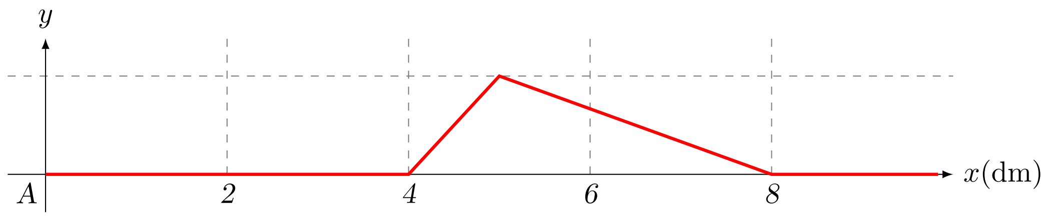


▶ (Pour aller plus loin) Changement de représentation

Il est parfois nécessaire de savoir passer d'une représentation spatiale à une représentation temporelle, et inversement.

Application 1 : ***Passage d'une représentation spatiale à une représentation temporelle***

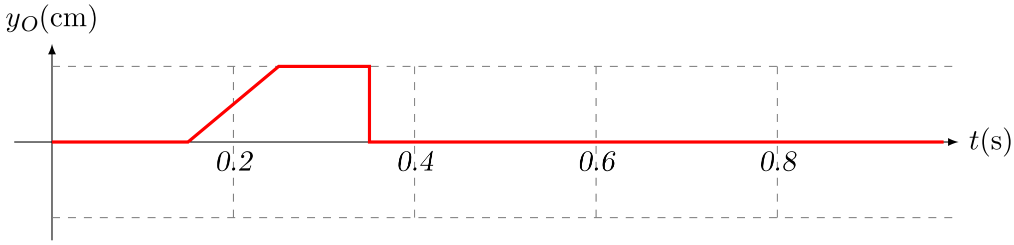
Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 100\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ *vers les* x *croissants. À* $t = 0$*, le signal créé au point* A *débute.*



Représenter le profil temporelle de l'onde au niveau de la source A*,* $x_A = 0$ *et du point* B $x_B = 8\mathrm{dm}$*.*

Application 2 : ***Passage d'une représentation temporelle à une représentation spatiale***

Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 10\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ *vers les* x *croissants. A l'origine* O *est créé un signal représenté sur le schéma suivant :*



Réaliser une représentation spatiale de la corde à $t = 2\mathrm{s}$ *et* $t = 4\mathrm{s}$*.*

1.3 Propagation d'une onde

▶ Cas d'une propagation suivant les x croissant

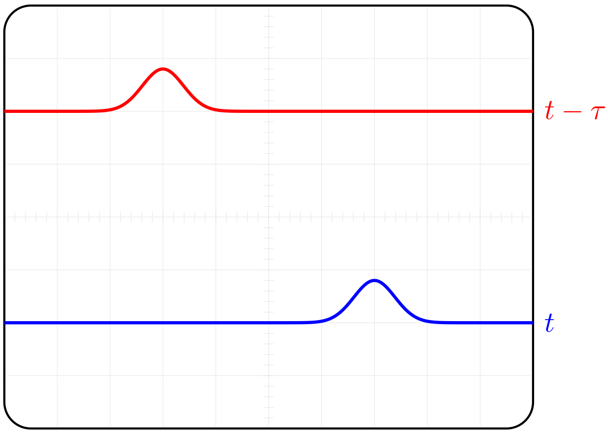
On étudie une onde générée par une source située en x_0 créant un signal $\mathcal{S}(t)$. L'onde se déplace suivant les x croissant à la célérité c.

L'onde qu'on va mesurer au point x sera la même que celle émise au point S_0 mais mesuré avec un retard τ :

$$s(x,t) = s(x_0, t-\tau)$$

Ce retard temporel τ représente le temps qu'a mis l'onde pour aller de la source, situé au point x_0, au point M, abscisse x. Donc :

$$\tau = \frac{x - x_0}{c}$$



Ainsi : $s(x,t) = s(x_0, t - \dfrac{x-x_0}{c})$.

Méthode en DS. Propagation d'une onde
Pour trouver l'expression d'une onde dans tout l'espace, on propage l'onde depuis un point où on connait son expression, typiquement la source.

On prend comme référence la source S_0 située en x_0 on trouve finalement que

$$s(x,t) = s(0, t - \frac{x-x_0}{c})$$

Or l'onde au niveau de la source est égal au signal émis $s(0,t) = \mathcal{S}(t)$. Donc :

$$s(x,t) = s(0, t - \frac{x-x_0}{c}) = \mathcal{S}(t - \frac{x-x_0}{c})$$

Le signal s'écrit bien sous la forme d'une onde progressive qui se propage selon les x croissant.

Attention ! Pour ne pas écrire d'horreurs comme $t - cx$ ou $x - \dfrac{t}{c}$
$\Rightarrow$ l'HOMOGENEITE homogénéité homogeneity Homogenität est notre meilleur outil!!!

▶ Cas d'une propagation suivant les x décroissant

On suppose désormais que l'onde se propage suivant les x décroissant.

Le raisonnement reste le même sauf que le retard temporel sera désormais $\dfrac{x_0 - x}{c}$.
Astuce pratique : l'intérêt du retard temporel est qu'il est **toujours** positif. Pour ne pas se tromper quand on exprime τ on fait un **SCHEMA** de la situation.

Ainsi : $s(x,t) = s(x_0, t-\tau) = s(x_0, t - \dfrac{x_0 - x}{c})$.
Dans notre cas on a :$s(x,t) = s(x_0, t - \dfrac{x_0-x}{c}) = \mathcal{S}(t - \dfrac{x_0 - x}{c})$

$$s(x,t) = \mathcal{S}(t + \frac{x}{c} - \frac{x_0}{c})$$

Comme x_0/c est une constante., on retrouve bien la forme d'une onde progressive qui se propage selon les x décroissant.

Propriété. Propagation d'une onde progressive
On considère une onde progressive se propageant suivant le sens des x. Les signaux mesurés entre deux points d'abscisses x_0 et x sont liés par :

$$s(x,t) = s(x_0, t - \tau)$$

La grandeur τ est appelé retard temporel. C'est le temps que met l'onde pour aller du point x_0 au point x :

$$\tau = \frac{|x - x_0|}{c}$$

Suivant le sens de propagation de l'onde $\tau = (x - x_0)/c$ ou $\tau = (x_0 - x)/c$.

Propriété. Forme mathématique
Une onde progressive se propageant à la célérité c selon un axe (Ox) est de la forme :
- ▷ si elle se déplace dans le sens des x croissant : $s(x,t) = f(x - ct) = F(t - x/c)$
- ▷ si elle se déplace dans le sens des x décroissant : $s(x,t) = f(x + ct) = F(t + x/c)$

Attention ! Cette propriété sert à étudier la direction de propagation de l'onde une fois l'expression du signal obtenu.

> *Application 3 : Dans un canal d'axe (Ox), je tape la surface de l'eau au point d'abscisse $x = 0$ créant une perturbation. La hauteur d'eau au niveau de mon doigt est :*
>
> $$h(t) = H_0 + h_0 \exp\left[-\frac{t^2}{\tau^2}\right]$$
>
> *avec H_0 la profondeur du canal au repose, $h_0 = 10\text{cm}$ et $\tau = 1\text{s}$.*
> *Il se crée alors à la surface de l'eau une onde $s_1(x,t)$ qui se propage suivant les x croissant à la célérité $c = \sqrt{gH_0}$.*
>
> *Donner l'expression de l'onde $s_1(x,t)$ en tout point et à tout instant.*

2 Ondes progressives sinusoïdales

Une onde progressive sinusoïdale est une onde générée par un signal $\mathcal{S}$ sinusoïdale : $\mathcal{S}(t) = S_0 \cos \omega t$.

2.1 Propagation d'une onde sinusoïdale

> **Exemple 5 :** *L'extrémité M_0 d'une corde infiniment longue , choisit comme origine de l'axe (Ox), est agitée sinusoïdalement. La position du point en M_0 s'écrit : $y_{M_0}(t) = A\cos(\omega t + \pi/2)$. On donne $T = 2s$.*
> *Au bout d'un temps très long, donner l'expression de l'élongation $y(x,t)$ de la corde pour tout instant et en chaque point.*

CORRECTION

Propagation de l'onde

l'onde à l'abscisse x et à l'instant t est liée à l'onde mesurée à l'origine $x = 0$ avec un retard du à la propagation

$$s(x,t) = s(0, t - \tau = \quad \text{avec } \tau = \frac{x-0}{c}$$

donc $s(x,t) = s(0, t - x/x$.

Onde générée au niveau de la source

au niveau de la source, l'onde est égale au signal émis : $s(0,t) = A_0 \cos \omega t + \pi/2$.

Expression de l'onde

finalement :

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega(t - x/c) + \pi/2\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \pi/2\right)$$

2.2 Caractéristiques d'une onde progressive sinusoïdale

Définition. Onde sinusoïdale progressive

Une onde progressive est dite **sinusoïdale** dans le cas où le signal émis par la source S_0 est de la forme $\mathcal{S}(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$.

▷ L'onde progressive sinusoïdale se propageant suivant les x croissant a pour expression :

$$s(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

▷ L'onde progressive sinusoïdale se propageant suivant les x décroissant a pour expression :

$$s(x,t) = A_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

ω et k sont deux réels positifs appelés pulsation et vecteur d'onde.

> **Expérience 1 :** *Un diapason est un instrument qui émet une note pure, c'est-à-dire que le signal sonore $\mathcal{S}$ émis est sinusoïdal de fréquence f donnée. L'onde acoustique générée est une onde progressive sinusoïdale.*

Attention ! Le signe devant k détermine la direction de propagation!!!

Propriété. Lien pulsation-célérité-vecteur d'onde

La pulsation ω d'une source émettant une onde sinusoïdale progressive, la célérité c de l'onde émise et son vecteur d'onde k sont liés par :

$$c = \frac{\omega}{k}$$

On appelle c la vitesse de phase, notée parfois v_φ.

Définition. Milieu dispersif

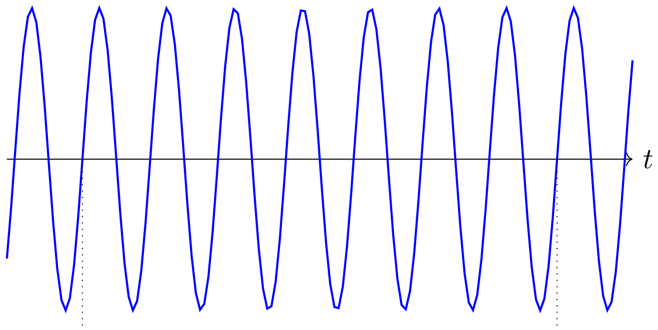
Un milieu est dit dispersif si la vitesse/vitesse de phase d'une onde sinusoïdale progressive dépend de la pulsation ω : $c = c(\omega)$.

Avec les mains :
milieu dispersif $\Rightarrow$ deux ondes de fréquence différente ne se déplace pas à la même vitesse.

2.3 Périodicité spatiale et périodicité temporelle

▶ Notion de périodicité spatiale

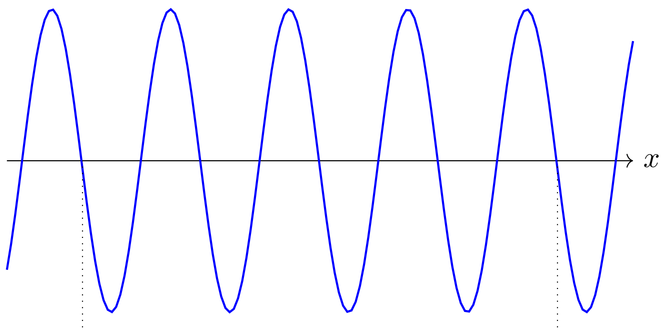
On réalise une représentation temporelle de l'onde sonore : on mesure en un point x quelconque l'évolution du signal s au cours du temps.



On mesure une période temporelle T. Cette dernière est relié à la fréquence du signal émis f, et donc ainsi qu'à la pulsation de l'onde ω :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Mais on peut réaliser également une représentation spatiale de l'onde : on prend un photographie de toute l'onde à un instant t donné.



Du fait de la forme de l'onde sinusoïdale on observe également une période mais spatiale cette fois ci : c'est la longueur d'onde, notée λ.

Astuce :
pour bien distinguer T et λ, on peut penser à la houle
- ▷ λ est l'écart entre deux vagues
- ▷ T est le temps entre le passage de deux vagues

▶ Lien entre λ et T

Trouver une période temporelle T :
On cherche le temps T telle que les instants t et $t+T$ donne au même point le même signal. On veut donc :

$$s(x,t) = s(x, t+T) \;\Rightarrow\; A\cos(\omega t \pm kx + \varphi) = A\cos(\omega(t+T) \pm kx + \varphi)$$

On a donc : $\omega T = 2\pi$ soit : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Comme $\omega = 2\pi f$, on a bien $T = \dfrac{1}{f}$.

Trouver une période spatiale λ :
On cherche la distance λ telle qu'aux points d'abscisses x et $x+\lambda$ on mesure en tout temps le même signal. On veut donc :

$$s(x,t) = s(x+\lambda, t) \;\Rightarrow\; A\cos(\omega t \pm kx + \varphi) = A\cos(\omega t \pm k(x+\lambda) + \varphi)$$

On a donc : $k\lambda = 2\pi$ soit : $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$. Or vecteur d'onde pulsation sont liés via la célérité de l'onde : $c = \dfrac{\omega}{k}$. On a alors :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}c = Tc$$

Propriété. Lien période spatiale λ et période temporelle T
La période spatiale et temporelle d'une onde progressive sinusoïdale sont liées :

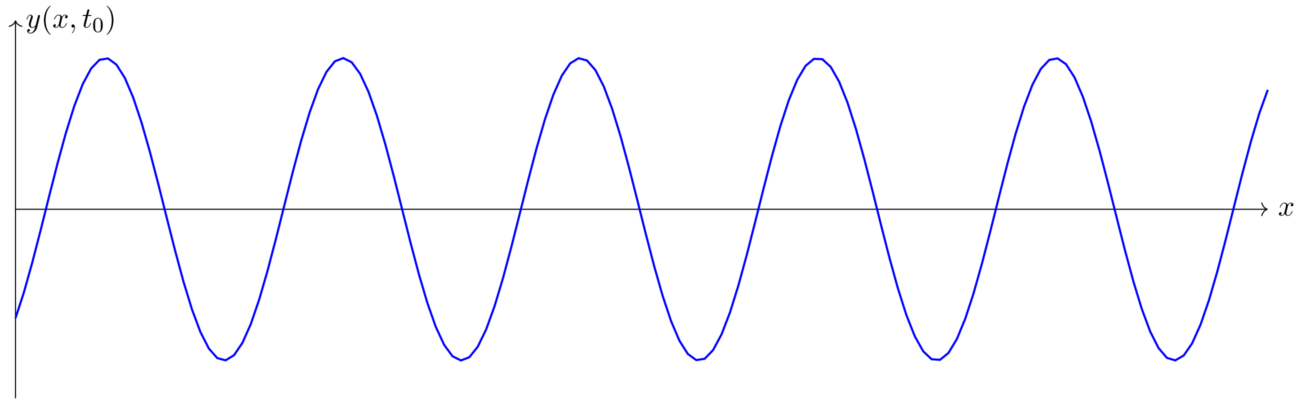
$$c = \frac{\lambda}{T}$$

Astuce :
on retrouve facilement cette relation à l'aide des dimensions.

Attention ! Ne pas tout confondre

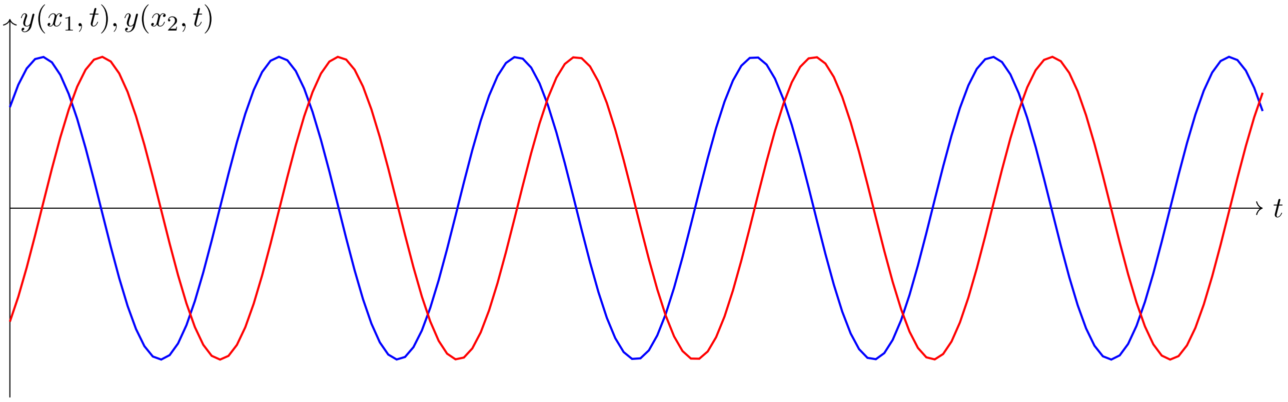
Relation temporelle :	Relation spatiale :	Relation spatio-temporelle :
$T \leftrightarrow f \leftrightarrow \omega$	$\lambda\,(\leftrightarrow \widetilde{v}) \leftrightarrow k$	$T \leftrightarrow k$
$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$	$\lambda = (\dfrac{1}{\widetilde{v}} =)\dfrac{2\pi}{k}$	$c = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{k}$

Application 4 :
L'extrémité M_0 d'une corde infiniment longue , choisit comme origine de l'axe (Ox) est agité sinusoïdalement. La position du point en M_0 s'écrit : $y_{M_0}(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. On donne $T = 0.5$s.
L'élongation se propage sans déformation dans la direction de l'axe (Ox) de la corde avec une vitesse de phase $v_\varphi = 50$cm/s.



1. *Donner l'expression de l'élongation $y(x, t)$ de la corde pour tout instant et en chaque point.*
2. *Donner la norme du vecteur d'onde en fonction de ω et v_φ.*
   En déduire l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de T et v_φ. Faire l'application numérique.
3. *Pour cette question seulement, on considère que le nombre d'onde k dépend de la pulsation ω selon : $k(\omega) = a\omega + b$.*
   - *Donner les dimensions de a et b*
   - *Donner l'expression de la vitesse de phase.*
   - *Entre deux ondes de fréquences f_1 et f_2, avec $f_1 < f_2$, laquelle de ces deux ondes se propagera le plus vite ?*

On considère deux points d'abscisses x_1 et $x_2 > x_1$. Les profils d'élongation au cours du temps aux abscisses x_1 et x_2 sont représentés ci-dessous.



4. *Lequel des deux signaux est en avance ? En déduire qui est le plus grand entre x_1 et x_2.*
5. *Donner l'expression du retard τ dû à la propagation entre le signal enregistré en x_2 et celui en x_1 en fonction de x_1, x_2 et v_φ.*
6. *En déduire l'expression du déphasage $\Delta\varphi$ du signal en x_1 par rapport au signal en x_2 en fonction de T, x_1, x_2 et v_φ.*
7. *Pour quelles distances d entre x_2 et x_1 le signal en x_2 est-il en phase avec le signal en x_1 ? Que vaut la plus petite de ces distances ?*
   Retrouver alors la relation entre λ et T.
8. *Pour quelles distances d entre x_2 et x_1 le signal en x_2 est-il en opposition de phase avec le signal en x_1 ?*

CORRECTION

1. On propage l'onde depuis le point M_0 d'abscisse x_0.

$$s(x,t) = s(x_0, t-\tau) \text{ avec } \tau = \frac{x-x_0}{v_\varphi} \text{ car } M_0 \to M$$

Donc $s(x,t) = A\cos\left(\omega(t-\tau)+\varphi\right) = A\cos\left(\omega t - \omega\dfrac{x-x_0}{v_\varphi} + \varpi\right)$.
On prend l'origine des axes en M_0, $x_0 = 0$ et donc :

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v_\varphi}x + \varpi\right)$$

2. On remarque alors par identification entre la forme obtenu (*cf ci-dessus*) et la forme canonique $\cos\omega t \pm kx + \Phi_0$ que
   - ▷ l'onde se propage suivant les x croissant, du au -
   - ▷ le vecteur d'onde est : $k = \omega/v_\varphi$

   Comme $k = 2\pi/\lambda$ et $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ on a $\lambda = v_\varphi T$.
3. ▷ par analyse dimensionnelle $[k] = [a][\omega]$ et $[k] = [b]$ donc $[a] = [k]/[\omega] = L^{-1}/T^{-1} = T/L$ et $[b] = L^{-1}$.
   ▷ la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$. Ici

$$v_\varphi = \frac{\omega}{a\omega+b} \text{ la vitesse dépend de la pulsation, le milieu est dispersif}$$

   ▷ On remarque que $v_\varphi[\omega]$ est une fonction croissante. Donc si $f_1 < f_2$ alors $\omega_1 < \omega_2$ et $v_\varphi[f_1] < v_\varphi[f_2]$. L'onde de fréquence f_2 se propagera plus vite.
4. Le signal bleu atteint ses maxima en premier : il est en avance de phase. Comme l'onde se propage suivant les x croissant alors elle passe d'abord en x_1 puis en x_2 donc $x_1 < x_2$.
5. Le retard est le temps de parcours de $x_1 \to x_2$ soit $\tau = \dfrac{x_2 - x_1}{v_\varphi}$.
6. tout comme on propage les signaux, on peut propager les phases :

$$\varphi(x_2,t) = \varphi(x_1, t-\tau) \text{ avec } \tau = \frac{x_2-x_1}{v_\varphi} \text{ (similaire à } s(x_2,t) = s(x_1,t-\tau))$$

donc $\varphi(x_2,t) = \omega t - \dfrac{\omega}{v_\varphi}(x_2 - x_1) + \Phi_1$, avec Φ_1 la phase l'origine en x_1. On a alors :

$$\varphi(x_2,t) = \underbrace{\omega t + \Phi_1}_{\text{phase en } x_1 : \varphi(x_1,t)} \underbrace{- \frac{\omega}{v_\varphi}(x_2-x_1)}_{\text{déphasage } \Delta\varphi}$$

Donc $\Delta\varphi = -\omega\tau = -\dfrac{\omega}{c}(x_2 - x_1) = -\dfrac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$ (*suivant la situation une expression sera plus utile que les autres*)

7. Signaux en phase : $\Delta\varphi = 2n\pi$ donc :

$$\frac{\omega}{c}(x_2 - x_1) = 2n\pi \text{ soit } x_2 - x_1 = n\frac{2\pi c}{\omega}$$

La plus petite distance est alors $x_2 - x_1 = \frac{2\pi c}{\omega}$. Or par définition, la plus petites distance séparant deux points où les signaux sont en phases ($\sim$identique) est la longueur d'onde. Donc : $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = Tc$.

8.

9. Signaux en opposition phase : $\Delta\varphi = \pi + 2n\pi$ donc :

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \pi + 2n\pi \text{ soit } x_2 - x_1 = (n + 1/2)\lambda$$

3 Ondes stationnaires

3.1 Forme générale des ondes stationnaires

La propagation d'ondes progressives telles que toutes celles qui ont été envisagées jusqu'ici suppose que le milieu de propagation soit infini (ou tout du moins très grand).
Si on attache l'extrémité $x = L$ d'une corde vibrante, à ce point là :

1. l'onde ne peut plus continuer à avancer : elle va se réfléchir
2. la corde ne peut pas se déplacer : on impose donc au signal de s'annuler en $x = L$.

Dans de telles conditions, une onde progressive ne peut plus se propager. : se créer alors une onde stationnaire.

Définition. Onde stationnaire
Une onde stationnaire est une onde pour laquelle on ne peut pas définir de direction de propagation moyenne.
Une onde stationnaire se crée lorsque le milieu de propagation est limité.

Propriété. Forme générale d'une onde stationnaire
Une onde stationnaire peut s'écrire comme le produit d'une fonction qui dépend du temps t et d'une fonction qui dépend de la coordonnée spatiale x :

$$s(x,t) = f(x)g(t)$$

- ▷ f décrit la vibration temporelle
- ▷ g décrit l'enveloppe de l'onde

Propriété. Conditions aux limites
La forme d'une onde stationnaire est fixée en plusieurs points par les condition de l'expérience : on dit que **des conditions aux limites** sont imposées à l'onde.

Conditions initiales

à $t = 0$, $f(x, t = 0) = F_0$.
⇒ la forme de l'onde à l'instant initial

Conditions aux limites

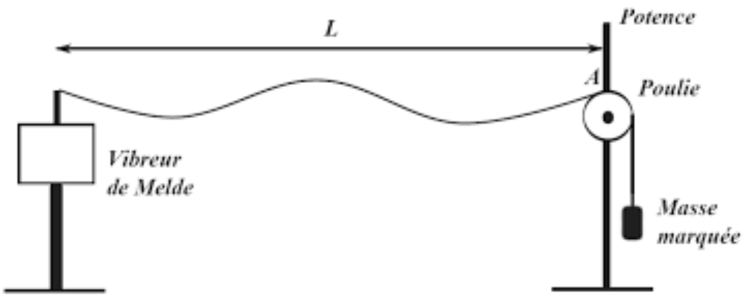
au point $x = L$, $f(t, x = L) = K$
⇒ la forme de l'onde à une extrémité

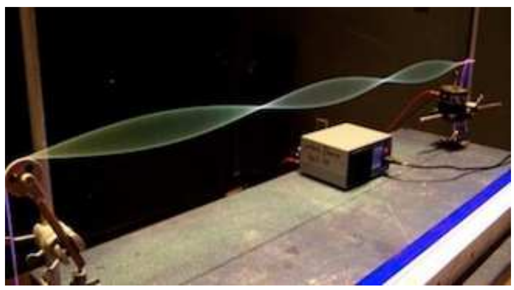
Toute onde stationnaire qui existe dans le système doit satisfaire les conditions aux limites.

3.2 Expérience de la corde de Melde : vibration d 'une corde attachée aux deux extrémités

▶ Montage

> ***Expérience 2 :*** *On considère l'expérience dite de la corde de Melde. On impose comme conditions aux limites deux nœuds en $x = 0$ et $x = L$.*

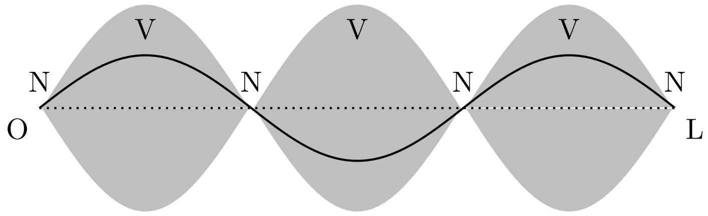




On fait ensuite vibrer la corde à l'aide d'un vibreur : le vibreur impose à l'onde sur la corde une fréquence f. C'est de la _ _ _

▶ Constatation expérimentale

- ▷ pour des fréquences particulières, l'amplitude des oscillations de la corde sont importantes
- ▷ pour ces fréquences particulières, il apparait un nombre entier de fuseaux



Définition. Nœud et ventre de vibration

- ▷ nœuds (N) : positions pour lesquelles l'onde stationnaire est nulle
- ▷ ventres (V) : positions pour lesquelles l'onde stationnaire est maximale

- ▷ on constate également que ces fréquences sont multiples l'une de l'autre : $f_n = nf_1$.

3.3 Exercice : corde de Molde et quantification des modes de vibration

C'est, de façon détaillé, l'exercice ULTRA-CLASSIQUE des ondes stationnaires. Il convient de bien le maîtriser.

Essayons de comprendre analytiquement et de quantifier ce phénomène. On va chercher à expliciter la quantification des modes propres via

- ▷ une étude graphique
- ▷ une étude analytique

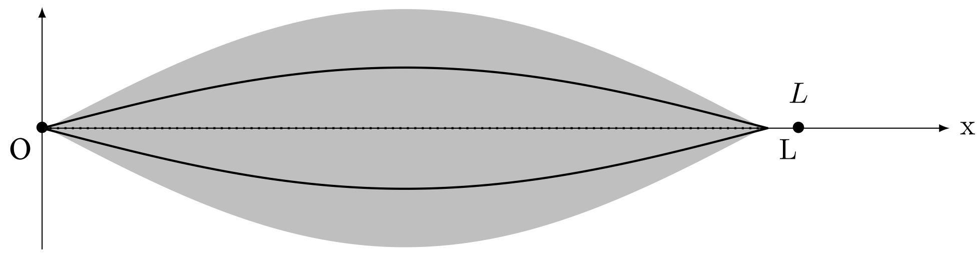
▶ Étude graphique

Le vibreur forçant la corde à vibrer de façon sinusoïdale, on va chercher la corde sous la forme d'une fonction sinusoïdale.

Conditions aux limites

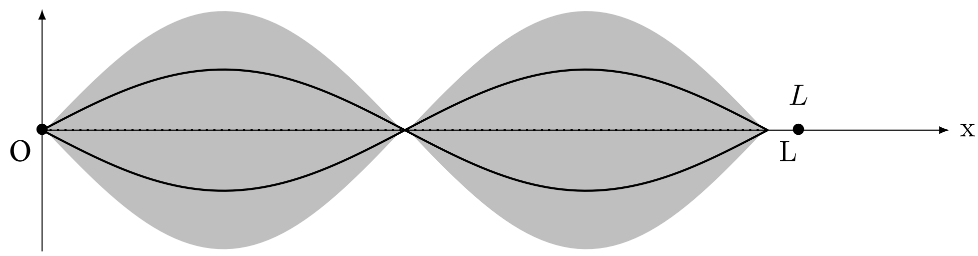
La corde est attachée au deux bouts : son amplitude doit être nulle à gauche et nulle à droite

Mode 1



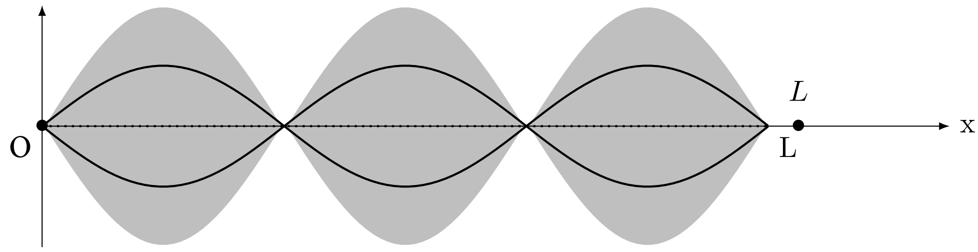
Ici $L = \dfrac{\lambda}{2}$ soit $\lambda = 2L$.

Mode 2



Ici $L = \lambda$ soit $\lambda = L$.

Mode 3

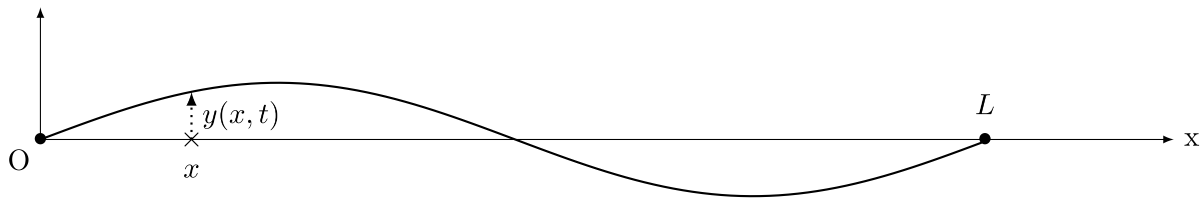


Ici $L = \lambda + \dfrac{\lambda}{2}$ soit $\lambda = \dfrac{2L}{3}$.

Généralisation On remarque alors que la longueur d'onde dépend du numéro du mode : $\lambda \to \lambda_n$. On conjoncture que $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$.

▶ Étude analytique

On envisage une onde stationnaire vibrant dans la corde. On note $y(x,t)$ le déplacement vertical, par rapport à la corde au repos, d'un point d'abscisse x à l'instant t. Comme c'est une onde stationnaire, on la décompose en deux : $s(x,t) = f(t)g(x)$.



Forme de l'onde

Le vibreur qui crée l'onde fournit une oscillation sinusoïdale de pulsation ω. On cherche alors la vibration temporelle sous la forme d'un signal sinusoïdal de pulsation ω :

$$f(t) = A\cos\omega t$$

Au vu de la forme de la corde, on va chercher une enveloppe de la forme $g(x) = \cos(kx + \psi)$. Donc :

$$s(x,t) = A\cos(\omega t)\cos(kx + \psi)$$

Astuce : souvent l'énoncé nous imposera/proposera cette forme.
Objectif : on cherche la phase de l'enveloppe ψ et le vecteur d'onde k.

Utilisation des conditions aux limites
Une onde stationnaire peut apparaître lorsque le milieu de propagation est **limité**. Ce sont donc **les conditions aux limites** qui vont nous permettre de trouver la forme des ondes stationnaires.

Objectif : on cherche la phase de l'enveloppe ψ et le vecteur d'onde k.

▷ **Condition à l'extrémité gauche**
Le point tout à gauche est repéré par l'abscisse $x = 0$:

$$s(x=0,t) = 0 \Longrightarrow A\cos(\omega t)\cos(\psi) = 0 \Longrightarrow \cos(\psi) = 0 \Longrightarrow \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

On prend arbitrairement $\psi = -\pi/2$.
L'enveloppe s'écrit alors : $\cos(kx + \pi/2) = \sin(kx)$ On a donc

$$y(x,t) = A\cos\omega t\sin(kx)$$

▷ **Condition à l'extrémité droite :**
Le point à droite est repéré par l'abscisse $x = L$:

$$y(x = L, t) = 0 \Longrightarrow A\cos(\omega t)\sin(kL) = 0 \Longrightarrow \sin(kL) = 0 \Longrightarrow kL = 0[\pi] \ .$$

On a donc :

$$k_n = n\frac{\pi}{L}$$

3.4 Notion de quantification

Définition. Quantification
Lorsqu'une grandeur physique ne peut prendre qu'un nombre discret de valeur, on dit qu'elle est quantifié.

> *Exemple 6 :*
> ▷ *la vitesse d'une balle :*
> *elle peut prendre toutes les valeurs possibles entre* 0 *et* c*. Elle n'est pas quantifiée.*
> ▷ *la charge électrique :*
> *une charge électrique est forcément un multiple de la charge élémentaire. Elle est quantifiée.*

▶ Quantification des vecteurs d'ondes

On se rend alors compte que le nombre d'onde k ne peut prendre qu'un certain nombre de valeurs :

$$k_1 = \frac{\pi}{L} \ ; \ k_2 = 2\frac{\pi}{L} \ ; \ k_3 = 2\frac{\pi}{L} \ ; \ ...$$

On dit que le nombre d'onde est **quantifié**.

La quantification des vecteurs d'onde s'illustrent bien avec celle des longueur d'onde.

▶ Quantification des longueurs d'ondes : analyse graphique

Le nombre d'onde est relié à la longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \ \Rightarrow \ \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$$

On a alors $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$. On retrouve le résultat graphique.

A cause des conditions limites, la longueur d'onde de l'onde qui existe sur la corde ne peut prendre que des valeurs discrètes : elle est quantifiée.

▶ Quantification des fréquences de vibration

On a observé que l'apparition de ces nœuds de vibration n'arrive que pour des fréquences f du vibreur bien particulière.

La fréquence f, ou la pulsation ω, sont reliées au nombre d'onde k par la célérité de l'onde c.

$$\omega = 2\pi f = ck$$

Comme la célérité de l'onde est fixe et que le nombre d'onde est quantifié, la pulsation l'est aussi. Finalement :

$$f_n = n\,\frac{c}{2L}$$

Les fréquences sont également quantifiées :
▷ seul certaine valeur de fréquence permettent d'observer une onde stationnaire
▷ elles sont toutes un multiple d'une même fréquence $f_0 = \dfrac{c}{2L}$
C'est ce qu'on avait remarquer lors de l'expérience.

3.5 Mode propre de vibration

▶ Mode propre d'une corde vibrante

Définition. Mode propre de vibration
On considère une corde vibrante attachée à ses deux extrémités.
Les modes propres de vibration sont les seules ondes sinusoïdales qui peuvent exister sur la corde.

$$\text{mode propre : } y_n(x,t) = \underbrace{A_n \cos\left(k_n x + \varphi\right)}_{\text{envellope}} \times \underbrace{\cos(2\pi f_n t)}_{\text{partie vibrante}} \quad \text{avec } \ 2\pi f_n = c k_n = \frac{2\pi}{\lambda} c$$

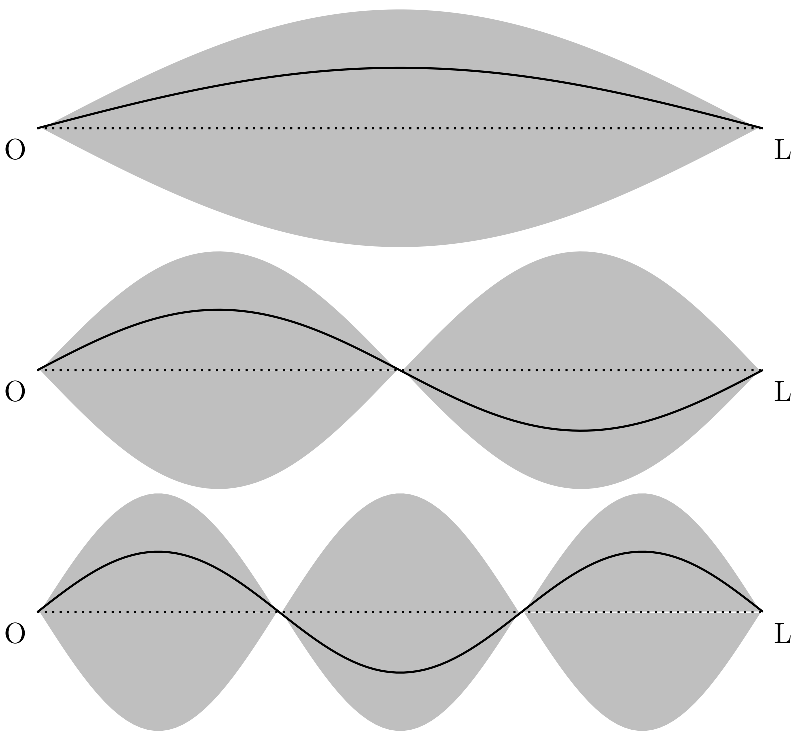
Propriété. Quantification des modes propres
La fréquence d'un mode propre de vibration est un multiple d'une fréquence fondamentale, notée f :

$$f_n = n f \quad \text{avec} \quad f_1 = \frac{c}{2L}$$

Les f_n sont appelées les fréquences propres du systèmes et f le fondamental.
Les ondes $y_n(x,t)$ sont appelées modes propres n de vibration ou harmonique de rang n.

Seules certaines fréquences (ou certaines longueurs d'onde) peuvent donner naissance à une onde stationnaire.

Les modes propres (ou harmoniques) représentent les différentes façon dont peut vibrer la corde.



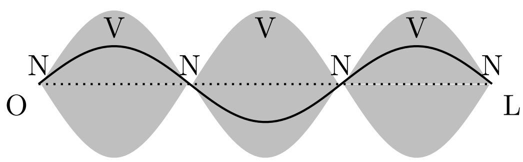
Fondamental : $\lambda = 2L$
mode propre $n = 1$

Seconde harmonique : $\lambda = L$
(mode propre $n = 2$)

Troisième harmonique : $\lambda = \dfrac{2L}{3}$
(mode propre $n = 3$)

Propriété. Distance noeud-ventre

distance entre deux noeuds successifs : $\lambda_n/2$
distance entre entre un ventre et le noeud : $\lambda_n/4$



3.6 Mode de vibration d'une onde stationnaire quelconque

▶ Décomposition d'une onde : théorème de Fourier

Dans l'expérience de la corde de Melde, le vibreur permet de forcer une fréquence de vibration et donc un seul mode propre.
Lorsqu'on pince une corde et qu'on la laisse vibrer librement, il n'y a aucune sélection *a priori*.

Propriété. Onde stationnaire quelconque
Lorsqu'une onde stationnaire s apparaît dans un milieu fini et vibre de façon libre (pas de forçage extérieur sinusoïdal), elle se décompose comme la somme de tous les modes propres de vibration.

$$\text{Onde stationnaire quelconque} = \sum_n \text{Harmoniques de rang } n$$

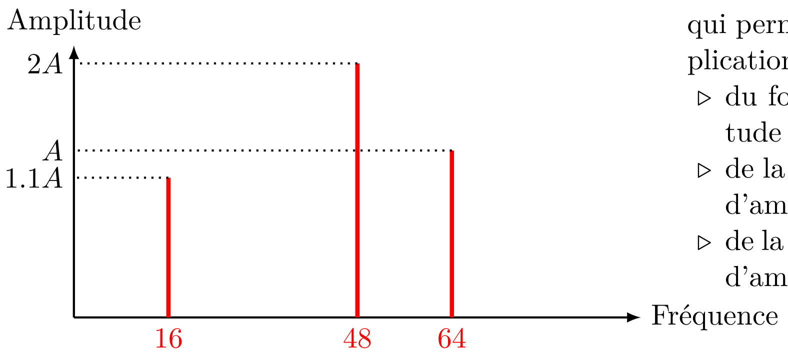
avec :

$$\text{harmonique de rang n } = A_n \cos(2\pi n f + \phi_n) \times \sin(\frac{2\pi}{\lambda_n} x)$$

et $\lambda_n = c/f_n$.

> ***Remarque :*** *Cette écriture rappelle la décomposition de Fourier d'un signal périodique : c'est normal c'est le même principe !*

On va alors plutôt utilisé une représentation spectrale : on va représenter par un graphe tous les modes propres de vibration qui composent l'onde stationnaire.



Le fondamental est alors $f = 16$Hz (fréquence qui permet de retrouver toutes les autres par multiplications par un entier). L'onde est composé alors

- ▷ du fondamentale, fréquence $f_1 = 1 \times f$ d'amplitude A
- ▷ de la troisième harmonique, fréquence $f_3 = 3 \times f$ d'amplitude $1.1A$
- ▷ de la quatrième harmonique, fréquence $f_4 = 4 \times f$ d'amplitude $2A$

Propriété. Fréquence d'une vibration quelconque
Le fondamentale f (qui redonne tous les $f_n = n \times f$) représente **LA** fréquence de vibration de l'onde.

Propriété. Énergie transportée par d'une onde
Une onde transporte une énergie $\mathcal{E}$ proportionnelle à la somme au carrée de amplitudes des harmoniques qui la composent

$$\mathcal{E} \propto \sum_n A_n^2$$

Avec les mains : plus il y a d'amplitude, plus le son est fort et mélodieux.

▶ Note de musique et duel piano vs clavecin

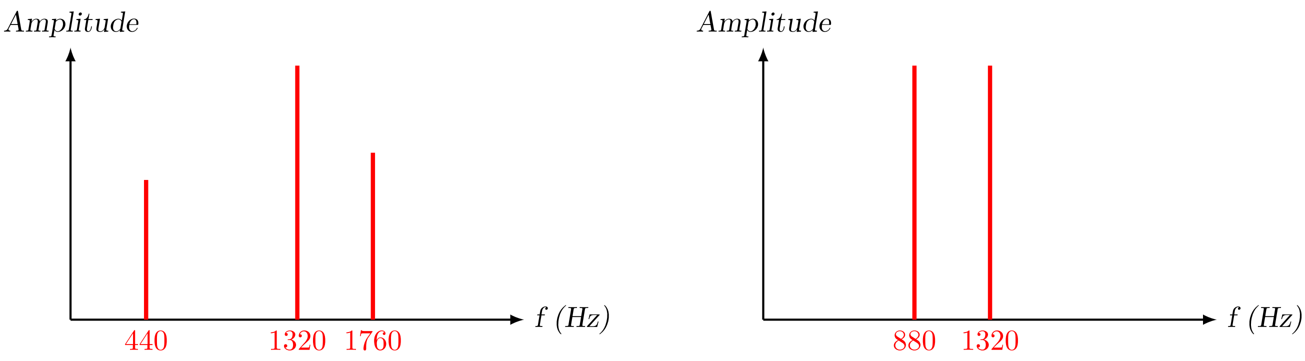
Une note jouée par un instrument de musique provient d'une onde stationnaire :
▷ instrument à corde (*violon, piano, ...*) : corde vibrante
▷ instrument à vent (*clarinette, orgue, ...*) : colonne d'air vibrante

$$\text{onde vibrante } = \sum_n \text{harmoniques de rang n}$$

et les fréquences des harmoniques f_n seront $f_n = n$f, avec f le fondamentale.

Propriété. Fréquence du son
La fréquence d'un son généré par une onde stationnaire est celle du fondamentale de l'onde f.
Deux sons peuvent avoir la même fréquence ($\sim$même note jouée) mais apparaître différent à l'oreille car ils ne sont pas composées des même harmoniques.

Exemple 7 :



Les deux ondes possèdent le même fondamentale $f_0 = 440Hz$: on joue la même note (un La). Mais elle ne possède pas les mêmes harmoniques : elles sont jouées par deux instruments différents.

RIP le clavecin
La même note, jouée par un piano et un clavecin, produit des sensations différentes chez l'auditeur car les deux instruments n'ont pas le même nombre d'harmoniques :
▷ le piano, qui est à corde frappées, voit l'amplitude A_n de ses harmoniques décroître comme $1/n$
▷ le clavecin, qui est à corde pincée, voit l'amplitude A_n de ses harmoniques décroître comme $1/n^2$
Les harmoniques du clavecin décroissent plus rapidement que celle du piano. La note du piano possède plus d'harmonique, c'est à dire un timbre plus riche. Ce qui s'entend à l'oreille et qui a permis au piano de supplanter le clavecin.