Chap XIV

Cinématiques du point

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ Lien : position → vitesse → accélération
- ♡ **Repère de coordonnées cartésiennes**
  - définir les vecteurs de la base
  - écrire la position en fonction des coordonnées
- ♡ **Repère de coordonnées cylindriques**
  - définir les vecteurs de la base
  - dérivée des vecteurs de la base cylindrique ; notion de vitesse angulaire
  - écrire le vecteur position en fonction des coordonnées
- ♡ **Repère de Frenet**
  - définir les vecteurs de la base
  - notion de rayon de courbure
  - vecteur vitesse et position

Savoir Faire

Utiliser un axe ; faire le lien entre un point et ses coordonnées ; mesurer une distance

Mouvement tournant
- *Reconnaître une situation où un repère cylindrique est adapté*
- *Écrire le vecteur position en fonction des coordonnées*
- *Déduire du vecteur position les vecteurs vitesse et l'accélération*
- *Retrouver les équations horaires de la vitesse et la position à partir des informations sur l'accélération*

Mouvement rectiligne ou quelconque
- *Reconnaître une situation où un repère cartésien est adapté*
- *Écrire le vecteur position en fonction des coordonnées*
- *Déduire du vecteur position les vecteurs vitesse et l'accélération*
- *Retrouver les équations horaires de la vitesse et la position à partir des informations sur l'accélération*

Étude d'une trajectoire
- *Définir les rayons de courbures et introduire la base de Frenet en chaque point*
- *Tracer les vecteurs vitesse et accélération en fonction de la variation de la vitesse instantanée et du rayon de courbure*

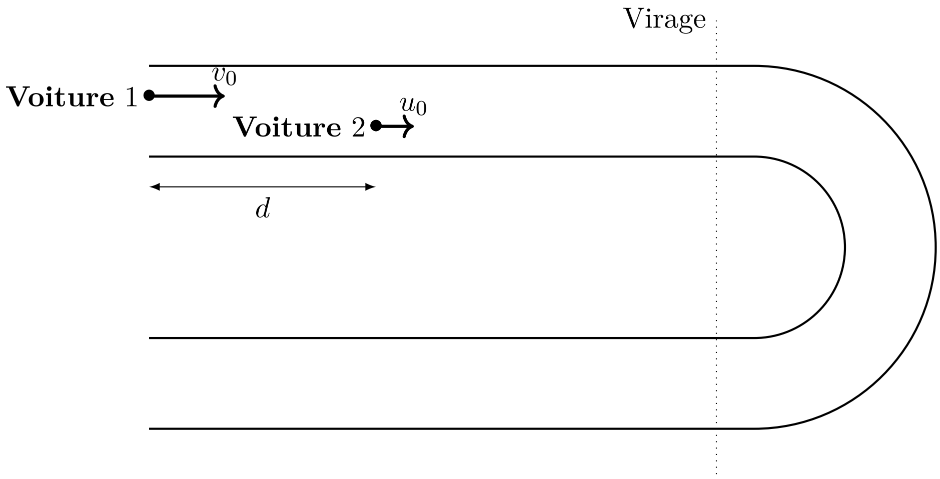
1 Description du mouvement d'un point

1.1 Mise en situation

On cherche à décrire le mouvement de deux voitures de courses sur un circuit composé :
- ▷ d'une ligne droite
- ▷ d'un virage circulaire

Les deux voitures vont rouler sur le tronçon rectiligne en ligne droite et elles possèdent le même moteur fournissant la même accélération $a_0 = 10 \text{m.s}^{-2}$.

En sortie du précédent virage, on prend une photo au moment où la voiture 1 passe la ligne de départ et on remarque que :
- ▷ la première voiture a une avance $d = 10\text{m}$ par rapport à la seconde
- ▷ la seconde possède une vitesse initiale supérieure à la première $v_0 > u_0$ $v_0 = 30\text{km/h}$.



On s'intéresse ici au **mouvement** de deux systèmes matériels, sans chercher à comprendre ce qui le produit : c'est un problème de **cinématique**.

Définition. Cinématique
La cinématique est la partie de la physique qui décrit le mouvement, indépendamment des causes qui lui ont donné naissance.

Attention ! C'est souvent (*à peu près toujours*) la partie la plus dur des exercices de mécanique !!

1.2 Description du mouvement d'un point

Définition. Point matériel
Un point matériel permet de représenter un système dont la rotation sur lui même n'impacte pas son mouvement.
Son mouvement peut être repéré par trois coordonnées seulement.

Attention ! Assimiler un système à un point matériel dépend de l'échelle du problème considéré.

> *Exemple 1 :*
> - ▷ *pour étudier le mouvement globale des deux voitures, on peut les assimiler à un point*
> - ▷ *pour étudier en détail le mouvement des roues qui les propulse, il faut prendre en compte leurs rotations : on ne peut pas les assimiler à un point*

► Notion de référentiel

Un référentiel est un point considéré comme fixe qui servira de repère à la description du mouvement :
- ▷ pour un spectateur dans les tribunes, la voiture 1 se déplace.
- ▷ pour le conducteur de la voiture 1, ce sont les tribunes qui se déplacent et lui qui reste immobile.

Définition. Référentiel
Un référentiel $\mathcal{R}$ est constitué :
- ▷ d'un point de référence, considéré comme immobile permettant de décrire l'espace **par rapport** à sa position
- ▷ une horloge permettant de mesurer l'écoulement du temps.

Un mouvement est toujours relatif : **sa description dépend du référentiel d'étude.**

Astuce pratique :
choisir un référentiel est choisir un solide/système qu'on considèrera comme fixe pour l'étude qui nous intéresse.
Ex : le sol, la Terre, le Soleil, ...

> *Exemple 2 : On choisit ici un point du circuit : le sol sera considéré comme fixe, et ce sont les voitures qui bougeront.* ***On choisit le référentiel terrestre.***
> *On aurait pu choisir la voiture M_1 comme référentiel, mais on se doute qu'au vu du problème ce choix risque de mener à des complications.*

▶ Invariance des distances, invariance du temps

Avec un référentiel on mesure des distances et des intervalles de temps. Nous nous placeront par la suite en **mécanique classique**.

Définition. Mécanique classique
En mécanique classique, la mesure des distances et les intervalles de temps ne dépend pas du référentiel d'étude choisi.

> *Exemple 3 : Quelque soit le référentiel d'étude choisi, le spectateur dans les tribunes ou le conducteur de la voiture 1, la voiture fait la même longueur et le temps d'un tour de piste est le même.*

Propriété. Validité de la mécanique classique
La mécanique classique est valable si la vitesse v des systèmes étudiés est très faible devant la vitesse c_0 de la vitesse dans le vide :

$$v << c_0$$

En mécanique relativiste (non-classique), le choix du référentiel influe sur la mesure des distances et l'écoulement du temps.

1.3 Les vecteurs cinématiques

▶ Notion d'origine

On se place dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel, il est toujours possible
- ▷ de trouver un point, noté O, fixe. On repère alors la position du point mobile M **par rapport** à ce point O.
- ▷ de trouver un instant qui nous servira d'origine à la mesure du temps. On repère alors l'instant t d'un évènement **par rapport** à cet instant initial
  - ▷ positif si l'évènement a lieu après l'évènement origine
  - ▷ négatif si l'évènement a lieu avant l'évènement origine

  La valeur absolu du temps représente l'intervalle de temps entre l'évènement considéré et l'origine des temps

> *Exemple 4 :*
> - ▷ ***Origine des temps :*** *on choisit ici l'instant où on a pris la photo*
> - ▷ ***Origine des positions*** *: on choisit la position de la voiture 1*
>
> *Ces deux choix sont complètement arbitraires !*

▶ Les trois vecteurs cinématiques

Définition. Vecteur position
Le vecteur position, noté souvent $\vec{r}$, est le vecteur allant de O à M :

$$\text{position à l'instant t} = \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

Définition. Vecteur vitesse et vitesse instantanée
Le vecteur vitesse, noté $\vec{v}$, représente la variation de la position au cours du temps :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

La vitesse instantanée v est la norme de la vitesse $v(t) = ||\vec{v}(t)||$.

Attention ! Dans le langage courant, et même en science, le mot "vitesse" désigne souvent la **vitesse instantanée**. C'est ce qui apparaît sur un compteur de voiture.

Définition. Vecteur accélération
Le vecteur accélération, noté $\vec{a}$, représente la variation de la vitesse au cours du temps :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

Attention ! Tout comme la vitesse, on parle souvant de *l'accélération* pour désigner *la norme de l'accélération.*

Attention ! Zénon d'Élée ! !
D'après le grec Zénon d'Élée, une flèche qui vole est en fait immobile. En effet, à chaque instant, elle est à une position fixe. Elle est donc à chaque instant au repos. Si on décompose le mouvement en une suite d'instants, elle ne peut donc pas se mouvoir, puisqu'elle est constamment au repos.
Autrement dit $\vec{v}(t_1) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_1) = \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}(t_1)\right]$. *Or* $\overrightarrow{OM}(t_1)$ *est une constante donc* $\vec{v}(t_1) = 0$.

A quel personnage célèbre Zénon d'Élée vous fait-il penser ?

▶ Pourquoi l'accélération

On peut se demander pourquoi avoir défini l'accélération ou bien pourquoi s'être arrêté à l'accélération ? On aurait pu définir également la dérivée de l'accélération, et ainsi de suite ....
Comme on le verra plus tard en dynamique, les lois du mouvement porte non pas sur la position, ni sur la vitesse mais sur l'accélération. Inutile alors d'aller plus loin.

Passez pour un amateur en moins de 5s

un mouvement uniforme est un mouvement à vitesse constante : l'accélération est donc nulle

non NON **NON NOOOOOOOOOOOOOOOOON**
Une vitesse constante c'est $v(t)$ =constante pas $\vec{v}$!
Par conséquence :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{0}$$

Également $a = |\vec{a}|$ n'est pas nulle : $a = |\vec{a}| \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

1.4 Introduction d'un repère

Le grand "drame" de la cinématique est qu'on doit utiliser des **vecteurs** ! ! Pour manipuler des **vecteurs**, on le décompose dans un repère.

Définition. Repère et système de coordonnées
Un repère est un ensemble de vecteur unitaires qui vont permettre d'écrire et de décomposer chaque vecteur en trois nombres : ce sont ses coordonnées.

Avec les mains
Avec un repère, tout vecteur se résumer à trois nombres.

Méthode en DS. Quel repère pour quel mouvement ?

- ▷ Ça a l'air de tourner autour d'un point : cercle, spirale, ellipse, ... ⇒ cylindrique
- ▷ Ça n'a pas l'air de tourner autour d'un point : cercle, spirale, ellipse, ... ⇒ cartésien

Règle fondamentale :
On ne manipulera jamais des vecteurs ou leur normes pour résoudre les problèmes de cinématiques. On se placera toujours dans un système de coordonnées judicieusement choisi et on manipulera les coordonnées.

> ***Exemple 5 :***
> - ▷ *Les voitures se déplaçant en ligne droite jusqu'au virage, un choix de coordonnées cartésiennes semblent plus approprié.*
> - ▷ *Les voitures réalisent un mouvement tournant dans le virage, un choix de coordonnées cylindriques semblent plus approprié pour cette partie du circuit.*

Schéma de la résolution d'un problème de mécanique :

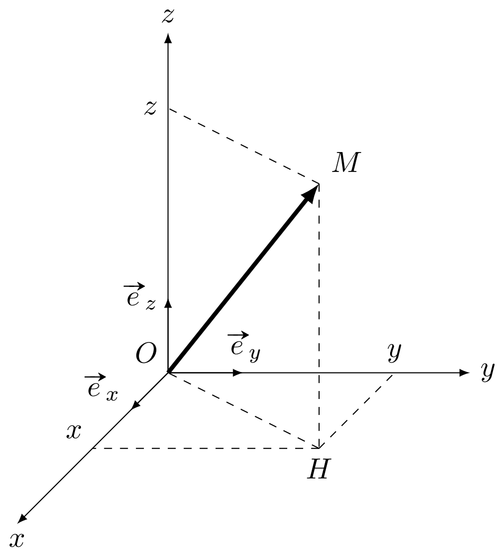
2 Système de coordonnées adapté au mouvement : le repère cartésien

2.1 Description du système

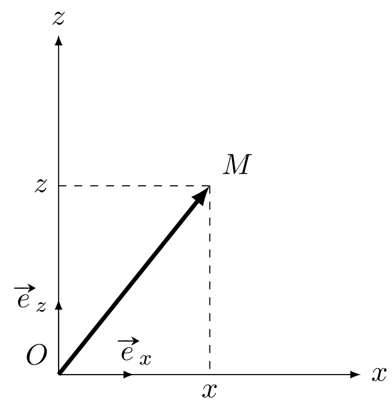
Définition. Coordonnées cartésiennes
Les coordonnées cartésiennes sont définies dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. La position d'un point M est alors défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z}$$

En 3D



En 2D



Attention ! les vecteurs de la base cartésienne sont fixes !

Vocabulaire :

1. Un repère est dit **orthonormé** si
   - les vecteurs de base sont **unitaires**, *i.e.* de norme 1 : $||\vec{e}_x|| = ||\vec{e}_y|| = ||\vec{e}_z|| = 1$
   - ils sont tous orthogonaux entre eux : $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z \perp \vec{e}_x$

2. Un repère est dit **direct** si $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$. Il s'agit d'un produit vectoriel.

   Test : on utilise sa main droite :
   - le pouce pointe dans la direction du premier vecteur
   - l'index pointe dans la direction du deuxième vecteur
   - le majeur doit pointer dans la direction du troisième

2.2 Vecteurs cinématiques

Point méthode :
on écrira toujours en début d'exercice les vecteurs cinématiques : cela correspond à l'aller.

▶ Vecteur position

Définition. Position en repère cartésien
La position d'un point M au cours du temps s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) + \vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

avec $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ ses coordonnées suivant les axes x, y et z.

Attention ! Comme le point M se déplace, ses coordonnées sont des **fonctions du temps** !!

▶ Vecteur vitesse

Pour obtenir la vitesse on dérive la position :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t) + \vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z\right]$$

Attention ! La dérivée de $x(t)\vec{e}_x$ se traite comme la dérivée d'un produit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)\vec{e}_x\right] = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + x(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}$$

Les vecteurs de la base cartésienne sont fixes, donc invariables dans le temps :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} = 0$$

Finalement on a

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$$

Propriété. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes
La vitesse d'un point mobile M en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

▶ Vitesse instantanée

La vitesse instantanée, souvent appelée vitesse "tout court", est la norme du vecteur vitesse :

$$v(t) = |\vec{v}(t)|$$

♡ *Instant math* ♡ *:*
la norme d'un vecteur $\vec{A}$ de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans une base orthonormée est :

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Propriété. Vitesse instantanée
La vitesse instantanée v s'écrit comme :

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

Attention ! Ne pas confondre vecteur vitesse et vitesse. Notamment :

> ***Exemple 6 :*** *"Se déplacer à vitesse constante" signifie que la* ***norme*** *v du vecteur vitesse est constante. Ce dernier pouvant varier de direction, $\vec{v}$ bouge au cours du temps. L'accélération n'est pas nulle.*

▶ Vecteur accélération

A l'aide d'un raisonnement similaire et en utilisant le lien vitesse-accélération, on obtient :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z$$

Propriété. Accélération en coordonnées cartésiennes
L'accélération d'un point mobile M en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

De la même façon que précédemment, l'accélération désigna la norme du vecteur accélération.

2.3 Retour à notre course de voiture

> ***Exemple 7 :***
>
> *On reprend l'étude de la course de voiture et on s'intéresse uniquement au mouvement de la voiture 1. On rappelle :*
> - ▹ *initialement la voiture 1 est sur la ligne de départ, origine de l'axe (Ox)*
> - ▹ *elle possède avec une vitesse initiale v_0*
> - ▹ *elle roule en ligne droite jusqu'au virage avec une accélération a_0=10m.s^{-2}*
>
> *Le tronçon de route droite avant le virage fait une distance $D = 300$m.*
>
> 1. *Introduire un système de coordonnées adapté à la description du mouvement et écrire les trois vecteurs cinématiques.*
> 2. *Donner l'évolution de la vitesse instantanée v_1 de la voiture au cours du temps.*
> 3. *Donner l'évolution de la position x_1 de la voiture au cours du temps.*
> 4. *Donner le temps T_1 que la voiture 1 met à parcourir le tronçon.*
> 5. *Exprimer la vitesse de la voiture 1 en fonction de sa position $v_1(x_1)$. (pour simplifier les calculs on prendra $v_0 = 0$)*

Méthode en DS. Résoudre un exercice
C'est vrai tout le temps mais encore plus en mécanique :

"Quand je ne sais pas quoi faire je fais des choses intelligentes (*i.e.* des choses du cours)"

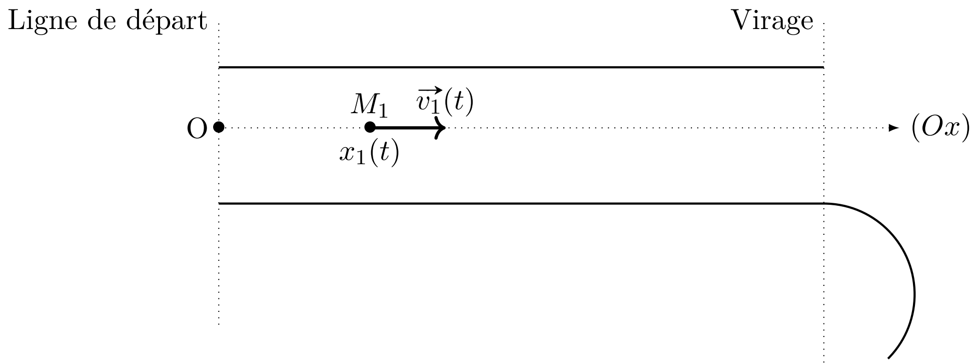
Ici, ce que je sais faire c'est écrire les vecteurs cinématiques. C'est parti !

REPONSE

1. ▶ **Définition du repère de coordonnées**

   Ici notre voiture se déplace en ligne droite : je choisis un système de coordonnées cartésien, et je fais correspondre l'axe x avec la direction de propagation de la voiture.
   De plus je choisis comme origine O la position de la ligne de départ.

   Attention ! Un schéma SCHEMA **SCHEMA** ***SCHEMA*** est indispensable INDISPENSABLE **INDISPENSABLE** ***INDISPENSABLE***.
   On fait apparaître :
   - ▷ la position du point M étudié à un instant quelconque ainsi que sa vitesse
   - ▷ l'origine du repère et les vecteurs de la base
   - ▷ les coordonnées du point M



   ▶ **Vecteur cinématiques**
   - ▷ **Position**
     Le point M_1 ne se déplace que suivant une seule direction, on a : $\overrightarrow{OM}(t) = x_1(t)\vec{e}_x$.
     Les autres coordonnées sont prises égales à zéro par un choix judicieux de l'origine.
   - ▷
   - ▷ **Vecteur vitesse**
     Le vecteur vitesse s'obtient **TOUJOURS** par dérivation du vecteur position.
     $$\vec{v}_1(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_1(t)\vec{e}_x\right] = \dot{x}_1(t)\vec{e}_x$$
     La vitesse instantanée $v(t)$ est donc : $v_1(t) = \dot{x}_1(t)$.
   - ▷ **Accélération** Le vecteur accélération s'obtient **TOUJOURS** par dérivation du vecteur vitesse.
     $$a(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}_1(t)\vec{e}_x$$

2. ▶ **Utilisation des loi de la mécanique ou de l'énoncé**

   C'est ici que prendra place le PFD. Pour le moment, on utilise l'énoncé qui nous dit : $|\vec{a}| = a_0$. Par conséquent :
   $$\ddot{x}_1(t) = a_0$$

   Attention ! On vient d'obtenir une information sur les coordonnées de M. Ceci n'est possible uniquement parce qu'on a exprimé l'accélération $\vec{a}$ de M à l'aide de ses coordonnées : c'est *l'aller"*

   ▶ **Retour aux coordonnées : vecteur vitesse et position**

   Désormais on fait le *"retour"* : à l'aide des informations obtenues sur l'accélération, on trouve la vitesse et la position.

   - ▷ **Vecteur vitesse :**
     On a $\ddot{x}_1(t) = a_0$. En intégrant une fois cette expression on obtient $\dot{x}_1(t)$.

♡ *Instant math* ♡
On a donc $\dot{x}_1(t) = a_0 t + K$, avec K une constante d'intégration.

Astuce pratique :
- ▷ toute intégration fait apparaître une constance inconnue à déterminer
- ▷ on trouve ces constantes grâce aux conditions initiales

CI : on a $v(t=0) = v_0$ donc $K = v_0$:

$$v(t) = \dot{x}_1(t) = a_0 t + v_0$$

▷ **Vecteur position :**
On intègre l'expression précédente pour obtenir $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t + C$$

avec C une constante d'intégration à déterminer.

CI : on a $x_1(t=0) = 0$ donc $C = 0$:

$$x_1(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t$$

3. *Il faut traduire en formule mathématiques le français*

le temps T_1 que le voiture met à parcourir le tronçon : $x_1(T_1) = D$

On cherche alors $\frac{a_0}{2}T_1^2 + v_0 T_1 = D$. C'est un polynôme d'ordre 2, on résout et on garde la solution positive !

$$T_1 = -\frac{v_0}{a_0} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{a_0^2} + 8\frac{D}{a_0}}$$

4. On veut obtenir l'évolution de v_1 en fonction de x_1. On a : $\begin{cases} x_1(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t = \frac{a_0}{2}t^2 \\ v_1(t) = a_0 t + v_0 \end{cases}$

On cherche alors à exprimer t en fonction de x_1 puis on remplace dans v_1 :

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2x_1}{a_0}} \\ v_1(t) = a_0\sqrt{\frac{2x_1}{a_0}} + v_0 = \sqrt{2a_0 x_1} + v_0 \end{cases}$$

> **Application 1 :** *On rappelle :*
> - ▷ *initialement la voiture 2 est à une distance d de la ligne de départ*
> - ▷ *elle s'élance avec une vitesse initiale nulle*
> - ▷ *elle roule en ligne droite jusqu'au virage avec une accélération a_0=10m.s^{-2}*
>
> *En reprenant pas à pas la méthode, montrer que la position de la voiture 2 est donnée par :*
>
> $$x_2(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + d$$

> **Application 2 :** *On étudie le mouvement de l la voiture 2. A $t = 0$, la voiture 2 :*
> - ▷ *est à $d = 10m$ en avant de la ligne de départ*
> - ▷ *avec une vitesse initiale u_0*
> - ▷ *elle roule en ligne droite jusqu'au virage avec une accélération progressive $a(t) = a_0\frac{t}{\tau}$ avec $\tau = 5s$.*
>
> *Donner la loi horaire $x_2(t)$ de la voiture 2 au cours du temps*

3 Système de coordonnées adapté au mouvement : le repère cylindrique

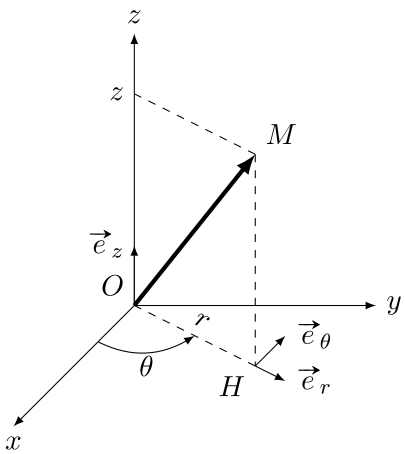
On s'intéresse désormais à la seconde partie du circuit : les voitures vont réaliser un virage à 180 degrés. Nous pouvons continuer à utiliser notre système de coordonnées précédents, mais celui-ci sera mal adapté à décrire un mouvement tournant. On introduit un système de coordonnées cylindrique

Attention ! Tous les systèmes de coordonnées sont généralement définis à partir d'un système cartésien.

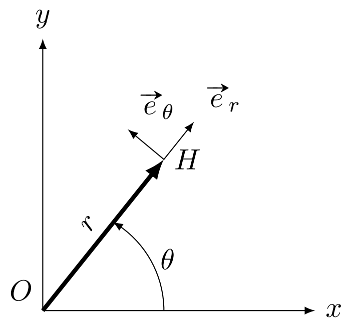
3.1 Les coordonnées cylindriques

Définition. Coordonnées cylindriques
Le repère est défini par l'origine **fixe** O et la base orthonormée directe constituée des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ définis comme sur la figure suivante.
Attention ! Les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont **mobiles** avec le mouvement du point M.

A 3D : base cylindrique



A 2D : z =constante $\Rightarrow$ base polaire



$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$$

Les coordonnées d'un point M sont r, θ et z.

Définition. Position en repère cylindrique
La position d'un point M est alors défini par le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}\,.$$

Attention !

Attention ! La coordonnées θ n'apparaît pas explicitement dans le vecteur position

$$JAMAIS \text{ on écrit } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$$

Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ et donc du temps

$$\vec{e}_r \to \vec{e}_r(t) \text{ et } \vec{e}_\theta \to \vec{e}_\theta(t)$$

3.2 Dérivée des vecteurs de la base cylindrique

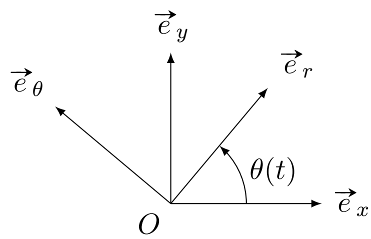
C'est quoi le problème ?
Pour obtenir le vecteur vitesse, il nous faudra dériver le vecteur position.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z\right]$$

Attention ! $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent du temps.
Il faut calculer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$! !

▶ Changement de base

Pour exprimer les dérivées des vecteurs de base, nous allons utiliser les formules de changement de base entre la base polaire et la base cartésienne. On se place dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.



$$\vec{e}_r = \cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_z\ .$$

Ainsi, les vecteurs cartésiens étant fixe, on en déduit les dérivées des vecteurs de base

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta(t)\vec{e}_z = \dot{\theta}\left(-\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_z\right)$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos\theta(t)\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta(t)\vec{e}_z = -\dot{\theta}\left(\cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y\right)\ .$$

Propriété. Dérivées des vecteurs de la base polaires :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta \ \text{ et } \ \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\vec{e}_r\ .$$

Attention ! Ces formules sont à connaitre ABSOLUMENT ! !

Astuce pratique :
Pour dériver on utilise toujours ces deux formules, on ne revient pas aux changement de bases ! !

> *Application 3 : Calculer* $\dfrac{d^2\vec{e}_r}{dt^2}$ et $\dfrac{d^2\vec{e}_\theta}{dt^2}$

3.3 Les vecteurs cinématiques

▶ **Vecteur position**

Propriété. Position
Le vecteur position est évidemment défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z} \ .$$

▶ **Vecteur vitesse**

À l'aide des relations précédentes, on peut calculer le vecteur vitesse. Le vecteur vitesse est défini par

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z\right] \ ; \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z + z(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} \ ; \\ &= \dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta + \dot{z}(t)\vec{e}_z \ .\end{aligned}$$

Propriété. Vecteur vitesse
Le vecteur vitesse est défini par

$$v(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

Définition. Vitesse angulaire
La grandeur $\dot{\theta}$ est appelée la vitesse angulaire, et s'exprime en rad.s−1.

> *Exemple 8 : Donner la vitesse angulaire d'une trotteuse d'horloge.*
> *L'aiguille tourne à vitesse angulaire constante autour d'un point O dans le indirect. Elle réalise un tour en 1 minute. La vitesse angulaire étant constante on peut l'évaluer simplement :*
>
> $$\dot{\theta} = -\frac{\textit{angle parcouru}}{\textit{temps de parcours}} = \frac{2\pi}{60} = 1,6\ 10^{-1} rad.s^{-1}$$
>
> *Le "-" provient du fait que l'aiguille tourne dans le sens indirect.*

Attention ! Un mouvement à vitesse constante implique que la **norme** de la vitesse est constante, pas le vecteur vitesse !!

$$v(t) = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2} \ \text{ est constant}$$

▶ **Vecteur accélération**

Attention ! A ne pas apprendre par cœur mais à retrouver suivant les cas !! Souvent le problème simplifiera l'expression.

Cas 1 : mouvement à rayon constant $r(t) = R$

▷ Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\vec{e}_r$$

Attention ! Comme $\vec{e}_r$ dépend du temps, la position dépend également du temps même si $r = R$ est fixe !!

▷ Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\vec{e}_r\right] = \dot{R}\vec{e}_r + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{e}_r\right]$$

On a : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

▷ Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right]$$

Soit :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r$$

Finalement : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Cas général :

Propriété. Accélération

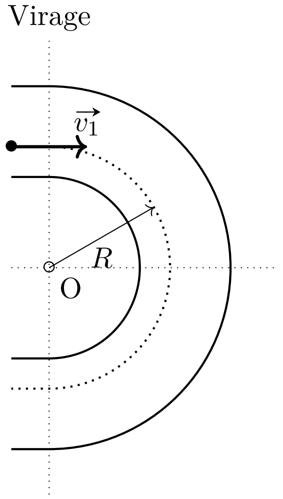
Le vecteur accélération en coordonnées cylindriques

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

Attention ! ON N APPREND PAS L EXPRESSION PAR CŒUR !!!

| ***Application 4*** *: Démontrer la relation précédente.*

3.4 Retour à notre course de voiture



On s'intéresse au mouvement de la voiture 1 lors du virage. Lors de ce virage, elle conserve une trajectoire circulaire, de rayon $R_1 = 80$m et de centre O.
On suppose que la voiture 1 entre dans le virage avec une vitesse v_0.

1. Écrire les vecteurs cinématiques de la voiture 1, ainsi que sa vitesse instantanée $v_1(t)$.
2. Exprimer l'accélération de la voiture en fonction de R_1, v_1 et de ses dérivée.

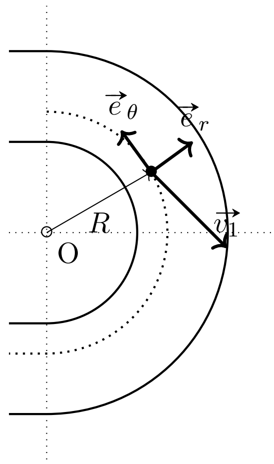
   Le pilote "accélère uniformément" : $v_1(t) = a_0 t$.
3. Exprimer la vitesse et l'accélération instantanée de la voiture.
4. L'adhérence de la route fait que, si l'accélération d'une voiture dépasse 0.75g, elle dérape et fini hors piste.
   A quel instant T la voiture dérape ?

REPONSE

1. ► **Définition du repère de coordonnées**
Ici notre voiture se déplace en réalisant une trajectoire circulaire : je choisis un système de coordonnées cylindrique. Il faut alors définir :
▹ le centre O ; ici on prend le centre de la trajectoire
▹ l'angle θ : ici on le mesure par rapport à l'axe horizontal
Attention ! Lorsqu'on utilise un repère cylindrique, on fait attention au choix du centre du repère ! Je choisis comme origine des temps le moment où la voiture engage son virage.

Attention ! Un schéma SCHEMA **SCHEMA** ***SCHEMA*** est indispensable.

On fait apparaître :
▹ la position du point M étudié à un instant quelconque ainsi que sa vitesse
▹ l'origine du repère et les vecteurs de la base
▹ les coordonnées du point M



► **Vecteur cinématiques**
▹ **Position**
Le point M se déplace suivant une trajectoire circulaire plane. Je choisis arbitrairement $z = 0$. Grâce au choix pertinent du centre de mon repère je peux écrire :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r\vec{e}_r \text{ et comme } r = R \text{ on a } \overrightarrow{OM}(t) = R\vec{e}_r$$

▹ **Vecteur vitesse**
Le vecteur vitesse s'obtient **TOUJOURS** par dérivation du vecteur position.

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\vec{e}_r\right] = \dot{R}\vec{e}_x r + R\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$

Ici R est constant donc $\dot{R} = 0$. Finalement :

$$v(t) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

La vitesse instantanée s'écrit alors : $v_1(t) = R|\dot{\theta}| = -R\dot{\theta}$ car l'angle diminue au cours du mouvement.
▹ **Accélération** *Le vecteur accélération s'obtient* ***TOUJOURS*** *par dérivation du vecteur vitesse.*

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}\vec{e}_r\right] = R\ddot{\theta}\vec{e}_r + R\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$$

Soit :

$$\vec{a}(t) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

2. On a $v_1(t) = -R\dot{\theta}$ donc $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -R\ddot{\theta}$. Finalement

$$\vec{a} = -\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{v_1^2}{R}\vec{e}_r$$

3. En utilisant l'expression de v_1 on a :

$$\vec{a} = -a_0\vec{e}_\theta - \frac{a_0^2}{R}t^2\vec{e}_r$$

4. On souhaite que $|\vec{a}(t)| < 0.75g$ donc on cherche T tel que $|\vec{a}(T)| = 0.75g$

$$\sqrt{a_0^2 + \frac{a_0^4}{R^2}T^4} < 0.75g \Rightarrow T = \frac{\sqrt{R}}{a_0}\left(0.75^2g^2 - a_0^2\right)^{1/4}$$

▶ Utilisation des loi de la mécanique ou de l'énoncé

On sait que la voiture possède une vitesse uniforme sur le virage : sa vitesse est constante.

Attention ! On parle ici de la vitesse **instantanée** $v(t)$!! Le vecteur vitesse $\vec{v}$ lui varie.

On en déduit que

$$v^2(t) = (r\dot{\theta})^2 = v_A \text{ donc que } \dot{\theta}^2 = \frac{v_A^2}{R^2}$$

La vitesse angulaire est constante. Le mouvement est uniforme car il se fait à vitesse constante MAIS le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = v_A\vec{e}_\theta$ varie car $\vec{e}_\theta$ varie.

On a donc $\ddot{\theta} = 0$ et on peut réécrire l'accélération comme :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v_A^2}{R}\vec{e}_r$$

Propriété. Mouvement circulaire uniforme

Lors d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète : orienté suivant $-\vec{e}_r$.

On en déduit donc que, pour que la voiture ne dérape pas il faut que :

$$\frac{v_A^2}{R} < \frac{3}{4}g \Rightarrow v_A < \sqrt{\frac{3}{4}Rg}$$

▶ Retour aux coordonnées : vecteur vitesse et position

La vitesse instantanée $v(t)$ est égale à v_A et s'écrit comme :

$$v(t) = |R\dot{\theta}| = v_A$$

Attention ! La vitesse angulaire possède un signe !!

- ▷ $\dot{\theta} < 0$ si le mouvement tourne dans le sens horaire
- ▷ $\dot{\theta} > 0$ si le mouvement tourne dans le sens trigonométrique

Le mouvment se fait dans le sens horaire donc $\dot{\theta} = -v_A/R$.

On a trouvé le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = -v_A\vec{e}_\theta$ qui est bien orienté suivant $-\vec{e}_\theta$, comme sur le schéma.

En intégrant $\dot{\theta} = -v_A/R$ on a :

$$\theta(t) = \frac{v_A}{R}t + C \text{ avec C une constante à déterminer}$$

CI : à $t = 0$, la voiture est au début du virage. Elle forme un angle $\theta(t = 0) = \pi/2$. Soit :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{v_A}{R}t$$

Temps de fin de virage :

La voiture finit son virage quand $\theta(T) = -\pi/2$ soit pour un temps T :

$$T = \frac{\pi R}{v_A}$$

En prenant la vitesse maximale $v_A = \sqrt{\frac{3}{4}Rg}$ on obtient un temps limite :

$$T = \pi\sqrt{\frac{4R}{3g}}$$

Finalement le temps du virage augmente avec R : plus on prend un virage peu serré, plus on finira rapidement son virage.

Application 5 : *On étudie désormais le mouvement de la voiture 2. Cette dernière entame son virage avec un rayon $R_2 > R_1$. Elle réalise son mouvement à vitesse angulaire ω constante mais, afin de rattraper la voiture 1, elle réduit progressivement le rayon de sa trajectoire :*

$$r(t) = R_2 e^{-t/\tau}$$

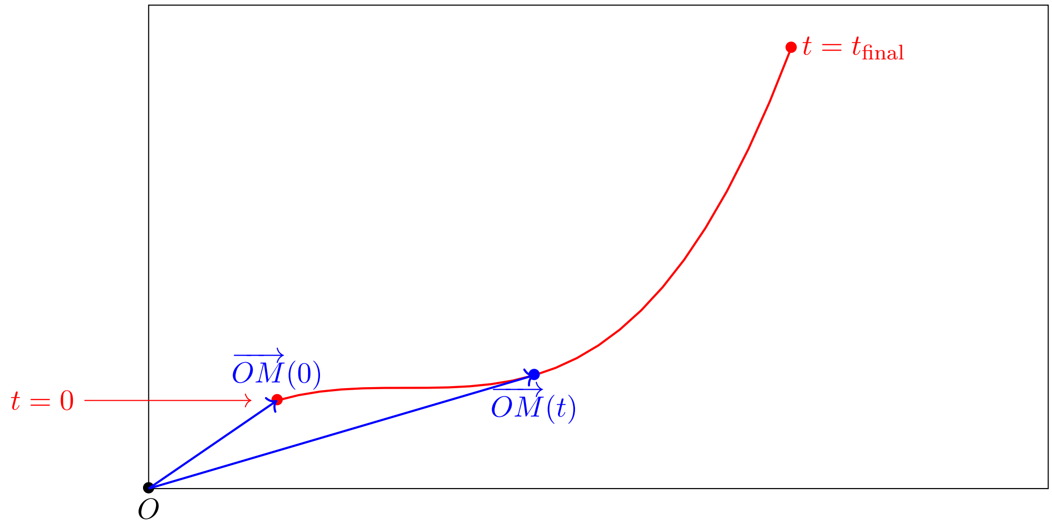
1. *Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction de R_2, τ et du temps.*
2. *Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.*
3. *Exprimer la vitesse v de la voiture 2 au cours du temps. Donner v_0, la vitesse de la voiture 2 à $t = 0$.*
4. *Pour ne pas se faire "flasher" par un radar, le pilote souhaite maintenir tout au long du virage une vitesse constante $v_0 = 50 km/h$. Montrer que pour ce faire, le pilote doit modifier sa vitesse angulaire ω telle que :*

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{v_0 e^{2t/\tau}}{R_2^2} - \frac{1}{\tau^2}}$$

4 Etude de la trajectoire d'un point et repère de Frenet

4.1 Rappel du lycée : étude d'une trajectoire

On se place **dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$.** On note O le centre du repère et $M(t)$ la position d'un point mobile au temps t.



Définition. Trajectoire
Une **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point M au cours du temps.

Propriété. Vitesse et trajectoire
Le vecteur cinématique vitesse est **tangent** à la trajectoire.

▶ Mouvement accéléré / décéléré / uniforme

Définition.
On dit qu'un mouvement est **accéléré** (resp. **décéléré**) si la norme de la vitesse $|\vec{v}|$ augmente (resp. diminue).
On dit que le mouvement est **uniforme** lorsque $|\vec{v}|$ est constante.

Attention ! On parle de LA NORME $|\vec{v}|$ de la vitesse. LE VECTEUR vitesse $\vec{v}$, notamment sa direction, quant à lui peut varier au cours du temps.

▶ Mesure des vecteurs cinématique à l'aide d'un film

Différence entre vitesse instantanée et vitesse moyenne

- Les vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ sont des vecteurs **instantanés**, ils sont définis au temps t quel que soit le temps. Expérimentalement il est **impossible** d'obtenir une information sur ces quantités à tout instant.

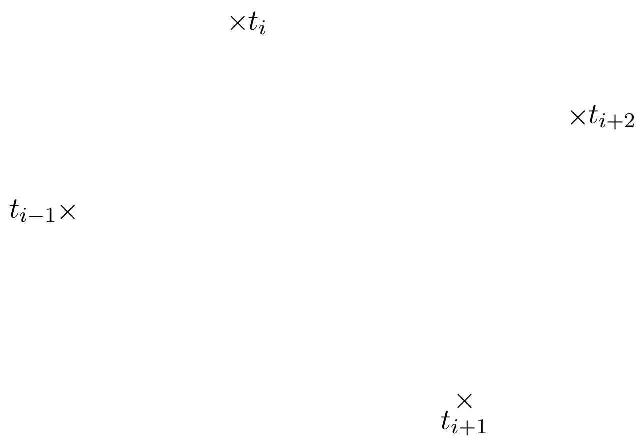
- Lors d'un film par exemple, on enregistre une image à chaque instant t_i avec un intervalle régulier Δt entre eux images : $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. On définit alors, pour tous les temps t_i,
  - le vecteur cinématique position $\overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OM}(t_i)$;
  - le vecteur cinématique vitesse **moyen** par une dérivée discrète
  $$\vec{v}_i = \vec{v}(t_i) = \frac{\overrightarrow{OM}(t_{i+1}) - \overrightarrow{OM}(t_i)}{\Delta t} \ ;$$
  - le vecteur cinématique accélération **moyen** par une dérivée discrète
  $$\vec{a}_i = \vec{a}(t_i) = \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t} \ .$$

  On ne mesure que **des grandeurs moyennes** entre deux points. Plus l'intervalle de temps Δt est petit, plus nos mesure moyenne se rapproche de la valeur instantanée.

Application 6 : *Obtenir la position à l'instant t_{i+1} en fonction de $\overrightarrow{OM}_i$, $\vec{v}_i$ et Δt.*

Application 7 : *Obtenir l'expression de l'accélération en fonction des vecteurs positions $\overrightarrow{OM}(t_i)$.*

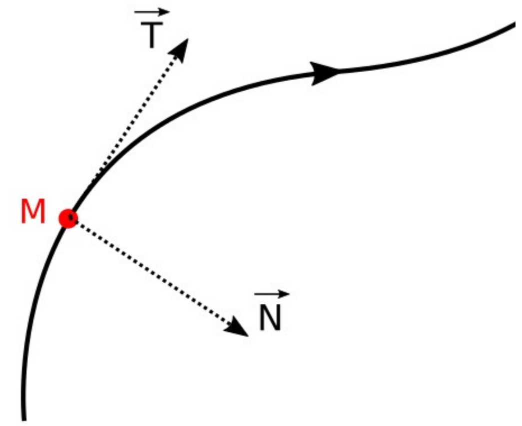
> **Exemple 9 :** *On donne la position d'un point mobile aux instants t_i, t_{i-1} t_{i+1} et t_{i+2} avec $\Delta t = 2s$. Représenter $\vec{v}_i$, $\vec{v}_{i-1}$, $\vec{v}_{i+1}$ et $\vec{a}_i$.*



4.2 Base de Frenet et rayon de courbure

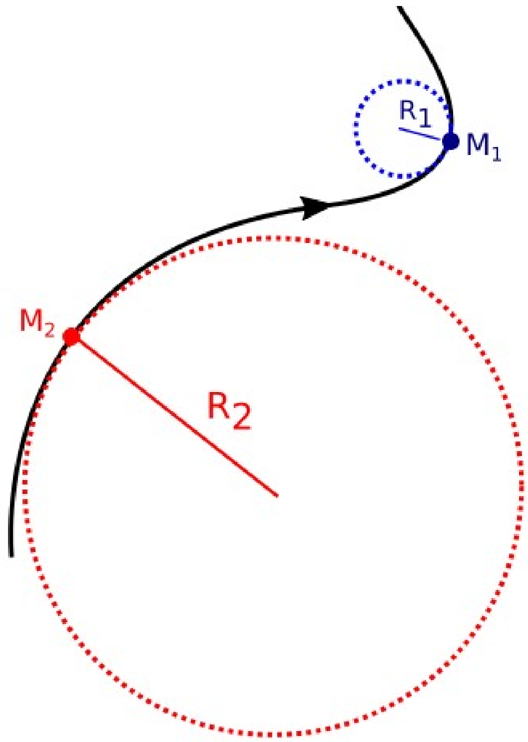
Pour étudier une trajectoire plane, il est parfois utile d'utiliser la base de Frenet

Définition. Base de Frenet
Elle est constitué de deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{\mathcal{T}}$ et $\vec{\mathcal{N}}$ tels que :
- ▷ $\vec{\mathcal{T}}$ est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement
- ▷ $\vec{\mathcal{N}}$ est orthogonal à $\vec{\mathcal{T}}$, orienté vers l'intérieur de la courbe



Attention ! A la différence des coordonnées cylindrique, $\vec{\mathcal{N}}$ est toujours orienté vers l'intérieur de la trajectoire, contrairement à $\vec{e}_r$.

Définition. Rayon de courbure
On appelle rayon de courbure R_M au point M de la trajectoire le rayon du cercle fictif qui superpose localement la trajectoire au point M.



Propriété. Rayon de courbure et forme de la trajectoire
Plus la trajectoire est incurvée, plus le rayon de courbure est grand.

Propriété. Vecteur vitesse et accélération
On appelle $v(t)$ la vitesse instantanée.

▷ **Vecteur vitesse** $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\mathcal{T}}$$

▷ **Vecteur accélération** $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\mathcal{T}} + \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{\mathcal{N}}$$

où $R(t)$ en le rayon de courbure au point M considéré.

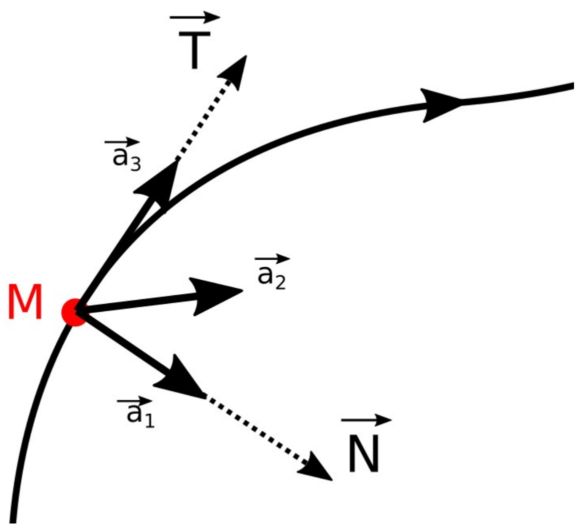
On en conclue deux propriétés importantes :

▷ **Mouvement uniforme**
Alors $v(t)$ =constante et donc :

$$\vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{\mathcal{N}}$$

L'accélération est orienté suivant l'intérieur de la trajectoire. De plus, à vitesse constante, plus la trajectoire est courbe, plus R est petit donc plus l'accélération est grande

▷ **Si la vitesse instantanée varie**
Plus la vitesse $v(t)$ varie, plus l'accélération s'aligne sur la tangente à la courbe.



▷ $\vec{a}_1$: $v(t)$ est constante : trajectoire uniforme
▷ $\vec{a}_2$: $v(t)$ augmente, l'accélération se rapproche de $\vec{\mathcal{T}}$.
▷ $\vec{a}_3$: la variation de la vitesse instantanée est très grande

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} >> \frac{v^2(t)}{R(t)}$$