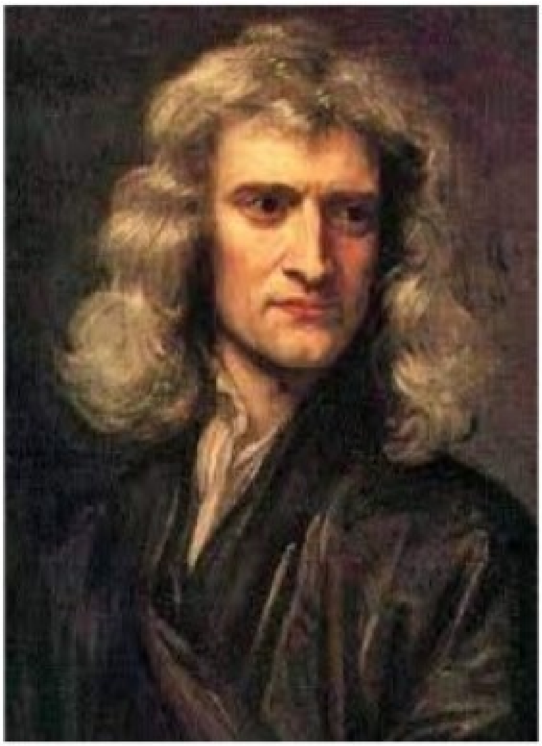
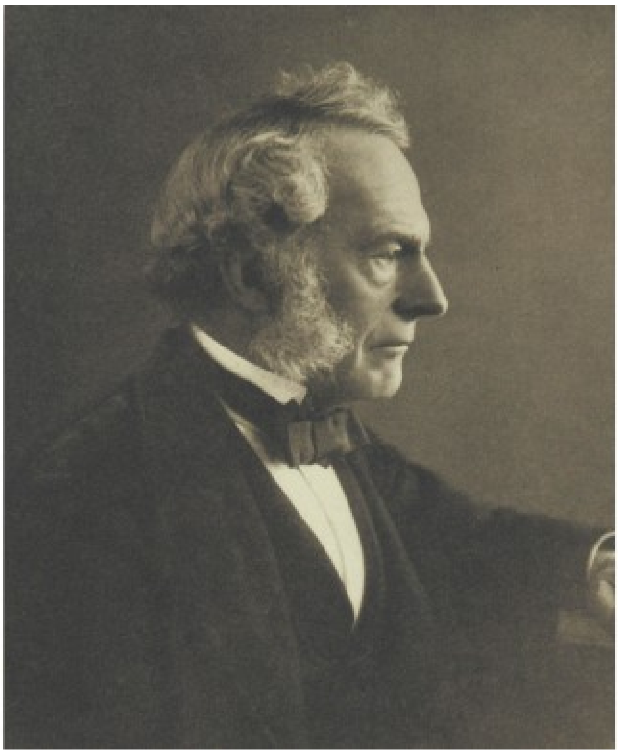
Chap XV

Principes de la mécanique newtonienne

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières





Savoirs ♡

- ♡ **Lois de ma mécanique**
  - Principe de la statique
  - Notion de référentiel galiléen et lien entre deux référentiels galiléens
  - Notion de quantité de mouvement
  - Principe fondamental de la dynamique : énoncé et conditions d'application
- ♡ **Interactions gravitationnelles**
  - force d'interaction gravitationnelle dans le cas général
  - cas particulier du poids à la surface de la Terre
- ♡ **Fils et ressorts**
  - tension d'un fil
  - transmission de la force par un fil
  - force de rappel d'un ressort
- ♡ **Forces de frottements**
  - force de frottement fluide : modèle à petite et haute vitesse
  - réaction d'un support solide : force normale et force tangentielle
  - loi de Coulomb sur les forces de frottements solides
    1. cas statique
    2. cas dynamique

Savoir Faire

Réaliser un bilan des forces
- *Reconnaître les forces qui s'appliquent sur un système et les représenter sur un schéma*
- *Établir les expressions des forces à l'aide des vecteurs de la base et des coordonnées*
- *Appliquer le principe de la statique pour trouver une condition d'équilibre*

Application du PFD
- *obtenir l'accélération du point matériel (cinématique !!!)*
- *obtenir les équations du mouvement en projetant la deuxième loi de Newton*

Cas particuliers à bien maîtriser
1. *mouvement dans un champ de pesanteur uniforme*
   - *sans frottements*
   - *avec frottements fluides*
   - *avec des frottements solides sur un plan incliné*
2. *mouvement circulaire d'un pendule avec et sans frottements fluides*
3. *condition d'équilibre d'une masse sur un plan incliné*
4. *cas d'une masse au bout d'un ressort*
   - *mouvement horizontal*
   - *mouvement vertical*

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'étude du mouvement sans nous être penché sur ses causes. Grâce aux lois établies par Isaac Newton en 1687 dans son ouvrage *Philosophiae naturalis principia mathematica*, nous allons introduire la notion de force et relier cette dernière à la cinématique pour étudier le mouvement et ses causes.

1 Notion de forces et principe de la dynamique

1.1 Notion de force et principe de la statique

▶ Force : qu'est-ce que c'est ?

Définition. Force
Une force caractérise l'action d'un système matériel $\mathcal{S}$ sur un point matériel M.
C'est un vecteur : $\vec{F}_{\mathcal{S}\to M}$ et son unité est le newton (N=kg.m.s^{-2}).

Une force permet de mettre en mouvement (translation ou rotation) un objet ou de le déformer.

Propriété. Invariance d'une force
Une force est indépendant du référentielle d'étude : elle s'applique de la même façon quelque soit l'observateur.

▶ Equilibre d'un point : principe d'inertie

Définition. Equilibre mécanique
Un point est à l'équilibre mécanique si la somme des forces qui s'appliquent sui lui est nulle.

Attention ! C'est une somme vectorielle **MAIS** on ne résout **JAMAIS** des équations vectorielles : on passe toujours par leur coordonnées !

1.2 Notion de référentiel galiléen

▶ Définition et propriétés

Le principe d'inertie sert de définition à la notion de repère galiléen.

Définition. Référentiel galiléen
Un référentiel est qualifié de galiléen si, dans ce référentiel, un point matériel à l'équilibre conserve son mouvement rectiligne uniforme.

Propriété. Lien entre deux référentiels galiléens
Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiéen.

En réalité, les référentiels rigoureusement galiléens n'existent pas mais on peut en considérer certains comme "supposés galiléens".

Attention ! On débutera toujours **toujours** <u>**TOUJOURS**</u> un problème de mécanique en précisant le référentiel utilisé ainsi sa nature galiléenne, ou non.

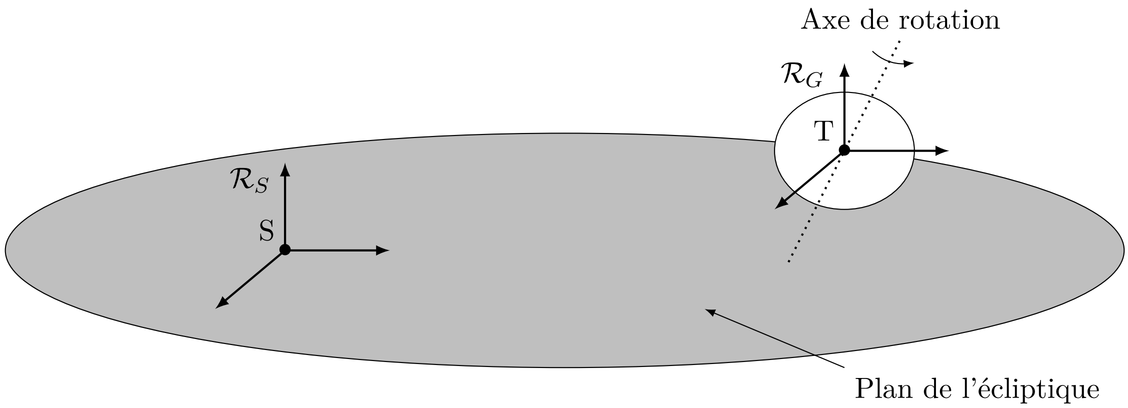
Le principe d'inertie n'est pas un "vrai principe" : c'est la définition d'un référentiel galiléen. Néanmoins, on s'en servira comme loi. On l'appelle souvent la première loi de Newton.

Propriété. Principe d'inertie
Dans un référentiel galiléen, un point matériel est immobile ($\sim$ à l'équilibre), si la somme de ses forces extérieures est nulle.

▶ Quelques référentiels galiléens classique

Les référentiels les plus utiles sont définis par une horloge placée sur Terre et par un repère particulier. Ce sont

- ▷ le référentiel **héliocentrique** $\mathcal{R}_S$ qui a pour origine le centre de masse du système solaire, soit approximativement le centre du Soleil et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel.
  Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif du Soleil dans la galaxie, soit une durée inférieure à plusieurs années ;
- ▷ le référentiel **géocentrique** $\mathcal{R}_G$ qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel.
  Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif de la Terre autour du Soleil, soit une durée courte devant une année ;
- ▷ le référentiel **terrestre** $\mathcal{R}_T$, ou référentiel du **laboratoire**, qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont fixes par rapport à la Terre.
  Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'une rotation significative de la Terre, soit une durée courte devant une journée. C'est le référentiel dans lequel nous étudierons la plupart des systèmes en CPGE.



1.3 Les lois de Newton

Les lois de Newton définies ici sont la base de toute la mécanique classique. Elles ont été établies en 1687 et permettent toujours de décrire une grande partie des mouvements mécaniques. On les sépare généralement en trois :

- ▷ le principe d'inertie
- ▷ le principe fondamentale de la dynamique
- ▷ la loi des actions réciproques

Nous avons déjà rencontré le principe d'inertie, nous allons nous concentrer sur les deux autres.

▶ Quantité de mouvement

Quantité de mouvement d'un point matériel

> ***Expérience 1 :*** *Lancer une balle dans la tête de quelqu'un :*
> - ▷ *plus on lance la balle fort, plus ça fait mal : la vitesse joue*
> - ▷ *plus la balle est lourde, plus ça fait mal : la masse joue*

Définition. Quantité de mouvement
On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$. La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Attention ! la quantité de mouvement, tout comme la vitesse dépend du référentiel d'étude ! !

Quantité de mouvement de deux points matériels

Considérons deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2. Dans un référentiel $\mathcal{R}$ on mesure la vitesse de ces deux points, noté $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

Propriété. Quantité de mouvement d'un système de deux points
La quantité de mouvement du système composé des deux points M_1 et M_2, noté $\{M_1, M_2\}$ est égal à la somme des deux quantités de mouvement :

$$\overrightarrow{p_{tot}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$$

On peut alors étendre ce principe à autant de point que l'on veut :

$$\overrightarrow{p_{tot}} = \sum_i^N m_i\overrightarrow{v_i}$$

▶ La deuxième loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique

Propriété. Principe Fondamental de la Dynamique
Dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, l'accélération d'un point matériel de masse m vérifie :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to M} \ .$$

Principe d'inertie
Pour $\vec{a} = \vec{0}$, on a $\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to M} = \vec{0}$.
On retrouve le principe fondamental de la statique.

Attention ! Cette forme est une version simplifiée de la deuxième loi de Newton.
En effet celle-ci stipule que la dérivée de la quantité de mouvement d'un système de point est égal à la somme des forces extérieur :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Comme $\vec{p} = m\vec{v}$ alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

Si la masse est constante on retrouve bien le PDF.

Méthode en DS. Bien appliquer le PFD
1. Définir le système (point matériel étudié) + préciser le référentiel **galiléen**
2. Faire un **SCHEMA** où on fait apparaître
   - ▷ le point matériel
   - ▷ les vecteurs de la bases et les coordonnées
   - ▷ les forces
3. écrire chaque force à l'aide des vecteurs de la base
   Attention ! A la fin, ne doit apparaitre comme vecteur que ceux de la base choisie !!

▶ La troisième loi de Newton : la loi des actions réciproques

Théorème.
Soient deux points M_1 et M_2 en interactions. Alors les forces exercées du point 1 sur le point 2 sont égales à l'opposé des forces exercées du point 2 sur le point 1

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}} \ .$$

Fig. 1 – Le principe des actions réciproques.

2 Force classique

On décrit ici les différentes forces qu'on rencontrera au cours de l'année. L'interaction électrostatique coulombienne sera décrite plus en avant dans le chapitre qui lui sera consacrée. Chaque force est accompagnée d'un exemple d'application qui permettra de la comprendre et de la maîtriser.

Connaître la force c'est savoir refaire l'exercice ! !

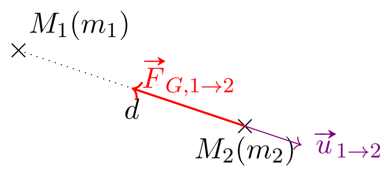
2.1 Force d'interaction gravitationnelle et poids

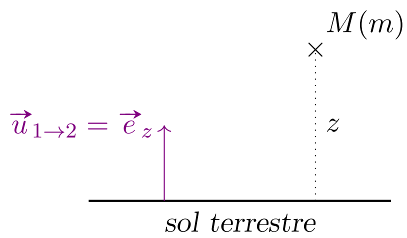
Définition. Force d'interaction gravitationnelle

On considère une particule de masse m_1 et une autre de masse m_2. La particule 1 exerce une force d'interaction graviationelle sur la particule 2 :

$$\vec{F}_{G,1\to 2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{d^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

- ▷ $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle
- ▷ d la distance entre les centres de masse des deux particules
- ▷ $\vec{u}_{1\to 2}$ un vecteur unitaire allant de 1 vers 2.



> **Exemple 1 : *Force d'interaction gravitationnelle à la surface de la Terre***
>
> *Considérons une masse m à la surface de la Terre. Exprimer la force d'interaction gravitationnelle en fonction de R_T le rayon terrestre, z l'altitude de la masse, M_T la masse de la Terre et $\mathcal{G}$.*
>
> ***CORRECTION***
>
> *La distance entre le centre de la Terre et la masse est $d = R_T + z$. De plus le vecteur unitaire reliant le centre de la Terre à la masse est le vecteur unitaire verticale, orienté vers le haut $\vec{e}_z$.*
>
> *Finalement*
>
> $$\vec{F}_{G,T\to m} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{(R_T+z)^2}\vec{e}_z$$
>
> 
>
>
> *Or l'altitude d'un point z est toujours très faible devant le rayon terrestre si on reste proche de la surface $R_T = 6400$km»8.9km sur l'Everest. Donc : $R_T + z \simeq R_T$. Soit :*
>
> $$\vec{F}_{G,T\to m} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{(R_T+z)^2}\vec{e}_z = m \times \underbrace{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}}_{\simeq 9.81 m.s^{-2}}\vec{e}_z$$

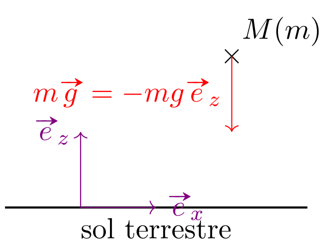
Définition. Le poids

A la surface de la Terre, la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet de masse m s'appelle le poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$

avec $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur, orienté vers le sol.

On a $g \simeq 9.81$m.s^{-2}.



Attention ! Ne pas compter l'attraction terrestre deux fois ! !

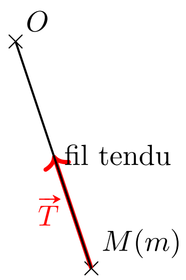
2.2 Force de tension d'un fil inextensible

On considère un fil inextensible et sans masse et on attache à son extrémité une masse m. L'autre extrémité est fixé au niveau du point O.

Définition. Rappel d'un fil

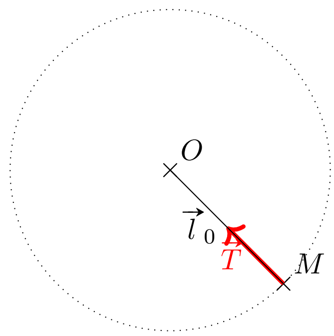
La tension $\vec{T}$ du fil est la tension exercée par le fil sur la masse. Deux cas de figure :

- le fil est détendu : la force $\vec{T}$ est nul
- le fil est tendu : la force $\vec{T}$ est suivant le fil et point vers le point d'accroche O.



Attention ! Quand le fil en tendu on ne connaît *a priori* **JAMAIS** la valeur de T !!

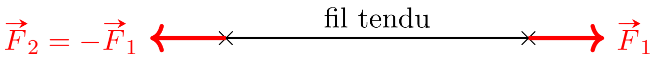
Astuce pratique :
- **(important)** le plus souvent $\vec{T}$ varie avec le mouvement. On peut trouver son expression une fois qu'on a résolu l'équation du mouvement de la masse.
- une fois qu'on a $\vec{T}$ on peut chercher quand est-ce qu'elle s'annule : on saura quand le fil se détend

> **Exemple 2 :** *Une masse m est posée sur une table et attachée au bout d'une corde inextensible et sans masse de longueur l_0. On imprime à la masse un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire ω.*
> *Donner la tension $\vec{T}$ de la corde.*
>
> ***CORRECTION***
>
> *On commence par un* ***SCHEMA*** *!!*
>
> 
>
>
> ***Partie cinématique*** *: on décrit d'abord le mouvement de la masse*
> - *chois d'un système de coordonnées : on prend un repère polaire de centre O, centre de la trajectoire de la masse.*
> - *vecteurs cinématiques de la masse en mouvement circulaire uniforme :*
>
> $$\text{position } \overrightarrow{OM} = l_0 \vec{e}_r \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = l_0\omega\vec{e}_\theta \Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = -l_0\omega^2 vece_r$$
>
> ***Partie mécanique :*** *on décompose les force dans les vecteurs de la base*
> - *tension $\vec{T}$ du fil : orienté le long du fil, a priori vers l'intérieur de la trajectoire : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$*
>
> ***Partie dynamique :*** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
> - *référentiel : terrestre supposé galiléen*
> - *PFD : $m\vec{a} = \vec{T}$ soit $-ml_0\omega^2\vec{e}_r = -T\vec{e}_r$*
>   *On a alors $T = ml_0\omega^2$.*

Propriété. Transmission de la force par un fil

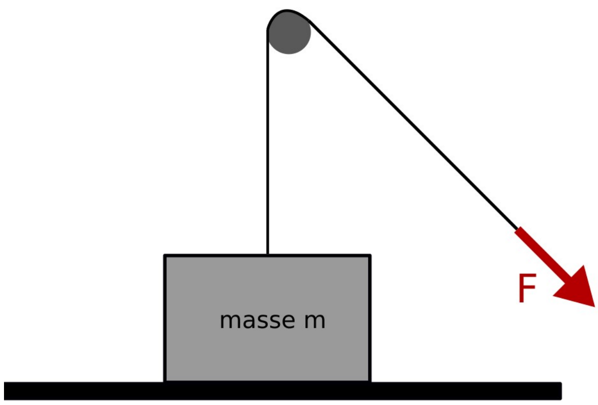
Un fil transmet intégralement la force : si une force $\vec{F}_1$ est appliquée à une extrémité, alors une force $\vec{F}_2$ est appliquée à l'autre extrémité

- ▷ de même intensité $F_1 = F_2$
- ▷ orienté suivant la direction du fil



Attention ! le fil peut être "tordu" : $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ne sont pas forcément alignés !

Exemple 3 :



La force $\vec{F}$ est transmise par le câble jusqu'à la masse. On soulèvera cette dernière si $F > mg$.

2.3 Force de rappel d'un ressort

Un ressort est un modèle théorique qui permet de représenter efficacement bon nombre de systèmes.

Caractéristique d'un ressort

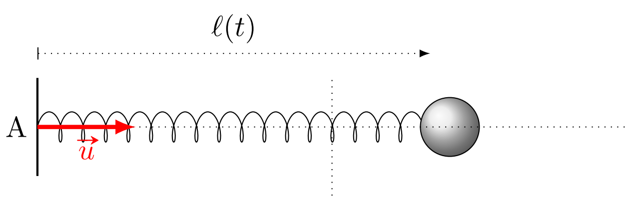
- ▷ sa **longueur à vide** ℓ_0 qui correspond à la longueur du ressort au repos ;
- ▷ sa **raideur** k qui s'exprime en N/m.

Définition. Force de rappel d'un ressort

Lorsque le ressort est déformé, il exerce une **force de rappel** sur l'extrémité mobile. Cette force est donnée par

$$\boxed{\vec{F}(t) = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}}$$

- ▷ $\ell(t)$ la longueur à l'instant t du ressort
- ▷ $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de l'autre extrémité vers l'extrémité considérée.



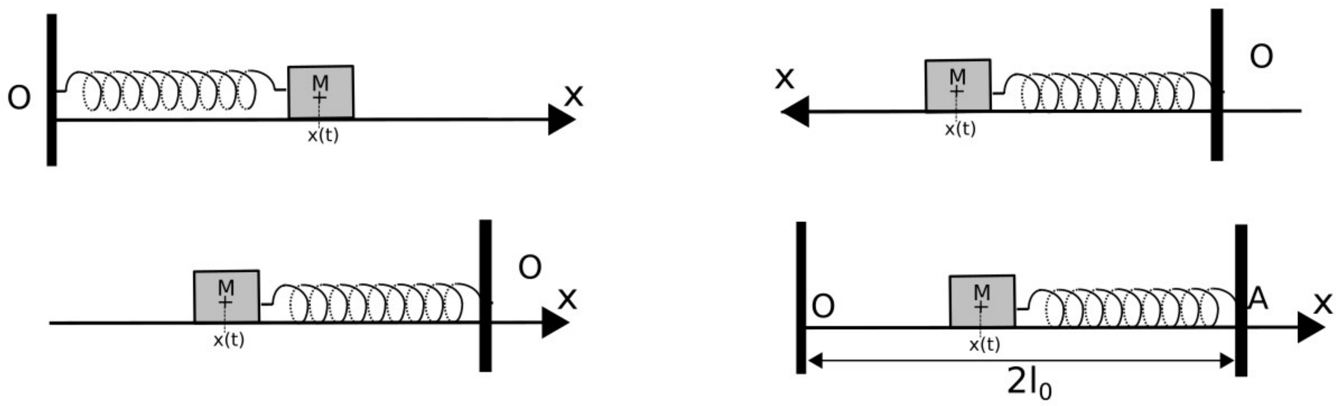
Attention ! signe de la force !!!

- • ressort étiré : $\ell - \ell_0 > 0 \Rightarrow$ la force est dirigée pour le comprimer ;
- • ressort comprimé : $\ell - \ell_0 < 0 \Rightarrow$ la force est dirigée pour l'étirer.

Méthode en DS. Bien exprimer la force de rappel du ressort :

1. on donne la forme théorique de la force : $\vec{F}(t) = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}$
2. on **place** sur le schéma **puis** on exprime le vecteur $\vec{u}$ à l'aide des vecteur du système de coordonnées choisi
3. on **place** sur le schéma **puis** exprime la longueur $l(t)$ l'aide des coordonnées choisies

> **Exemple 4 :** *Exprimer la force de rappel du ressort (caractéristique k et l_0) exercée sur la masse m dans les différents cas suivant. En déduire la position d'équilibre.*
> *A chaque fois on a choisi un système de coordonnées cartésiens $(O, \vec{e}_x)$.*



CORRECTION

Pour chaque exemple, on applique tranquillement la méthode et on trouve

- ▷ *(haut gauche)* $-\left(x(t) - l_0\right)\vec{e}_x$
- ▷ *(haut droite)* $-k\left(x(t) - l_0\right)\vec{e}_x$
- ▷ *(bas gauche)* $-k\left(-x(t) - l_0\right)\left(-\vec{e}_x\right) = -k\left(x(t) + l_0\right)\vec{e}_x$
- ▷ *(bas droite)* $-k\left(2l_0 - x(t) - l_0\right)\left(-\vec{e}_x\right) = k\left(l_0 - x(t)\right)\vec{e}_x$

> **Application 1 :** *Une masse m est attachée au bout d'un ressort verticale de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée à un clou au mur.*
> *A l'équilibre, montrer que l'étirement l_{eq} du ressort est $l_{eq} = l_0 + mg/k$.*

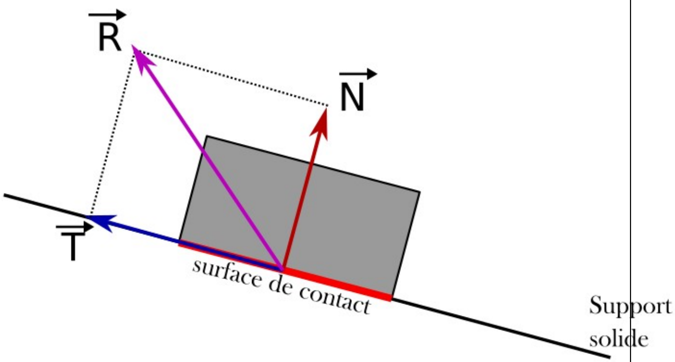
2.4 Force de frottement solide : lois de Coulomb

▶ Décomposition de la réaction

Définition. Réaction du support
On considère une masse m en contact avec un support solide. La réaction du support est la force exercée par le solide sur la masse m. Elle s'exerce au centre de la surface de contact.

Elle est composée **de deux parties :**

- ▷ la réaction normale $\vec{N}$: elle est perpendiculaire au support, orienté du support vers la masse
  Elle empêche que la masse "rentre" dans le support.
- ▷ la réaction tangentielle $\vec{T}$: elle est tangente à la surface de contact
  Elle est du aux frottements entre le solide et la masse.



La réaction du support est la somme des deux :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

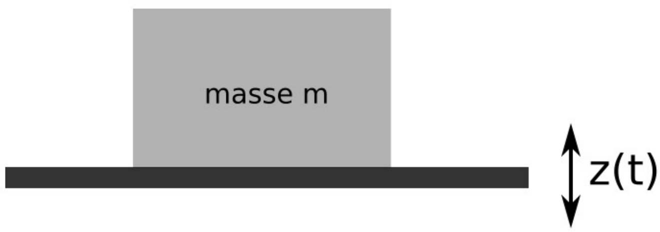
Propriété. Réaction du support et frottement
On ne peut JAMAIS connaître à l'avance les valeurs de N et T !

- ▷ la réaction normale $\vec{N}$ empêche la masse de rentrer dans le support : **elle ne peut jamais être négligée**. Lorsque $\vec{T}$ s'annule, il y a perte de contact.
- ▷ la réaction tangentielle $\vec{T}$ représente les frottements entre la masse et le support : elle peut être négligée dans certains cas (exemple : glace, chaussée glissante, ...)

Attention ! "On néglige les frottements solides" $\iff$ "On néglige $\vec{T}$"
A ce moment là $\vec{R} = \vec{N}$ mais c'est un cas particulier ! !

Astuce pratique : chercher si un contact est rompu avec le support $\iff$ chercher à annuler $\vec{N}$.

> ***Exemple 5 :***
>
> *Une masse m est posée sur une plate-forme mobile lui imposant un mouvement verticale $z(t) = Z_0 \cos \omega t$. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.*
>
> 1. *Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique pour la masse m.*
> 2. *Pour quelle valeur de ω, la masse se détache du support ?*



CORRECTION

▷ **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
on choisit un système de coordonnées cartésien avec un axe (Oz) vertical

position $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z = Z_0 \cos\omega t \vec{e}_z \Rightarrow$ vitesse $\vec{v} = -Z_0\omega \sin\omega t \omega \vec{e}_z \Rightarrow$ accélération $\vec{a} = -Z_0\omega^2\omega^2 \cos\omega t \vec{e}_z$

▷ **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
- ▷ le poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- ▷ réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{e}_z$

▷ **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \Rightarrow -mZ_0\omega^2 \cos\omega t = -mg\vec{e}_z + N\vec{e}_z \Rightarrow N = mg - Z_0\omega^2 \cos\omega t$$

Pour qu'il y ait décollage, $N = 0$ donc, en prenant la valeur maximale du cos on a : $mg - Z_0\omega^2 = 0$ donc $\omega = \sqrt{mg/Z_0}$.

▶ Partie tangentielle : frottement solide et lois de Coulomb

Attention ! *Loi délicate si on ne prend pas le temps de bien la comprendre ! Bien maîtriser l'exemple.*

Propriété. Loi de Coulomb : loi des frottements solide
- ▷ **Cas statique :**
tant que $|\vec{T}| < f|\vec{N}|$ la masse ne glisse pas. Si l'inégalité est rompu la masse se met alors à glisser le long du support solide
- ▷ **Cas dynamique :**
si la masse glisse le long du support alors $|\vec{T}| = f|\vec{N}|$ et $\vec{T}$ est dans la direction opposée à la vitesse de la masse.

Coefficient de friction solide f .
C'est un nombre sans dimension, inférieur à 1, qui traduit l'état du support solide. Il est notamment très faible pour des surface glissante (glace, surface humide ou graissée, ...).

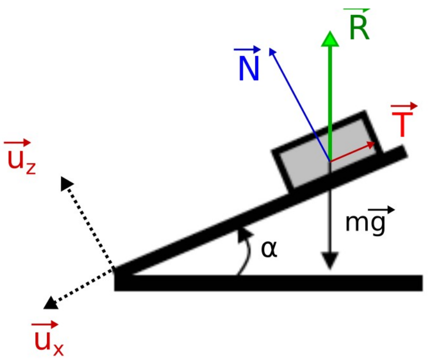
Attention ! Inégalité et égalité sur les normes de vecteurs ! !

Exemple 6 : ***Masse sur un plan incliné***
Attention ! exercice ultra-classique, si on le maîtrise, on a compris !

On étudie une masse m déposée sur un plan incliné qui forme un angle α avec l'horizontale. On appelle f le coefficient de friction solide entre la masse et le plan.

1. *Introduire un système de coordonnées cartésiennes qui permet l'étude de la réaction du support de façon simple.*
2. *Exprimer dans ce système de coordonnées le poids $m\vec{g}$ de la masse.*
3. ***Cas statique***
On considère la masse initialement immobile. Exprimer la condition entre T et N puis, à l'aide du principe d'inertie, exprimer l'angle α_c à partir duquel la masse se met à glisser à l'aide de f.
4. ***Cas dynamique***
On suppose désormais que $\alpha > \alpha_c$: la masse glisse le long du plan incliné. Donner l'expression de la force de frottement.

On commence par un ***SCHEMA***



1. On choisit un système de coordonnées cartésien, incliné avec le plan.
2. En projetant le poids (**Attention !** méthode !!), on a :

$$m\vec{g} = mg\,(-\cos\alpha\,\vec{u}_z + \sin\alpha\,\vec{u}_x)$$

3. **Cas statique**

▷ **Partie mécanique** : *on décompose les forces dans la base*
- ▷ poids $m\vec{g} = mg\,(-\cos\alpha\,\vec{u}_z + \sin\alpha\,\vec{u}_x)$
- ▷ réaction normale $\vec{N} = +N\vec{u}_z$
- ▷ réaction tangentielle $\vec{T} = -T\vec{u}_x$

à l'équilibre la sommes des forces extérieures est nulle : $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$.
On décompose suivant les deux axes :

$$\text{axe } \vec{u}_x \ : \ mg\sin\alpha - T = 0 \ \text{ et axe } \vec{u}_z \ ; \ -mg\cos\alpha + N = 0$$

On trouve alors $N = mg\cos\alpha$ et $T = mg\sin\alpha$.

Loi de Coulomb : pas de glissement si $T < fN$ donc si $mg\sin\alpha < fmg\cos\alpha$ donc si $\tan\alpha < f$.
On définit donc α_c tel que $\tan\alpha_c = f$.

4. **Cas dynamique**

l'écriture des forces restent vraie sauf que désormais il faut prendre en compte l'accélération !

▷ **Partie cinématique :** *on décrit le mouvement de la masse*
avec le système de coordonnées, le mouvement se fait le long de l'axe $\vec{u}_x$

$$\text{position } \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x \Rightarrow \ \text{vitesse } \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x \Rightarrow \ \text{accélération } \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$$

▷ **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \text{ on projette sur les axes } \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -T + mg\sin\alpha \\ 0 = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$

On trouve $N = mg\cos\alpha$ (*comme pour le cas statique finalement*)
Comme il y a glissement, les lois de Coulomb stipule $T = fN = fmg\cos\alpha$.

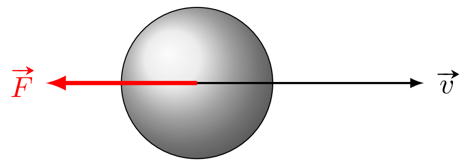
2.5 Force de frottements fluides

Un solide se déplaçant dans un fluide subit une force de la part de ce dernier : c'est ce qu'on ressent quand on fait du vélo ou qu'on nage dans une piscine. Pour se déplacer dans un fluide, on le force à s'écouler autour de nous. En réponse, ce dernier exerce une force appelée **force de trainée**.

Définition. Force de trainée

Soit un fluide au repos dans un référentiel $\mathcal{R}$ et un poit matériel animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans ce référentiel. La force de frottement fluide ou force de trainée est une force de freinage qui s'oppose au mouvement : sa direction est opposée à celle du vecteur vitesse $\vec{v}$.

Deux modèles alors :
- ▷ pour les faibles vitesses : la force est proportionnelle à la vitesse : $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$.
- ▷ pour de grandes vitesses, la force est proportionnelle au carrée de la vitesse : $\vec{F}_\kappa = -\kappa v \vec{v}$



Attention ! Ce qui compte c'est la différence de vitesse entre le point matériel et le fluide.

> ***Exemple 7 :*** *On s'intéresse au mouvement en 2D d'un masse, repéré dans un système de coordonnées cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.*
> 1. *Donner la dimension des coefficients α et κ, coefficients de frottement à haute et basse vitesse.*
> 2. *On suppose que la vitesse est faible. Exprimer la force de frottement fluide.*
> 3. *On suppose que la vitesse est élevée. Exprimer la force de frottement fluide.*

CORRECTION

1. ▷ force à basse vitesse : $[F] = [\alpha][v]$ donc $[\alpha] = [F]/[v]$ =kg.m.s^{-2}/(m.s^{-1})=kg.s^{-1}
   ▷ force à haute vitesse : $[F] = [\kappa][v^2]$ donc $[\alpha] = [F]/[v^2]$ =kg.m.s^{-2}/(m.s^{-1})^2=kg.m^{-1}
2. Dans le cas d'une vitesse faible : $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$.
   Partie cinématique : *on décrit le mouvement de la masse*
   avec le système de coordonnées,

   position $\overrightarrow{OM} = x(t) + \vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ vitesse $\vec{v} = \dot{x}(t) + \vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ accélération $\vec{a} = \ddot{x}(t) + \vec{e}_x + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$

   on a donc $\vec{F} = -\alpha\left(\dot{x}(t) + \vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z\right)$
3. Dans le cas d'une vitesse élevée : $\vec{F} = -\kappa v(t)\vec{v}$.
   Partie cinématique : *on décrit le mouvement de la masse*
   avec le système de coordonnées,

   position $\overrightarrow{OM} = x(t) + \vec{e}_x + z(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ vitesse $\vec{v} = \dot{x}(t) + \vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ accélération $\vec{a} = \ddot{x}(t) + \vec{e}_x + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$

   avec $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$. On a donc $\vec{F} = -\kappa\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \times \left(\dot{x}(t) + \vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z\right)$

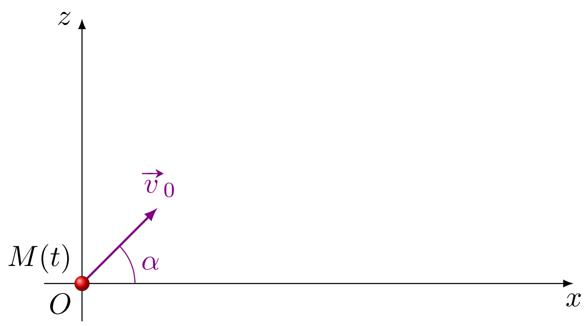
3 Exemples classiques de mouvement : la chute libre et le mouvement d'un pendule

*Rien n'est à apprendre ici sauf **la méthode de résolution qui doit être tout le temps la même !***

3.1 Lois horaires de la chute libre sans frottements

La méthode développée ici sera à étendre à tous les exercices de mécanique qu'on traitera. On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$.

> *Exemple 8 : On étudie le mouvement d'une masse m lancée avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ depuis le sol (altitude nulle) formant un angle α avec l'horizontale. On considère que durant son trajet, la masse n'est soumise qu'à son poids.*
>
> 1. *Obtenir les équations scalaires du mouvement.*
> 2. *En déduire les lois horaires du mouvement.*
> 3. *Déterminer l'altitude maximale de la masse au cours du temps.*
> 4. *Déterminer la trajectoire $z(x)$ décrite par la particule au cours de son mouvement.*
> 5. *Déterminer la distance parcourue par la masse quand elle retombe au sol. En déduire la valeur optimale de l'angle de lancer α*



Attention ! C'est un problème de **dynamique**. Cela veut dire qu'on étudie à la fois le mouvement (cinématique) et ses causes (mécanique).
Il y a des forces mais on ne perd donc pas ses bonnes habitudes de cinématique!!!

CORRECTION

1. *Les équations du mouvement sont des équations différentielles qui régissent l'évolution des coordonnées : $\sim$ c'est le PFD projeté.*
   - **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
     on choisit un système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$

     position $\overrightarrow{OM} = x(t)+\vec{e}_x+z(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ vitesse $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x+\dot{z}(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ accélération $\vec{a} = \ddot{x}(t)+\vec{e}_x+\ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   - **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
     - le poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
   - **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
     référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \text{ on projette sur les axes } \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

2. *Les lois horaires du mouvement c'est l'expression des coordonnées en fonction du temps : $\sim$ c'est intégré le PFD*

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A \\ \dot{z} = -gt + B \end{cases}$$

avec A et B deux constantes d'intégrations ... "Constante d'intégration" $\Rightarrow$ Conditions Initiales!!! Ici on a intégré l'accélération, on a la vitesse.
A $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$. C'est un **VECTEUR** donc on décompose dans la base :

$$\vec{v_0} = \underbrace{v_0 \cos\alpha}_{\dot{x}(0)}\vec{e}_x + \underbrace{v_0 \sin\alpha}_{\dot{z}(0)}\vec{e}_z$$

Finalement $A = v_0 \cos\alpha$ et $B = v_0 \sin\alpha$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t + A \\ z = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + B \end{cases}$$

avec A et B deux constantes d'intégrations ... "Constante d'intégration" $\Rightarrow$ Conditions Initiales ! ! ! Ici on a intégré la vitesse, on a la position.
A $t = 0$, $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{0}$. C'est un **VECTEUR** donc on décompose dans la base :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \underbrace{0}_{x(0)} \vec{e}_x + \underbrace{0}_{z(0)} \vec{e}_z$$

donc $A = 0$ et $B = 0$.
Finalement $x(t) = v_0 \cos\alpha t$ et $z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t$.

3. *Il est important de "traduire" en formule mathématiques manipulable le texte !*
L'altitude maximale z_{max} est le maximum de $z(t)$. On cherche donc $\dot{z}(t_{max} = 0$ et $z_{max} = z(t_{max})$. On remarque qu'à l'altitude max, la vitesse verticale s'annule : la masse fait "demi-tour".

$$\dot{z}(t_{max}) = 0 \Rightarrow -gt_{max} + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

et donc $z_{max} = z(t_{max}) = -\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

4. *Pour le moment on a les coordonnées x et z en fonction du temps : $x(t)$ et $z(t)$. On veut z en fonction de x : $z[x]$.*

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ z = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ z = -\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \end{cases}$$

On a alors : $z[x] = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha x$. C'est l'équation d'une parabole.

5. *De nouveau il faut "traduire" la phrase en math !*
La distance d parcouru est la position x de la balle telle que l'altitude z est nulle. On cherche donc $z[d] = 0$.

> ***Remarque :*** *On pourrait chercher t_0 tel que $z(t_0) = 0$ et $d = x(t_0)$ mais ce serait plus long.*

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} d^2 + \tan\alpha d = 0 \;\Rightarrow\; d = 0 \text{ et } d = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha$$

Pour maximiser α il faut maximiser $\cos\alpha \sin\alpha$. Pour cela, l'angle ne doit être ni trop grand ni trop petit. C'est pour $\alpha = \pi/4 = 45°$.

Vous savez le faire : OK ... Vous savez le faire en moins de 20 minutes : là c'est acquis !

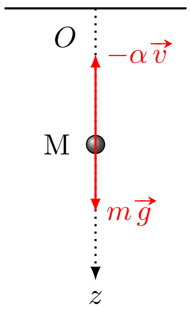
3.2 Chute libre verticale avec frottements

On s'intéresse cette fois à la chute verticale d'une masse mais, à cause de la vitesse élevée de cette dernière, les frottements fludies de l'air sont à prendre en compte.

> *Exemple 9 : On étudie la chute verticale d'une masse m sous l'action de la pesanteur. On lâche cette dernière sans vitesse initiale à l'altitude $h = 300m$. A cause de la présence de l'air autour d'elle, on suppose que l'amosphère exerce sur la masse une force de frottement fluide $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$.*
> *On choisit pour cette exercice un axe verticale (Oz), orienté vers le haut.*
> 1. *Donner l'équation du mouvement de la masse.*
> 2. *En déduire l'évolution de la vitesse $v(t)$ au cours du temps ainsi que la vitesse maximale v_{max} atteinte.*
> 3. *En déduire le temps $\tau_{1/2}$ au bout duquel la masse atteint la moitié de sa vitesse finale.*
> 4. *Exprimer l'équation horaire $z(t)$ du mouvement.*

CORRECTION

1. **SCHEMA !!!!!!!**



▷ **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
on choisit un système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_z)$ car le mouvement est suivant un axe seul.

$$\text{position } \overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

▷ **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
 ▷ le poids $m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$
 ▷ frottement fluide : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (*c'est un vecteur, on décompose !*) $\vec{F} = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$.

▷ **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \text{ on projette sur l'axe } \Rightarrow m\ddot{z} = +mg - \alpha\dot{z}$$

Finalement on a une équation d'ordre 1, sur $\dot{z} = v(t)$, la vitesse de la masse. On ne perd pas les bonnes habitudes, on l'écrit sous forme canonique.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{1/\tau} v(t) = g$$

2. On décompose la solution :
 ▷ solution particulière : on cherche une constante : $v_P = g\tau = \dfrac{mg}{\alpha}$.
 ▷ solution homogène : $\tilde{v} = Ae^{-t/\tau}$
 CI : à $t = 0$, $v(0) = 0$ donc $A = -\dfrac{mg}{\alpha}$.
 Finalement $v(t) = \dfrac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

3. On remarque que $v(\infty) = \dfrac{mg}{\alpha}$ donc on cherche : $1 - e^{-\tau_{1/2}/\tau} = \dfrac{1}{2}$ donc $\tau_{1/2} = \tau \ln 2$.

4. Pour trouver $z(t)$ on intègre de nouveau $v(t)$ et on utilise la CI $z(0) = 0$. On trouve :

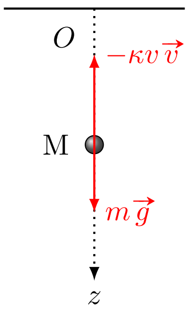
$$z(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(t + \frac{e^{-t/\tau} - 1}{\tau}\right)$$

Exemple 10 : *On reprend le système précédent mais désormais on considère un modèle de frottement quadratique $\vec{F}_\kappa = -\kappa v \vec{v}$.*

1. *Donner l'équation du mouvement de la masse.*
2. *Comparer la force de pesanteur et la force de frottement fluide aux temps cours. En déduire comment tombe la masse aux temps cours.*
3. *Donner l'accélération de la masse aux temps longs. En déduire l'expression de la vitesse stationnaire.*
4. *Proposer un programme qui permet d'obtenir une solution approchée de la solution $v(t)$ à l'aide de la méthode d'Euler.*

CORRECTION

1. **SCHEMA !!!!!!!**



▷ **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
on choisit un système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_z)$ car le mouvement est suivant un axe seul.

$$\text{position } \overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$$

▷ **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
 ▷ le poids $m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$
 ▷ frottement fluide : $\vec{F} = -\kappa v(t)\vec{v}$ *(c'est un vecteur, on décompose !)* $\vec{F} = -\kappa\dot{z}^2\vec{e}_z = -\kappa v^2\vec{e}_z$.

▷ **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

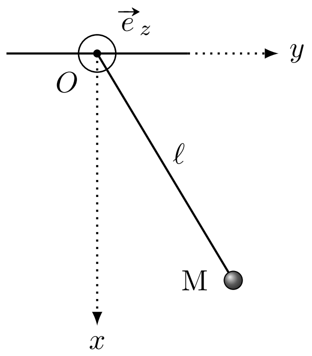
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \text{ on projette sur l'axe } \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = +mg - \kappa v^2$$

2. Aux temps cours, la vitesse est faible donc $\kappa v^2 << mg$v : il est raisonnable de ne considérer que le poids. La masse tombe comme en chute libre.
3. Aux temps longs, la vitesse de la masse tend vers une valeur stationnaire (c'est le régime permanent). Donc son accélération est nulle. On a alors :

$$0 = mg - \kappa v_\infty^2 \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

4. *Cf TP Euler*

3.3 Mouvement d'un pendule



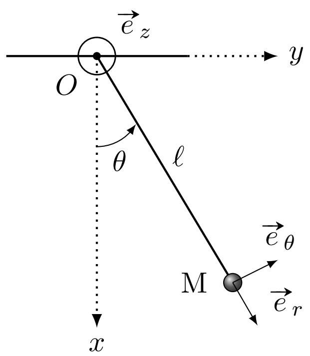
On considère une masse m attachée au bout d'un fil inextensible de longueur l. La masse oscille librement sous l'effet de la pesanteur g. On la lâche sans vitesse initiale en lui faisant faire un angle θ_0 avec la verticale.

Exemple 11 :

1. *Introduire sur un schéma un système de coordonnées adapté à l'étude du problème.*
2. *Réaliser un bilan des forces et les représenter sur votre schéma.*
3. *Donner la position d'équilibre du système.*
4. *Ecrire les deux équations du mouvement.*
5. *Dans le cas de petites oscillations, $\theta << 1$. Montrer alors que l'angle que forme le fil avec la verticale est solution d'une équation différentielle bien connue.*
6. *Donner l'expression des coordonnées de M au cours du temps.*
7. *Donner la vitesse maximale atteinte par le pendule ainsi que sa position lorsqu'il l'atteint.*
8. *Exprimer la tension du fil $\vec{T}$ au cours du temps.*
   Force de frottement fluide
   On prend désormais en compte une force de frottement fluide $\vec{F}$ linéaire avec la vitesse $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.
9. *Donner la nouvelle équation du mouvement. Quelle est l'équation différentielle obtenue ?*
10. *Pour quelle valeur de α n'observe-t-on aucune oscillation du pendule ?*
11. *Pour quelle valeur de α le pendule rejoint-il sa position d'équilibre le plus rapidement ?*

CORRECTION

1. **SCHEMAAAAAAAA !!!**



Le pendule semble tourner autour du point O, on introduit un système de coordonnées polaire de centre O.
Attention ! quelque soit le point qu'on observe $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ font un angle de $+\pi/2$ **POSITIF** !

2.
3. **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
   - le poids $m\vec{g} = +mg\vec{e}_x$ **MAIS** $\vec{e}_z$ ne fait pas partie des vecteurs de la base !!

$$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \;\Rightarrow\; m\vec{g} = +mg\left(\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

   - la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$
     Attention ! *absolument aucune idée de la valeur de T !!*

4. A l'équilibre, la somme des forces est nulles :

$$m\vec{g}+\vec{T}=\vec{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0=-T+mg\cos\theta \\ 0=-mg\sin\theta \end{array}\right.$$

Donc $\theta_{eq}=0$.

5. ▷ **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse* dans le système de coordonnées cylindrique $r=l$ et donc :

$$\text{position } \overrightarrow{OM}=l\vec{e}_r Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v}=l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \text{ accélération } \vec{a}=-l\dot{\theta}^2\vec{e}_r+l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Les équations du mouvement projeté sont donc :

$$\left\{\begin{array}{l} -ml\dot{\theta}^2=-T+mg\cos\theta \\ ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta \end{array}\right.$$

6. Si $\theta<<1$ alors $\sin\theta\simeq\theta$. Par conséquent on a, via l'équation sur $\vec{e}_\theta$: $ml\ddot{\theta}=-mg\theta$.
On reconnaît l'équation d'un Oscillateur Harmonique : on la met sous forme canonique ! !

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \text{ et donc } \omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

7. *On résout comme on sait faire ! !*
On décompose : $\theta(t)=\theta_P+\widetilde{\theta}$, où θ_P est la solution particulière qui correspond au Régime Permanent. Ici $\theta_P=0$.

$$\theta(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes d'intégrations}$$

CI $\theta(0)=\theta_0$ et $\dot{\theta}(0)=0$ (pas de vitesse initiale) $\Rightarrow A=\theta_0$ et $B=0$.

8. Vitesse de la masse $v(t)=l|\dot{\theta}|=l\theta_0\omega_0|\sin\omega_0 t|$. La vitesse maximale est donc $l\theta_0\omega_0$, atteinte pour $t_{max}=\frac{\pi}{2\omega_0}$.
A cet instant $\theta(t_{max})=\theta_0\cos\omega_0\frac{\pi}{2\omega_0}=0$: la masse est en position verticale.

9. Pour trouver T, on utilise l'équation du mouvement qu'on a pas encore utilisée et qui fait apparaître T : $-ml\dot{\theta}^2=-T+mg\cos\theta$. Donc :

$$T=mg\cos\theta-ml\dot{\theta}^2=mg\cos\left[\theta_0\cos\omega_0 t\right]+ml\left(-\theta_0\omega_0\sin\omega_0 t\right)^2$$

Force de frottement fluide

10. La force de frottement se décompose dans la base comme $\vec{F}=-\alpha\vec{v}=-\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Finalement l'équation du mouvement sur $\vec{e}_\theta$ s'écrit :

$$ml\ddot{\theta}=-mg\underbrace{\sin\theta}_{\simeq\theta}-\alpha l\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti. On introduit $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$ et $Q=\frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{l}}$

11. Pas d'oscillation si $Q<1/2$ donc si $\alpha>\frac{m}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$.

12. Pour que le pendule retrouve sa position d'équilibre rapidement, il faut être en régime critique donc $Q=1/2 \Rightarrow \alpha=\frac{m}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Vous savez le faire : OK ... Vous savez le faire en moins de 20 minutes : là c'est acquis !