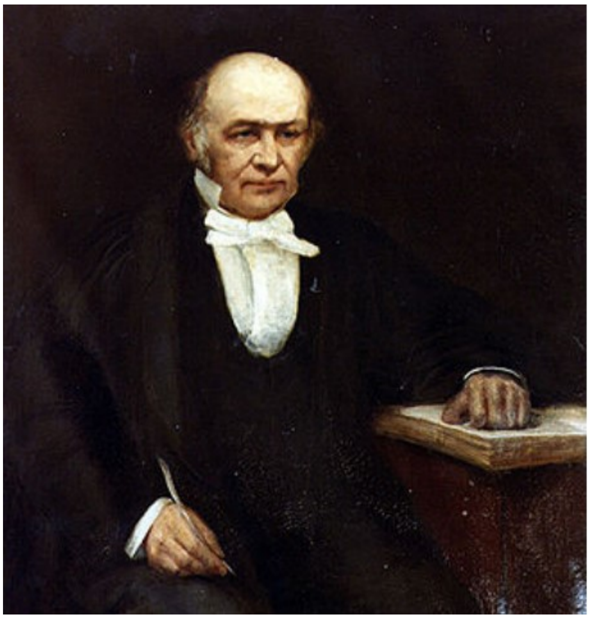
Chap XVI

Approche énergétique du mouvement

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières



Savoirs ♡

- ♡ **Travail et puissance d'une force**
  - puissance d'une force
  - caractère résistif ou moteur d'une force
  - travail élémentaire d'une force et travail d'une force le long d'une trajectoire

- ♡ **Energie cinétique, gradient et énergie potentielle**
  - énergie cinétique
  - gradient d'une fonction en coordonnées cartésiennes et cylindriques
  - énergie potentielle et lien avec une force conservative
  - travail d'une énergie potentielle

- ♡ **Énergie mécanique et théorèmes énergétiques**
  - Énergie mécanique
  - Théorème de l'énergie mécanique
  - Cas particulier d'un système conservatif

- ♡ **Positions d'équilibres**
  - notion de position d'équilibre et d'état d'équilibre
  - équilibre stable et équilibre instable ; lien avec l'énergie potentielle

Savoir Faire

Calculer le travail d'une force entre deux points A et B

Obtenir l'énergie potentielle d'une force ; conclure sur le caractère conservatif ou non d'une force

Applications des théorèmes énergétiques
- *Discuter de la faisabilité d'un mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique*
- *Pour un système conservatif obtenir des grandeurs : vitesse max ; altitude max ; ...*
- *Discuter l'influence des frottements sur la trajectoire d'un mobile*
- *Obtenir l'équation du mouvement par le théorème de la puissance mécanique*

Décrire le mouvement d'un point à l'aide d'un graphe d'énergie potentielle
- *trouver les positions d'équilibre stable et instable*
- *discuter la nature du mouvement à partir des conditions initiales : état lié ou de diffusion*

Qu'est-ce que l'approche énergétique ?

Que permet le PFD ?

Pour comprendre le principe de l'énergie en mécanique, il faut comprendre ce qu'elle permet de faire mieux que le PFD.

Méthode en DS. Pourquoi le PFD ?
Le PFD permet d'obtenir les équations du mouvement et les lois horaires : ils donnent l'évolution des grandeurs cinématiques **au cours du temps**.

Dans de nombreux cas, on a "trop d'information".

> *Exemple 1 : Je lance un cailloux en l'air avec une vitesse verticale v_0 et je cherche son altitude maximale. Je cherche une information à un endroit de la trajectoire : pas la peine de connaître l'évolution de la position à tout temps.*

Le PFD marche "tout le temps", mais n'est pas forcément le mieux adapté.

▶ Que permet l'approche énergétique ?

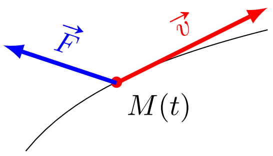
L'approche énergétique permet de palier ce défaut : elle permet d'obtenir de façon beaucoup plus simple des informations sur le mouvement *tant que ces dernières ne sont pas liées au temps.*

Méthode en DS. Pourquoi l'approche énergétique ?
On utilise l'énergie si on cherche :
- ▷ une vitesse/une position en un endroit particulier (*exemple : vitesse maximale/minimale, hauteur maximale/minimale, ...*
- ▷ la vitesse en fonction de la position de la particule
- ▷ la faisabilité d'une trajectoire (la particule atteindra-t-elle le point cible ?)
- ▷ ...

1 Notion de travail et de puissance

1.1 Puissance d'une force

▶ Définition



Considérons la trajectoire du point M. A un instant t donné, dans le référentiel $\mathcal{R}$ il est à la position $\overrightarrow{OM}(t)$ et à la vitesse $\vec{v}(M)$.
Le point M est soumis à une force $\vec{F}$.

Définition. Puissance d'une force
Dans le référentiel $\mathcal{R}$, la puissance d'une force $\vec{F}$ est :

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)(t)}\,.$$

La puissance s'exprime en Watt (W).

Analyse dimensionnelle

$$[\mathcal{P}] = [\vec{F}.\vec{v}] = [\vec{F}][\vec{v}] = MLT^{-2} \times LT^{-1} = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$$

On reconnaît au numérateur la dimension d'une énergie. En la divisant par un temps, on obtient la dimension de la dérivée temporelle d'une énergie $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t$: c'est bien une puissance.

♡ *Instant math* ♡
Le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ s'exprime

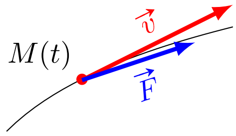
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

avec θ l'angle formé par les deux vecteurs.

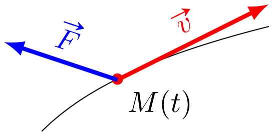
> *Application 1 : Soit un point matériel M de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ soumis uniquement à la force de gravitation, avec le vecteur $\vec{e}_z$ orienté vers le haut. On prendra $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ et $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Calculer la puissance de la force si*
> - ▷ $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$
> - ▷ $\vec{v} = -v_0 \vec{e}_z$
> - ▷ $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$
> - ▷ $\vec{v} = v_0 \cos\alpha \vec{e}_z + v_0 \sin\alpha \vec{e}_x$ *avec* $\alpha = \pi/3$.

▶ Caractère moteur ou résistant d'une force

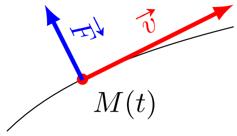
▷ **Si $\mathcal{P} > 0$, la force est qualifiée de motrice** ou **moteur**. Alors l'angle entre la force et la vitesse est inférieure à $\pi/2$.



▷ **Si $\mathcal{P} < 0$, la force est qualifiée de résistive** ou **résistante**.
Alors l'angle entre la force et la vitesse est supérieure à $\pi/2$.



▷ **Si $\mathcal{P} = 0$, on dit que la force ne travaille pas**.
Alors l'angle entre la force et la vitesse est égale à $\pi/2$.



Propriété. Force qui ne travaille pas
Si une force est perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille pas : d'un point de vu énergétique, il n'est pas utile de la considérer.
On pense notamment à la réaction normale du support.

1.2 Travail d'une force

Soit un point matériel M en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Il est soumis à une force $\vec{F}$.

▶ Déplacement élémentaire

Lien puissance-énergie L'énergie transmise pendant une durée Δt est liée à la puissance reçue :

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \times \Delta t$$

En multipliant la puissance d'une force par dt on obtient l'énergie qu'elle a transmis au point matériel pendant l'instant t :

$$\mathcal{P}\mathrm{d}t = \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t$$

Définition. Déplacement élémentaire
Le déplacement élémentaire $\vec{\mathrm{d}l}$ correspond au déplacement pendant un temps infinitésimal dt :

$$\vec{\mathrm{d}l} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

♡ **Instant pas math** ♡

$$\vec{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x \times \mathrm{d}t + ...$$

Même si $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ n'est pas une fraction, on fait comme si ... On a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + ...$$

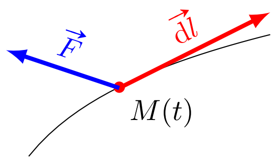
Propriété. Déplacement élémentaire et coordonnées cartésiennes
En coordonnées cartésiennes, le déplacement élémentaire s'exprime comme :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

▶ Travail élémentaire

On appelle cette nouvelle quantité obtenue le **travail élémentaire de la force.**

Définition. Travail élémentaire



On définit le travail élémentaire d'une force δW par

$$\boxed{\delta W = \mathcal{P}(t)\ \mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}} \qquad (1.1)$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est le déplacement infinitésimal de la masse pendant le temps $\mathrm{d}t$.
Il s'exprime en Joule.

Attention ! Ne pas confondre puissance fournie et travail élémentaire ! !

- ▷ Puissance : $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$
- ▷ Travail élémentaire $\delta W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

▶ Travail total

Lorsque le point M se déplace d'un point A à un point B :
le travail total W fourni par la force $\vec{F}$ s'écrit comme la somme des petits travaux δW fourni à chaque étape $M_1, M_2, ...$ du voyage.

$$\delta W(M_1) + \delta W(M_2 = +... + \sum \delta W(M_i) = \int \delta W$$

Définition. Travail fourni par une force
On définit le travail W fourni par la force entre les points A et B par

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

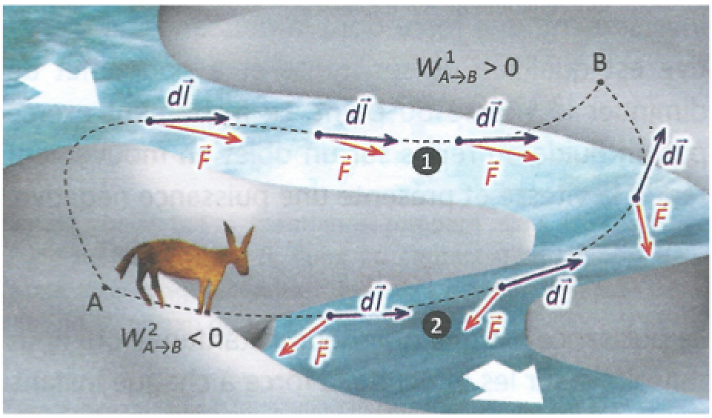
Le travail s'exprime en Joule (J). Il représente l'énergie que la force a donné au point matériel pendant son trajet de A à B.

- ▷ Si $W_{A\to B}$>0 Le travail est **globalement** positif, M reçoit de l'énergie au cours du déplacement, la force est motrice.
- ▷ Si $W_{A\to B}$<0 Le travail est **globalement** négatif, M cède de l'énergie au cours du déplacement, la force est résistante.

▶ Travail et chemin

Propriété.
Le travail fourni par une force pour que le point matériel aille d'un point à un autre dépend du chemin suivi.

Il ne faut pas fournir la même quantité d'énergie selon le chemin que l'on prend pour aller d'un point à un autre.

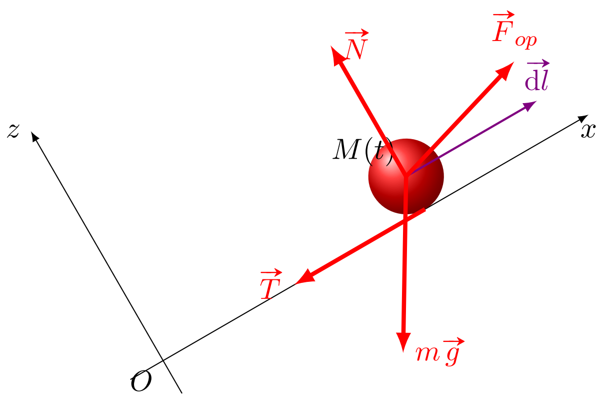
> **Exemple 2 :** *Dans l'exemple suivant, l'âne a deux possibilités pour aller de A vers B mais il doit se confronter à la force $\vec{F}$ due au courant.*
>
> 
>
>
> *Tout le long du chemin 1, $\vec{F}\cdot\vec{d\ell} > 0$ donc $W^1_{A\to B} > 0$ alors que pour le chemin 2, on a $\vec{F}\cdot\vec{d\ell} < 0$ donc $W^2_{A\to B} < 0$. Le travail dépend donc du chemin suivi.*

1.3 Tirer une masse sur un plan incliné

> **Exemple 3 :** *On considère une masse m qui se déplace en ligne droite le long d'un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. On la tire avec une force $\vec{F}_{op}$ d'un point A à un point B sur une longueur L.*
>
> 1. *Comment orienter la force pour maximiser le déplacement.*
> 2. *Justifier que la force de réaction normale ne travaille pas.*
> 3. *Calculer le travail que fournit la force $\vec{F}_{op}$ pour tirer la masse sur une longueur L.*
> 4. *On appelle f le coefficient de friction solide. Montrer que le travail de la force tangentielle $\vec{T}$ est égale à :*
>
> $$W_{A\to B} = -fmg\sin\alpha L$$
>
> *Commenter son signe.*
>
> 5. *Calculer le travail du poids. Commenter son signe.*

CORRECTION

Pas de mystère, on fait la méthode initiale : schéma, vecteurs cinématiques, bilan des $\vec{F}$!!



▷ **Vecteurs cinématiques :**
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

▷ **Bilan des $\vec{F}$**
$m\vec{g} = -mg(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y)$
$N = N\vec{e}_y$
$\vec{T} = -T\vec{e}_x$; glissement $T = fN$
$\vec{F}_{op} = F_{op}\cos\beta\vec{e}_x + F_{op}\sin\beta\vec{e}_y$

1. Pour maximiser l'effet de $\vec{F}_{op}$, il faut maximiser sont travail (ou sa puissance) : $\vec{F}_{op}$ doit être colinéaire avec $\vec{\mathrm{d}l}$ donc $\beta = 0$ et $\vec{F}_{op} = F_{op}\vec{e}_x$.
2. $\vec{N}$ est perpendiculaire au mouvement (qui est suivant $\vec{e}_x$) donc $\delta W = 0$.

3. **Attention !** *il faut être méthodique !!*
   - ▷ **Travail élémentaire :** $\delta W = \vec{F}_{op} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$ avec $\vec{\mathrm{d}l} = \dot{x}\vec{e}_x\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\vec{e}_x$.
     Donc $\delta W = F_{op}\mathrm{d}x$.
   - ▷ **Variable d'intégration et coordonnées des bornes** : on intègre suivant x donc $A \to x_A$ et $B \to x_B$ avec $x_B - x_A = L$.
   - ▷ **Calcul de** $W_{A\to B}\left(\vec{F}_{op}\right)$:

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{op}\right) = \int_{A\to B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} F_{op}\mathrm{d}x = F_{op}\left(x_B - x_A\right) = F_{op}L$$

4. *On refait les mêmes étapes !!*
   Il est nécessaire de trouver T donc il faut trouver N : PFD suivant $\vec{e}_y \Rightarrow 0 = N - mg\cos\alpha$ donc $N = mg\cos\alpha$.
   Avec les mêmes étapes on trouve $8A \to B\left(\vec{T}\right) = -fmg\cos\alpha L$. On remarque que le travail est négatif : la force de frottement s'oppose au mouvement.
5. *On refait les mêmes étapes !!*
   - ▷ **Travail élémentaire :** $\delta W = m\vec{g} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$ avec $\vec{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$.

$$\delta W = -mg\sin\alpha\,\underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} - mg\cos\alpha\,\underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0}$$

     Donc $\delta W = -mg\sin\alpha\mathrm{d}x$.
   - ▷ **Variable d'intégration et coordonnées des bornes** : on intègre suivant x donc $A \to x_A$ et $B \to x_B$ avec $x_B - x_A = L$.
   - ▷ **Calcul de** $W_{A\to B}\left(m\vec{g}\right)$:

$$W_{A\to B}\left(m\vec{g}\right) = \int_{A\to B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} = -mg\sin\alpha\mathrm{d}x = -mg\sin\alpha\left(x_B - x_A\right) = -mg\sin\alpha L$$

1.4 Théorème de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

Nous avons défini la notion de puissance et de travail d'une force et décrit de façon qualitative leurs effets sur l'énergie cinétique. Nous allons introduire ici des théorèmes qui nous permettent de discuter leur influence de façon quantitative.

▶ Énergie cinétique

Plaçons nous dans un référentiel $\mathcal{R}$ et considérons un point matériel M de masse . Celui-ci est animé d'une vitesse $\vec{v}(M_{/\mathcal{R}})$.

Définition. Énergie cinétique
Dans le référentiel $\mathcal{R}$, l'énergie cinétique du point M animé de la vitesse $\vec{v}$ est la grandeur scalaire

$$E_\mathrm{c}(M) = \frac{1}{2}mv^2(t)$$

Son unité est le Joule (J).

Attention ! L'énergie cinétique dépend de la vitesse, donc du référentiel d'étude.

▶ Énoncé du théorème de la puissance cinétique

Attention ! Tous les théorèmes énergétiques existent sous deux formes :
- ▷ sous forme de **puissance** : il s'applique à un instant t ou en un point spécifique M
- ▷ sous dorme de **l'énergie** : il s'applique sur une trajectoire de $A \to B$

Théorème. Théorème de la puissance cinétique
Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(M)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_\mathcal{R}(t)}\,. \tag{1.2}$$

Les vitesses et les travaux des forces sont calculés dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Il s'agit d'une reformulation du PFD mais en terme énergétique.

Astuce pratique :
ce théorème sert surtout à discuter le caractère moteur ou résistif d'une force en fonction du signe de sa puissance !

- ▷ puissance positive ⇒ l'énergie cinétique augmente ⇒ la particule accélère
- ▷ puissance négative ⇒ l'énergie cinétique diminue ⇒ la particule décélère

▶ Théorème de l'énergie cinétique

Théorème. Théorème de l'énergie cinétique
Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique du point matériel M entre A et B est égale au travail des forces entre ces deux points.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_i)$$

Attention ! Ce théorème est très peu utile car il en existe une forme "améliorée".

2 Forces conservatives, énergies potentielles et énergie mécanique

Pour certaines forces, on peut encore optimiser l'approche car il n'est même plus nécessaire de calculer le travail total : adieu donc l'intégrale de chemin !

2.1 Forces conservatives

Reprenons l'exemple précédent : quelque soit la trajectoire de la masse entre A et B, on aurait trouvé le même résultat pour le travail du pois :

$$W_{A\to B} = -mg(z_B - z_A)$$

Le travail du poids entre deux points ne dépend pas du chemin parcouru : c'est **une force conservative.**

Définition. Force conservative
Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend ni de la trajectoire suivie, ni de la façon dont elle est parcourue.

Attention ! Ce n'est pas vrai pour toutes les forces : **typiquement les forces de frottements son non-conservative.**

Astuce pratique :
si une force dépend de manière explicite du temps t ou de la vitesse v, elle ne pourra pas s'écrire comme une force conservative.

2.2 Energie potentielle

Une façon simple de vérifier si une force est conservative est de lui associer une énergie potentielle E_p.

▶ Opérateur gradient

Définition. Opérateur gradient
Le gradient d'une fonction f, noté $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est un vecteur. Sa définition dépend du système de coordonnées :

▷ coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

▷ coordonnées cylindrique (r, θ, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

♡ **Instant math** ♡
La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à x : on considère toutes les autres variables comme fixe et on dérive "normalement" par rapport à x.

▶ Énergie potentielle

Propriété. Force conservative et énergie potentielle
On dit qu'une force $\vec{F}$ est conservative ou qu'elle dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction E_p telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$$

Cette propriété sert de définition à l'énergie potentielle E_p.

Méthode en DS. Trouver l'énergie potentielle
1. Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi
2. Exprimer le gradient de l'énergie potentiel
3. Identifier terme à terme pour trouver les dérivée de E_p
4. Intégrer et fixer le niveau zéro des potentiels

> *Exemple 4* **: Energie potentielle de pesanteur**
> *Calculer l'énergie potentielle de pesanteur, i.e. l'énergie potentielle associée au poids $m\vec{g}$. On se place dans un système de coordonnées cartésien, avec l'axe vertical (Oz) orienté vers le haut et l'origine O situé au niveau du sol.*

Les différentes étapes décrites seront le étapes à suivre pour toutes les recherches des énergies potentielles.

1. **Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi**

   Le poids dans la repère : $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ donc :

$$-\vec{F} = mg\vec{e}_z$$

2. **Exprimer le gradient de l'énergie potentiel dans le système de coordonnées choisi**

   En cartésien :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p(x, y, z) = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z$$

3. **On identifie terme à terme entre les deux expressions**

   ▷ sur $\vec{e}_x$: $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$: la fonction E_p ne dépend pas de x

   ▷ sur $\vec{e}_y$: $\frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$: la fonction E_p ne dépend pas de y

   ▷ sur $\vec{e}_z$:

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = mg \;\Rightarrow\; E_p(z) = mgz + C$$

   avec C une constante à déterminer.

   Problème : nous n'avons pas de conditions limites ici. La constante C peut donc prendre n'importe quelle valeur.

> **Propriété. Niveau zéro d'une énergie potentielle**
> Une énergie potentielle est toujours définie à une constante près. On choisit donc un point de l'espace où on fixe la valeur de l'énergie à zéro : c'est **l'origine des potentiels**.

On décide ici arbitrairement de fixer le 0 au niveau de la surface terrestre $z = 0$.
On a donc $E_p(z = 0) = 0$ et $E_p(z = 0) = C$ donc $C = 0$.

On retiendra alors trois **ATTENTION !!** :

1. **Attention !** on pense au moins dans la définition !! $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$
2. **Attention !** l'expression de l'énergie potentielle dépend du système de coordonnées choisi !!
3. **Attention !** l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près qu'il faut fixer en choisissant une origine des potentiels

Astuce pratique :
Pour toute les énergies on vérifiera le sens d'évolution : l'énergie potentielle doit augmenter si on déplace le système dans un sens "non-naturel"

▶ Travail d'une énergie potentielle

Un point matériel M se déplace de A à B le long d'une trajectoire. On cherche à calculer le travail $W_{AB}(\vec{F})$ où $\vec{F}$ est une force conservative.

Avec les mains :
On gardera à l'esprit que le gradient est l'équivalent à trois dimensions de la dérivée : $\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p \sim \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$.
Donc :

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = (E_p(x_A) - E_p(x_B)) = f(x_B) - f(x_A)$$

Le travail donne alors :

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{dl}} = \int_A^B \underbrace{-\overrightarrow{\text{grad}}E_p \cdot \vec{\mathrm{dl}}}_{\sim\text{dérivée}} = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) = E_p(A) - E_p(B)$$

Propriété. Travail et énergie potentielle
Le travail fournit par une force $\vec{F}$ dérivant d'une énergie potentielle Ep entre deux points A et B est égal à :

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$$

> ***Exemple 5*** *: Donner le travail du poids reçue par une masse m lorsqu'elle s'élève d'une hauteur h.*

On choisit un axe verticale (Oz) orienté vers le haut. Dans ce cas : $E_{p,g} = mgz$.
On appelle A le point de départ, altitude z, et B le point d'arrivée, altitude $z+h$. Le travail du poids est donnée par son énergie potentielle :

$$W_{A\to B} = E_{p,g}(A) - E_{p,g}(B) = mgz - mg(z+h) = -mgh$$

Le travail est négatif : la force est résistive. Le poids s'oppose à ce qu'une masse s'élève.

2.3 Forces conservatives à connaître

Il est important de connaître les expressions des énergies potentielles de ces trois forces particulières :
- ▷ pesanteur
- ▷ gravitationnelle
- ▷ force de rappel d'un ressort

et de savoir les redémontrer !!

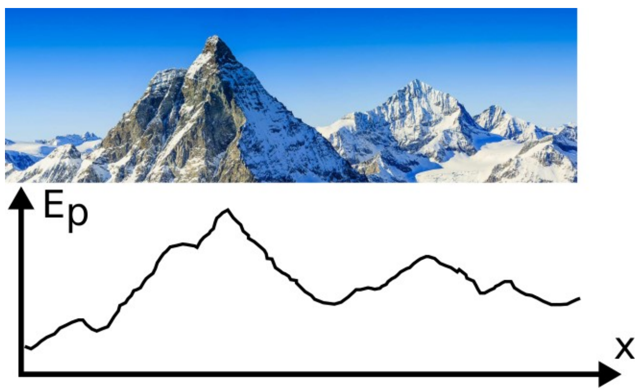
▶ L'énergie potentielle de pesanteur

Propriété. Energie potentielle de pesanteur $E_{p,p}$
Dans un système de coordonnées cartésien, avec un axe vertical (Oz) orienté vers le haut :

$$E_{p,p} = mgz + C$$

Attention ! Ce n'est vrai qu'avec un axe ascendant ! Si on prend un axe verticale orienté vers le bas on a $E_{p,p} = -mgz$.

Astuce pratique :
Lorsqu'un point matériel se déplace sur une surface, l'énergie potentielle de pesanteur ressemble, à un facteur mg près, à la surface sur le quel se déplace le point.



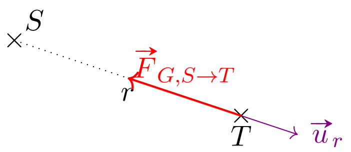
Si on marche sur la ligne de crête, E_p ressemble à la topologie de la montage.

▶ L'énergie potentielle gravitationnelle

On considère le Soleil. On appelle P son centre de gravité et M_S sa masse. La terre, de masse M_T et de centre T est soumis à la force gravitationnelle du Soleil.
On souhaite trouver l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{p,\mathcal{G}}$.

1. **Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi**

   On choisit un repère adapté à la situation : la Terre **tourne** autour du Soleil ⇒ on choisit un système de coordonnées cylindrique, avec comme centre le Soleil.



   Dans ce repère on a :
   - ▷ distance Terre-Soleil : $d = r$
   - ▷ vecteur unitaire Soleil→Terre : $\vec{u}_{S\to T} = \vec{u}_r$

$$\vec{F}_{S\to T} = -\mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r^2}\vec{u_r}$$

   Attention ! On n'oublie pas le moins : $-\vec{F}_{S\to T} = \mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r^2}\vec{u_r}$

2. **Exprimer le gradient de l'énergie potentiel dans le système de coordonnées choisi**
   En cylindrique :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_{p,\mathcal{G}}(r,\theta,z) = \frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial z}\vec{e}_z$$

3. **On identifie terme à terme entre les deux expressions**

   - ▷ sur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$: $E_{p,\mathcal{G}}$ ne dépend ni de θ, ni de z
   - ▷ sur $\vec{e}_r$:

$$\frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial r} = \mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r^2}$$

   ♡ *Instant math* ♡

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{-1}{x^2}$$

   On a donc :

$$E_{p,\mathcal{G}} = -\mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r} + C$$

   On décide ici arbitrairement de fixer le 0 au niveau de l'infini $r \to \infty$. On a donc $C = 0$.

Propriété. Energie potentielle d'interaction gravitationnelle
L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre deux masse m_1 et m_2 séparée d'une distance d est :

$$E_{p,\mathcal{G}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{d}$$

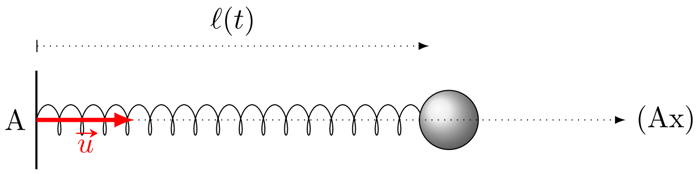
avec comme origine des potentiel l'infini.

Astuce pratique :
Déplacement "non-naturel" : les deux masses s'éloignent ⇒ d augmente et ainsi $E_{p,\mathcal{G}}$ également.
Attention ! L'énergie potentielle est négative !

> *Application 2 : En reprenant l'étude réalisée sue la force d'interaction gravitationnelle, donner l'expression de l'énergie potentiel d'interaction électrostatique.*
> *On rappelle que la force d'interaction électrostatique entre deux particules chargées est :*
>
> $$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

▶ L'énergie potentielle élastique

Considérons une masse M attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est fixe. On note $\ell(t)$ la longueur du ressort.
Exprimer l'énergie potentielle élastique $E_{p,k}$ de la force de rappel du ressort.



1. **Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi** On introduit un repère de coordonnées cartésien, d'origine A confondu avec le point fixe du ressort. L'axe (Ax) est confondu avec l'axe du mouvement du ressort.

   La force $\vec{F}$ qui s'exerce sur la masse égale à
   $$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}$$
   avec ici $l(t) = x(t)$ et $\vec{u} = \vec{e}_x$.
   L'opposé de la force est donc :
   $$-\vec{F} = k(x(t) - \ell_0)\vec{e}_x$$

2. **Exprimer le gradient de l'énergie potentiel dans le système de coordonnées choisi**
   En cartésien :
   $$\overrightarrow{\text{grad}} E_{p,k}(x, y, z) = \frac{\partial E_{p,k}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_{p,k}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_{p,k}}{\partial z}\vec{e}_z$$

3. **On identifie terme à terme entre les deux expressions**

   ▷ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$: $E_{p,k}$ ne dépend ni de y ni de z

   ▷ sur $\vec{e}_x$:
   $$\frac{\partial E_{p,k}}{\partial x} = k(x - l_0) \;\Rightarrow\; E_{p,k} = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 - +C$$
   On choisit comme origine des potentiels la position à l'équilibre $x = l_0$. On a alors $C = 0$.
   On reconnaît que $x = l$, la longueur du ressort ici.

Propriété. Energie potentiel élastique
L'énergie potentiel élastique d'une force de rappel d'un ressort d'une longueur l est :
$$E_{p,k} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$$
avec k et l_0 la raideur et la longueur à vide du ressort.

3 Théorème de l'énergie mécanique et cas pratiques

3.1 Théorème de l'énergie mécanique

▶ Energie mécanique

Définition. Énergie mécanique
On définit l'énergie mécanique E_m du point matériel M dans le référentiel $\mathcal{R}$ système comme la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives auquel il est soumis :

$$E_m = E_c + \sum E_p$$

Attention ! L'énergie mécanique est définie à une constante près à cause de la définition de l'énergie potentielle. De plus, elle dépend du référentiel à cause de l'énergie cinétique.

▶ Enoncé

Théorème. Theorème de l'énergie mécanique
Dans un référentiel galiléen la variation de l'énergie mécanique d'une particule entre deux point A et B est égale au travail des forces non conservatives.

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{nc})$$

Le plus souvent les forces non-conservatives sont des forces de frottement qui ont un travail négatif et donc ont tendance à faire diminuer l'énergie mécanique.

Propriété. Variation de l'énergie mécanique

- ▷ L'énergie mécanique d'un point M soumis uniquement à des forces conservatives ($\sim$ pas de frottement) se conservent.
- ▷ L'énergie mécanique d'un point matériel M soumis à des forces de frottement diminue.

> ***Remarque :*** *La dénomination « conservative » vient de cette propriété. Une force conservative conserve l'énergie, contrairement à une force non conservative.*

On a le pendant temporel : la puissance mécanique (*peu utile*).

Propriété. Theorème de la puissance mécanique
La variation temporelle de l'énergie mécanique est du à la puissance des forces non conservatives :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$$

Astuce pratique : pour les forces de frottements, $\mathcal{P} < 0$ et donc l'énergie mécanique diminue.

Attention ! Le théorème de l'énergie mécanique n'a aucun intérêt si on ne sait pas L'APPLIQUER ! ! Les exemples suivants sont donc essentiel à comprendre.

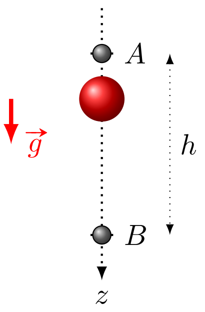
3.2 Exemple pratique

▸ **Energie potentiel pesanteur**

> *Exemple 6* : **Vitesse de chute libre**
> *On considère une masse m en chute libre. Elle la lâche initialement au point A sans vitesse et on néglige les frottements de l'air. On appelle B le point situé à une distance h de A vers la Terre.*
> 1. *Introduire un référentiel et un système de coordonnées adaptées (SCHEMA !!!)*
> 2. *Calculer le travail du poids entre le point entre A et B.*
> 3. *En déduire sa vitesse après avoir chuter de 100m.*

CORRECTION

1. *Cette première question n'existera évidemment plus : on doit le faire tout seul !!*



▹ **Vecteurs cinématiques** :
$\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ et $v = \dot{z}$ car z augmente.

▹ **Bilan des forces ET des énergie potentielles** :
poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ et $E_{p,g} = -mgz$ car (Oz) est orienté vers le bas.

2. Le travail du poids : $W_{A\to B}(m\vec{g}) = E_{p,g}(A) - E_{p,g}(B) = -mg(z_A - z_B) = mgh$.
Attention ! *Souvent il ne sera plus utile de calculer W : on le mettra tout de suite dans l'énergie mécanique !*

3. *Typiquement une question pour le TEM.* ***Attention !*** *à bien s'entraîner sur le* ***méthode*** *de mis en place du théorème !!*
   ▹ **Choix du trajet :**
   - ▹ point départ A : position initiale z_A et vitesse nulle
   - ▹ point d'arrivée B : à 100m sous le point de départ $z_B = z_A + 100\text{m}$

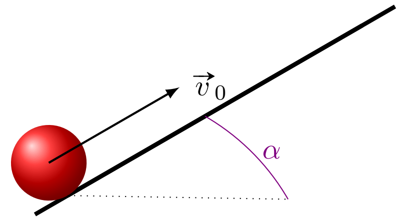
   ▹ **Bilan des énergie** :
   - ▹ point A : $E_c = 0$ (pas de vitesse initiale) et $E_p = E_{p,g}(A) = -mgz_A$
   - ▹ point B : $E_c = \frac{1}{2}mv_B^2$ (*c'est la vitesse qu'on cherche*) et $E_p = E_{p,g}(B) = -mgz_B$.

   ▹ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

   ▹ **Application du TEM**

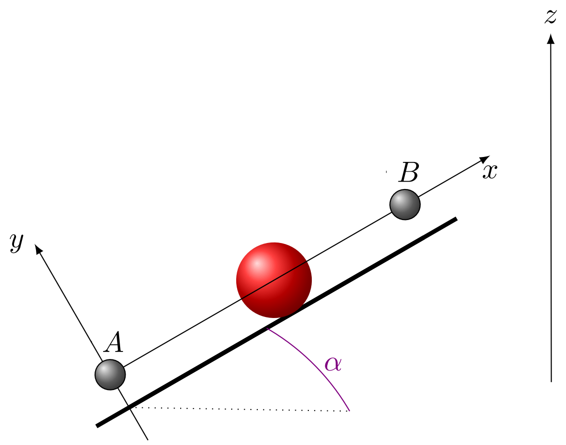
$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_B^2 - mgz_B\right) - (0 - mgz_A) = 0$$

On a alors $v_B^2 = mg(z_B - z_A) = 2gh$ donc $v_B = \sqrt{2gh}$. On remarque notamment que la vitesse à l'arrivée est la même quelle que soit la masse de l'objet.

> ***Exemple 7 :***
>
> *On considère une masse m qui peut glisser sans frottements le long d'un plan incliné qui forme un angle α avec l'horizontale.*
> *La masse se trouve initialement au bas de la pente et on lui confère une vitesse intiale v_0, orienté vers la pente.*
>
> 
>
>
> 1. *Introduire un système de coordonnées adapté et définir les énergies cinétiques et potentielles.*
> 2. *Le système est-il conservatif ?*
> 3. *A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, exprimer la distance maximale que la masse va parcourir avant de faire demi-tour.*
> 4. *En déduire la hauteur maximal atteinte.*
> 5. *(*) On prend en compte désormais les frottements solides avec le plan incliné.*
>   - ▷ *On considère la masse au point de coordonnées x. Exprimer le travail des forces de frottements en ce point.*
>   - ▷ *En déduire la nouvelle distance parcourue par la masse.*

CORRECTION

1.



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $v = \dot{x}$ car x augmente.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

▷ **Bilan des forces et énergies potentielles**
poids $m\vec{g}$ et $E_{p,g} = +mgz$ avec un axe z orienté vers le haut
Attention ! *l'axe z ne fait pas partie de la base : il faut exprimer z en fonction de x*

$$\sin\alpha = z/x \ \Rightarrow\ z = x\sin\alpha$$

$$E_{p,g} = +mg\sin\alpha\ x$$

2. Seul le poids travaille et c'est une force conservative : le système est donc conservatif.

3. ▷ **Choix du trajet :**
   - ▷ point départ A : position initiale $x_A = 0$ et vitesse v_0
   - ▷ point d'arrivée B : point où la balle fait demi tour $v_B = 0$

   ▷ **Bilan des énergie** :
   - ▷ point A : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et $E_p = E_{p,g}(A) = 0$
   - ▷ point B : $E_c = 0$ et $E_{p,g}(B) = mg\sin\alpha\ x_B$.

   ▷ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

   ▷ **Application du TEM**

$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \ \Rightarrow\ (0 + mg\sin\alpha\ x_B) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - 0\right) = 0$$

On a alors $x_{max} = x_B = \dfrac{v_0^2}{2g\sin\alpha}$

4. On passe $x \to z$: $z_{max} = x_{max}\sin\alpha = \dfrac{v_0^2}{2g}$: quel que soit l'angle α la balle monte de la même hauteur. C'est d'ailleurs celle qu'on aurait trouvé en lançant la balle verticalement sans plan incliné.

5.(a) *Revoir l'exemple 3 pour le calcul du travail d'une force de frottement sur un plan incliné.*

$$W_{A\to B}(\vec{T}) = -fmg\cos\alpha\, x_B$$

(b) On ré-applique le **TEM** mais avec $W_{A\to B}(\vec{F}_{NC}) \neq 0 = -fmg\cos\alpha\, x_B$.

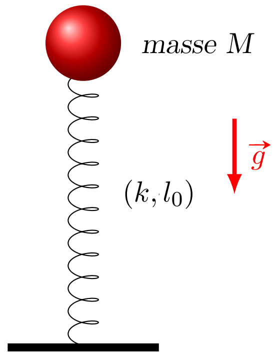
$$(0 + mg\sin\alpha\, x_B) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - 0\right) = -fmg\cos\alpha\, x_B$$

On résout pour avoir $x_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$. On remarque que la nouvelle distance est plus faible : les forces de frottement s'oppose au mouvement.

▶ Energie potentiel élastique

Exemple 8 :

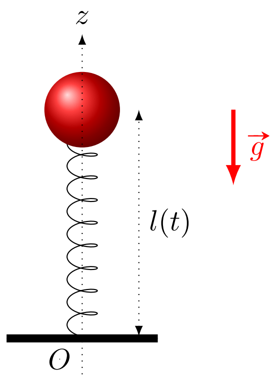
On s'intéresse à un système d'amortissement de voiture. On modélise le système de façon grossière : on considère un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (l'amortisseur) sur lequel est posée une masse m (la voiture). Initialement, le ressort est comprimé (à cause d'une aspérité de la route) : il possède une longueur nulle $l = 0$. On lâche le système, la masse ayant initialement une vitesse nulle.



1. *Introduire un système de coordonnées adapté au problème.*
2. *Lister les forces conservatives du problème et exprimer leur énergies potentielles à l'aide des coordonnées.*
3. *Le système est-il conservatif ? Justifier.*
4. *En appliquant le théorème de l'énergie mécanique :*
   - ▷ *que vaut la vitesse de la masse quand l'altitude est maximale. En déduire l'altitude maximale h_{max}.*
   - ▷ *(*) trouver la position où la vitesse est maximale ainsi que sa valeur v_{max}*
5. *On prend en compte les frottements de l'air via une force $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$.*
   - ▷ *Est-ce une force conservative ?*
   - ▷ *Exprimer la puissance des forces de frottement fluide. Discuter son signe.*
   - ▷ *En déduire l'impact sur le mouvement des frottements.*

CORRECTION

1.



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ avec $v(t) = |\dot{z}|$ (**Attention !** $\dot{z}$ change de signe régulièrement !)

2. Forces conservatives (*pas besoin de les exprimer dans les vecteurs de la base, on ne s'intéresse ici qu'aux énergie potentielles*
   - ▷ poids $m\vec{g}$ et énergie potentielle $E_{p,g} = +mgz$ (*axe* (Oz) *ascendant*)
   - ▷ force de rappel du ressort $\vec{F}_k$ et énergie potentielle $E_k = \frac{1}{2}(l - l_0)^2$ avec $l = z$.
3. Il n'y a pas de frottement : le système est conservatif, E_m est constante.
4. ▷ **Choix du trajet :**
   - ▷ point départ A : position initiale $l_A = 0$ et sans vitesse $v_A = 0$
   - ▷ point d'arrivée B :position d'élongation maximale $l_B = h_{max}$ et $v_B = 0$ (la balle fait demi-tour)

   ▷ **Bilan des énergie :**
   - ▷ point A : $E_c = 0$; $E_{p,g}(A) = 0$ et $E_{p,k} = \frac{1}{2}kl_0^2$

- ▷ point B : $E_c = 0$; $E_{p,g}(B) = mgh_{max}$; $E_{p,k} = \frac{1}{2}k(h_{max} - l_0)^2$

▷ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

▷ **Application du TEM**

$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \;\Rightarrow\; mgh_{max} + \frac{1}{2}k(h_{max} - l_0)^2 - \frac{1}{2}kl_0^2 = 0$$

On résout $h_{max}^2 + 2\left(\frac{mg}{k} - l_0\right)h_{max} = 0$ donc

$$h_{max} = 2\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

Cette solution a un sens si $kl_0 > mg$: initialement la force du ressort doit être supérieur au poids pour que le mouvement commence.

4. (*) **Attention !** *Question plus difficile mais importante à comprendre :* on applique de nouveau le **TEM dans un cas général** :

▷ **Choix du trajet :**
- ▷ point départ A : position initiale $l_A = 0$ et sans vitesse $v_A = 0$
- ▷ point d'arrivée B : position de vitesse quelconque v et étirement h quelconque

▷ **Bilan des énergie** :
- ▷ point A : $E_c = 0$; $E_{p,g}(A) = 0$ et $E_{p,k} = \frac{1}{2}kl_0^2$
- ▷ point B : $E_c = \frac{1}{2}v^2$; $E_{p,g}(B) = mgh$; $E_{p,k} = \frac{1}{2}k(h - l_0)^2$

▷ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

▷ **Application du TEM**

$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}k(h - l_0)^2 - \frac{1}{2}kl_0^2 = 0$$

On a alors :

$$v^2 = 2\left(\frac{kl_0}{m} - g\right)h - \frac{k}{m}h^2$$

On a obtenu une équation de la vitesse en fonction de la position de la masse, $v[h]$. On peut alors résoudre tout un tas de question.

> ***Remarque :*** *On retrouve facilement que l'étirement maximale h_{max} : il s'obtient pour $v^2 = 0$ et donc $h_{max} = 2(l_0 - mg/k)$.*

On a une expression de $u = v^2$ en fonction de h : $u[h]$, on cherche son maximum.

$$u'[h] = 2\left(\frac{kl_0}{m} - g\right) - 2\frac{k}{m}\widetilde{h} \;\Rightarrow\; \widetilde{h} = \frac{m}{k}\left(\frac{kl_0}{m} - g\right) = l_0 - \frac{mg}{k}$$

On a alors $u_{max} = u[\widetilde{h}] = \left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)\left(\frac{kl_0}{m} - g\right) = \frac{k}{m}\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)^2$ et donc :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

De nouveau cette vitesse n'est possible que si $kl_0 > mg$.

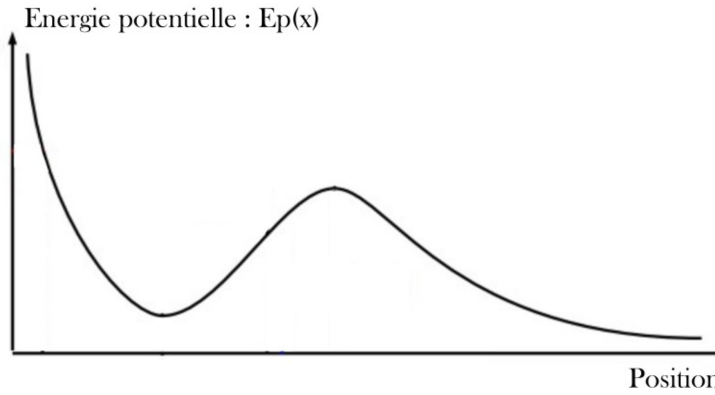
4 Etude d'un mouvement à l'aide de l'énergie potentiel

4.1 Notion de graphe énergétique

En plus de permettre de résoudre facilement des problèmes, l'aspect énergétique permet de décrire le mouvement de particules pour lesquelles on ne sait pas résoudre le PFD : pour cela on utilise des **graphe énergétique**.

Considérons un système à un degré de liberté, typiquement :
- ▷ coordonnées cartésiennes : mouvement sur un seul axe (Ox)
- ▷ coordonnées cylindrique : mouvement circulaire, seul compte l'angle θ.

On suppose le système conservatif : il n'est soumis qu'à des forces conservatives, d'énergie potentielle E_p.
Un graphe énergétique est la tracé de l'énergie potentielle E_p en fonction du degré de liberté (noté x ici mais k'angle θ est également possible).



Attention ! On trace par rapport à la position, pas le temps!!!

Astuce pratique :
d'un point de vue analyse, toutes les énergies potentielles se valent. Il est plus simple de considérer qu'on étudie l'énergie potentiel de pesanteur : tout se passe comme si on étudiait l'évolution d'une bille dans un circuit qui a la forme du graphe $E_p(x)$.

4.2 Position d'équilibre

Définition. Etat d'équilibre
Un état d'équilibre est un état pour lequel le système, initialement immobile, reste immobile. On distingue :
- ▷ les positions d'**équilibres stable** : si on écarte le point matériel de la position d'équilibre, il se repositionne naturellement dessus
- ▷ les positions d'**équilibres instable** : si on écarte le point matériel de la position d'équilibre, il s'en éloigne naturellement

Propriété. Position d'équilibre
Les états d'équilibresx_{eq} sont situés au niveau des maximas de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{eq}) = 0$$

Les positions d'équilibre stable correspondent à des minima :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq}) > 0$$

Les positions d'équilibre instable correspondent à des maxima :

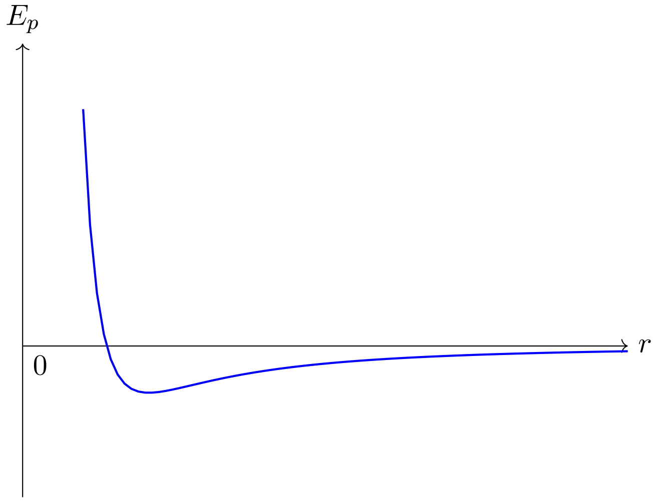
$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq}) < 0$$

Attention ! On dérive par rapport à la position!!!

> ***Exemple 9 :* Potentiel de Yukawa** *On donne le potentiel qui décrit les interactions électrostatique entre particules subatomiques :*
>
> $$E_p(r) = E_0\left(\frac{a}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right)$$
>
> *avec E_0 une énergie potentielle de référence.*
>
> 1. *Donner les dimensions de a et b.*
> 2. *A l'aide de votre calculette, représenter schématiquement le graphe énergétique de E_p (on pourra prendre $E_0 = 1$, $a = 10$ et $b = 9$ en unité SI).*
> 3. *Identifier sur le graphe les positions d'équilibres stables et instables.*
> 4. *Donner l'expression de la position d'équilibre stable en fonction de a et b.*

CORRECTION

1. Par analyse dimensionnelle, la parenthèse doit être de dimension 1 donc $[a] = L^3$ et $[b] = L^2$.
2. On trace le graphe pour avoir sa forme générale en tête :



3. On remarque qu'il y a un minimum, donc un position d'équilibre stable.
4. On cherche le minimum :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = 0 \;\Rightarrow\; -3\frac{a}{r_{eq}^4} + 2\frac{b}{r_{eq}^3} = 0 \;\Rightarrow\; r_{min} = \frac{3a}{2b}$$

On vérifie que $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}^2r}(r = r_{eq}) > 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}^2r}(r = r_{eq}) = E_0\left(12\frac{a}{r_{eq}^5} - 6\frac{b}{r_{eq}^4}\right) = -\frac{E_0}{r_{eq}^5}\left(12a - 6br_{eq}\right) = -\frac{E_0}{r_{eq}^5}\underbrace{\left(12a - 6b\frac{3a}{2b}\right)}_{=3a}$$

4.3 Trajectoire d'une particule : état lié ou de diffusion

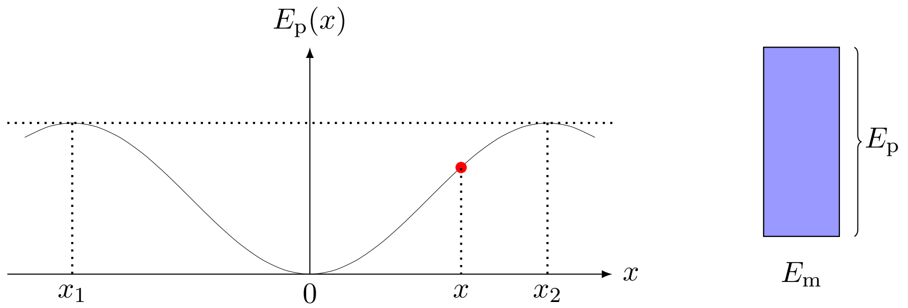
Considérons une particule au voisinage d'une position d'équilibre stable. Elle possède initialement de l'énergie sous deux formes :

- ▷ sous forme d'énergie cinétique E_c grâce à sa vitesse
- ▷ sous forme d'énergie potentielle E_p

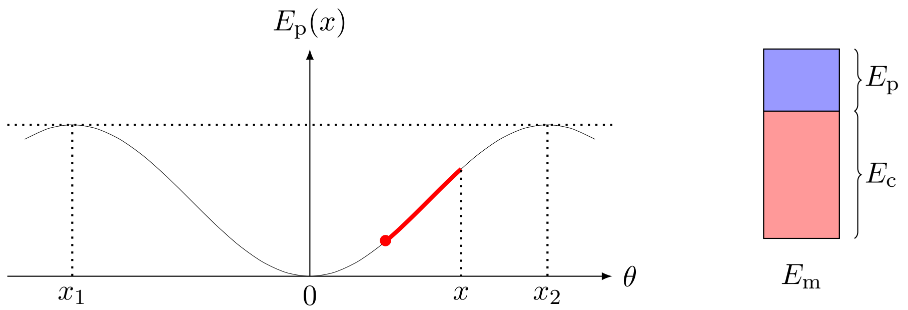
Supposons qu'elle se déplace suivant les x décroissant. On se demande quel va être son mouvement.

► Etat lié

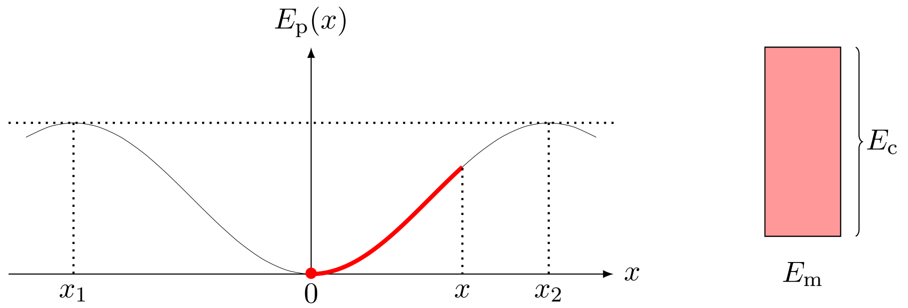
On suppose dans ce cas que la particule possède une vitesse nulle initialement.



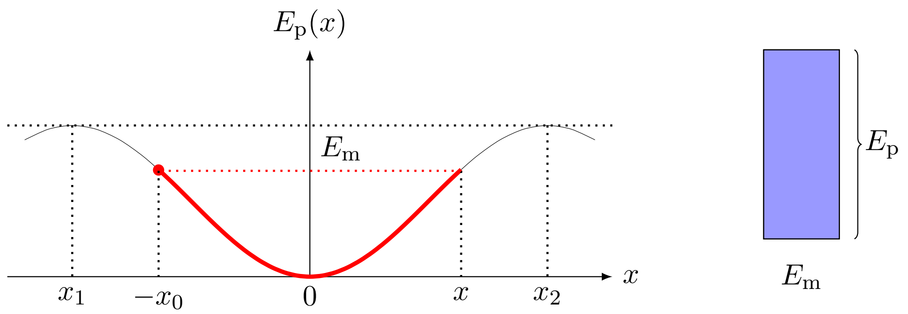
Etat initial $x = x_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, la vitesse est nulle.



En se déplaçant vers le minimum, la masse perd de l'énergie potentielle. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.



Au minimum, la masse a perdu toute son énergie potentielle. Son énergie cinétique, et donc sa vitesse, est maximale.

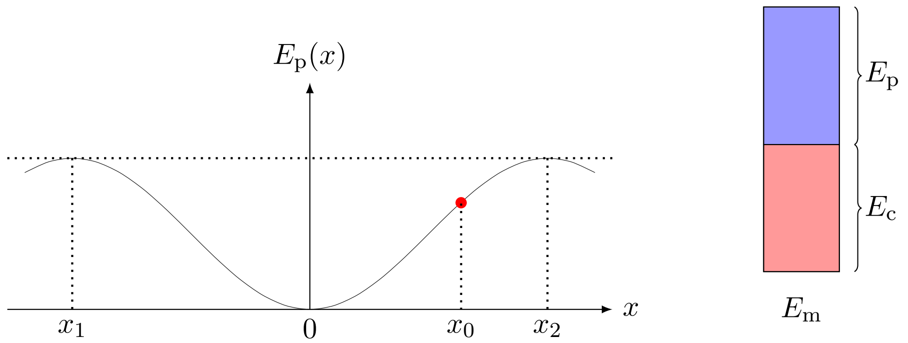


La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximal $-x_0$ par symétrie. Ensuite, la masse repart dans l'autre direction et oscille.

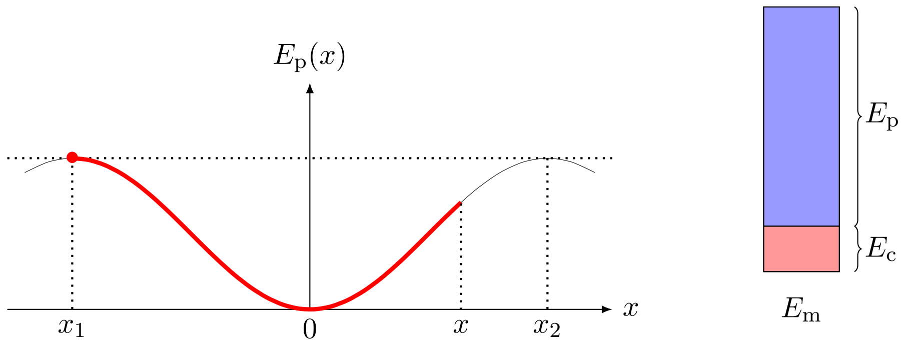
Définition. Etat lié
Lorsque l'énergie cinétique initiale de la particule ne lui permet pas de franchir les maxima de l'énergie potentiel, son mouvement est borné.
La particule n'a pas assez d'énergie pour sortir du puits de potentiel, on parle d'état lié.

▶ Etat libre (ou de diffusion)

On suppose que la particule part de la même position mais désormais elle possède une vitesse élevée, qu'on retrouve sous la forme d'énergie cinétique.



Initialement la particule est en x_0 et on suppose sa vitesse négative : elle se dirige vers les x décroissant. Elle va repasser par les mêmes étapes que précédemment.



La masse arrive sur le maximum de potentiel mais il lui reste de l'énergie cinétique ($\sim$ de la vitesse), elle va donc passer par dessus le maximum de potentiel et continue son mouvement.

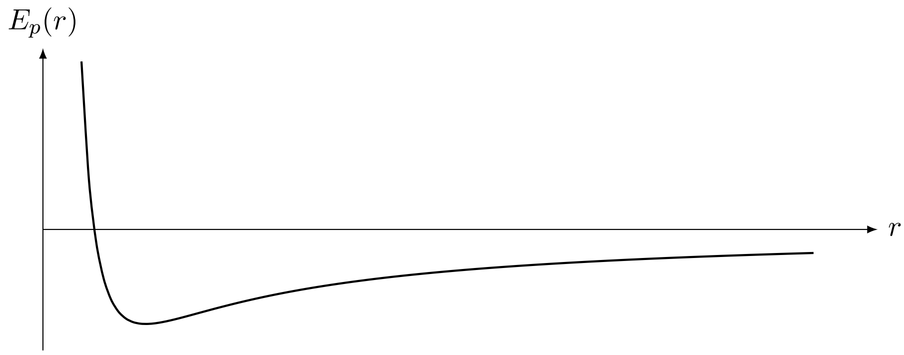
Définition. Etat de diffusion
Lorsque l'énergie cinétique initiale de la particule lui permet de franchir les maxima de l'énergie potentiel, son mouvement est sans fin.
La particule a assez d'énergie pour sortir du puits de potentiel, on parle d'état libre ou de diffusion.

▶ Etat libre ou état de diffusion

Méthode en DS. Energie et nature d'une trajectoire
Sur un graphe d'énergie potentielle, on représente l'énergie mécanique initiale de la particule $E_m(0)$.

- si l'énergie mécanique de la particule est supérieure à l'énergie potentielle maximale : le mouvement de la particule ne sera pas borné.
  Si $E_m(0) > E_{p,max} \Rightarrow$ état de diffusion
- si l'énergie mécanique de la particule est inférieure à l'énergie potentielle maximale : le mouvement de la particule sera confiné.
  Si $E_m(0) < E_{p,max} \Rightarrow$ état de lié

> ***Exemple 10 :*** *On donne le graphe de l'énergie potentielle d'une particule. A quelle condition la particule aura un état de diffusion ?*



4.4 Dynamique autour d'une position d'équilibre (pour aller plsu loin)

▶ Exemple de l'oscillateur harmonique

Prenons le cas d'un oscillateur harmonique : par exemple, une masse au bout d'un ressort qui glisse sans frottement le long d'un axe. On mesure la position de la masse à l'aide de la coordonnée x, avec comme origine le point d'attache du ressort.
Calculons l'énergie mécanique :

- ▷ Energie potentiel d'un ressort : $E_{p,k} = \dfrac{k}{2}(l - l_0)^2$. Ici, $l(t) = x(t)$ et on trouve facilement que $x = l_0$ est la position d'équilibre stable.

- ▷ Energie cinétique : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$. Ici $v(t) = \dot{x}(t)$.

L'énergie mécanique est donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

> **Propriété. Equation du mouvement et énergie mécanique**
> On obtient l'équation du mouvement d'une particule solide en dérivant par rapport au temps l'énergie mécanique.

Attention !

- ▷ on dérive par rapport au temps l'énergie mécanique ⇒ équation du mouvement
- ▷ on dérive par rapport à la position l'énergie potentiel ⇒ position d'équilibre

Si on dérive l'énergie mécanique par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ car le système est conservatif, il n'y a pas de force de frottement}$$

♡ *Instant math* ♡ :

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{\dot{x}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}f(\dot{x})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}}_{\ddot{x}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}}$$

Notamment :

- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(x - l_0)^2\right] = \dot{x} \times 2(x - l_0)$
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{x}^2\right] = \ddot{x} \times 2\dot{x}$

$$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}(x - l_0) = 0 \ \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

On retrouve bien l'équation classique du système masse-ressort, c'est-à-dire de l'oscillateur harmonique.

> **Propriété. Comportement d'un OH**
> Tout système dont l'énergie potentiel peut s'écrire comme $E_p(x) \simeq C + \dfrac{K}{2}(x - x_{eq})^2$ possède le comportement d'un oscillateur harmonique.

▶ Mouvement près d'une position d'équilibre stable

Considérons un graphe énergétique et zoomons aux alentours d'une position d'équilibre stable. Suffisemment proche de x_{eq}, la courbe ressemble à une parabole.

heartsuit Instant math heartsuit : une parabole est une courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Propriété. Développement de Taylor
Au voisinage d'un nombre x_1, une fonction f peut être approximer par :

$$f(x) \simeq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + f''(x_1)\frac{(x - x_1)^2}{2}$$

Appliquons le développement de Taylor à proximité de la position d'équilibre x_{eq} :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{eq}) + \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq})\frac{(x - x_{eq})^2}{2}$$

Comme x_{eq} est une position d'équilibre stable :
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{eq}) = 0$
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq}) > 0$. On le notera K.

On a donc :

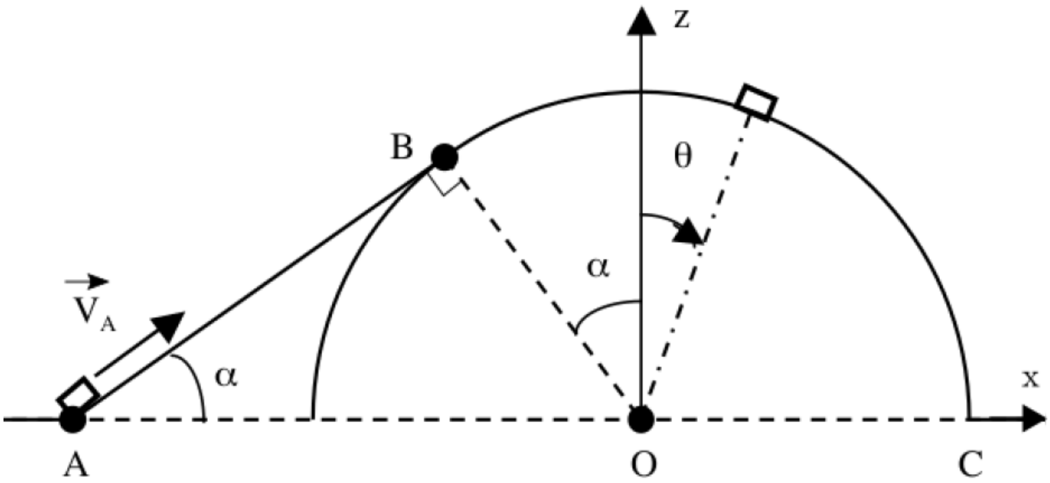
$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + \frac{K}{2}(x - x_{eq})^2$$

On retrouve le comportement d'un OH.

Propriété. Mouvement autour d'une position d'équilibre stable
Autour d'une position d'équilibre stable, tous les systèmes présentes des oscillations de faibles amplitudes régies par l'équation d'un oscillateur harmonique.

Décollage d'un skieur

Un skieur, masse 80kg, arrive sur une bosse modélisée en deux partie :
▷ rampe rectiligne AB inclinée d'un angle de 30° par rapport à l'horizontale
▷ une portion circulaire BC de rayon $R = 2\text{m}$ et d'angle $\pi/2 + \alpha$.
La bosse est conçue de telle sorte que AOB soit rectangle en B.



À l'instant $t = 0$, le glaçon est lancé depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$, puis il glisse sans frottement sur le tremplin. On admet que le mouvement a lieu dans le plan Oxz et on définit la base cartésienne associée $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$. On désigne par $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$ l'intensité du champ de pesanteur

1. Par un raisonnement énergétique, montrer que le skieur atteint le point B si sa vitesse en A est supérieur à une vitesse limite v_l :
$$v_l = \sqrt{2Rg\cos\alpha}$$
2. Donner alors le lien entre la vitesse v_B du skieur au point B et sa vitesse v_A initiale.

   On s'intéresse désormais au mouvement entre B et C et on suppose que $v_A > v_l$. On étudie le mouvement du skieur à l'aide d'une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de centre O.
3. Faire un schéma des forces appliquées au skieur, puis projeter le principe fondamentale de la dynamique sur les vecteurs de la base polaire.
   En déduire une expression de N en fonction de m, R, θ, $\dot{\theta}$ et g.
4. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur du skieur en un point M quelconque en fonction de m, R, θ, $\dot{\theta}$ et g.
5. Montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du skieur est :
$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)}$$
6. A quel condition sur v_B, puis sur v_A y a-t-il décollage au point niveau du point B ?
7. On suppose qu'il n'y a pas décollage entre B et le sommet de la bosse. Déterminer l'angle θ_d pour lequel le skieur décolle de la bosse.