Chap XVII

Moments cinétiques

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ **Moment cinétique d'un point matériel**
  - moment cinétique par rapport à un point fixe
  - moment cinétique par rapport à un axe fixe
- ♡ **Moment d'une force sur un point matériel**
  - moment d'une force par rapport à un point fixe
  - moment d'une force par rapport à un axe fixe
  - notion de bras de levier
- ♡ Théorème du moment cinétique

Savoir Faire

Calculer le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe fixe

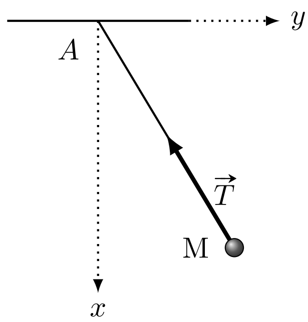
Calculer le moment d'une force sur un point matériel par rapport à un axe fixe

Applications du TMC
- *cas du pendule simple*
- *cas du pendule conique*

Nous avons développé deux approches de la dynamique des points matériels :

- **à travers la quantité de mouvement (∼ PFD)** qui permet de traiter toute situation mais qui est parfois un peu lourde car on obtient les équations horaires du mouvement.
- **à travers l'énergie (∼ TEM)** qui permet de retrouver des grandeurs non temporelle (vitesse, position, ...) en absence de frottement

Nous avons déjà rencontré de nombreux cas où la direction de la force n'est pas constante mais cette dernière est toujours orientée vers un même point fixe. C'est le cas par exemple d'un pendule.



Nous allons développer ici une approche, **les moments cinétiques**, qui convient particulièrement à l'étude de ces cas.

Attention ! *Chapitre est cours et peut sembler de prime abord peu important. Mais il développe des techniques* ***indispensable*** *pour les deux chapitres suivant (mouvement à force centrale et rotation des solides).*

1 Moments cinétiques et trajectoires

1.1 Analogie entre PFD - TEM - TMC

Il est important de comprendre comment sont construits les 3 lois phares de la mécanique du point. Prenons le Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- le terme de gauche représente la variation de la quantité de mouvement : c'est le domaine de la **cinématique**
- le terme de droite représente les forces extérieures : c'est la **mécanique**
- le "=" n'est possible que dans un référentiel galiléen

On retrouve cette même structure :

- dans le Théorème de l'Energie Mécanique : la variation de l'énergie mécanique (∼ "*gauche*") est égale, dans un référentiel galiléen, aux travaux élémentaires des forces non-conservatives ("∼ "*droite*").
- dans le Théorème du moment cinétique : la variation du moment cinétique d'un point matériel (∼ "*gauche*") est égal, dans un référentiel galiléen, à la somme des moments des forces (∼ "*droite*").

dans un référentiel galiléen,

PFD :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$$

TMC :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_M^O}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}}^O}$$

TEM :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \delta W(\vec{F}_{NC})$$

1.2 Moment cinétique d'un point matériel

▶ "Avec les mains"

Le moment cinétique d'un point matériel est une grandeur **purement cinématique** ($\sim$ pas de force). $\vec{L}_M^O$ décrit "la quantité de rotation d'un point matériel M autour d'un point fixe O.
C'est un vecteur :
▷ sa direction indique l'axe autour duquel le point tourne
▷ sa norme : "masse $\times$ distance à l'axe de rotation $\times$ vitesse de rotation
Unité : kg $\times$ m $\times$ m.s^{-1}

Attention ! Quand on écrit $\vec{L}_M^O$ on pense "moment cinétique de M mobile par rapport à O fixe"!!!!!!!!!!!!!!

▶ Définition et calcul

Définition. Moment cinétique par rapport à un point
Le moment cinétique d'un point mobile M par rapport à un point fixe O est noté $\vec{L}_M^O$:

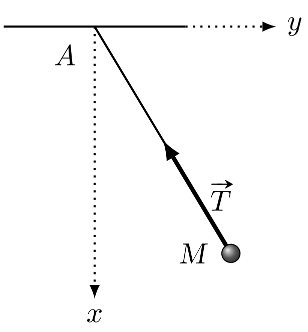
$$\vec{L}_M^O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Attention ! Parler du moment cinétique de M n'a aucun sens!! Un moment cinétique est défini à l'aide de 2 points :
▷ point mobile M : point qui tourne
▷ point fixe O : point autour duquel on tourne

Tout comme pour le PFD, on préfèrera utiliser des grandeurs scalaires.

Définition. Axe de rotation
Un axe de rotation (Δ) est défini par :
▷ un point O par lequel passe l'axe
▷ un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ qui donne sa direction
On note alors $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$.

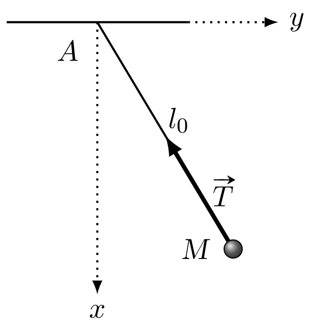
> *Exemple 1 : L'axe de rotation d'une porte :*
> ▷ *point fixe : un des gonds*
> ▷ *vecteur : vecteur vertical*

> *Exemple 2 :*
>
> 
>
>
> *Axe de rotation du pendule :*
> ▷ *un point : point fixe A d'attache du fil*
> ▷ *vecteur : $\vec{e}_z$*

Définition. Moment cinétique par rapport à un axe
Le moment cinétique d'un point mobile M par rapport à un axe fixe $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$ est noté $L_M^{(\Delta)}$

$$L_M^{(\Delta)} = \vec{L}_M^O \cdot \vec{u}_\Delta$$

Exemple 3 :



On souhaite calculer le moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Δ) de rotation du pendule.

0. ***On définit le point mobile, le point fixe et l'axe de rotation***
   - ▷ *Point mobile : la masse M*
   - ▷ *Point fixe A : point d'attache du pendule*
   - ▷ *Axe : $(\Delta) = (A, \vec{e}_z)$*

1. ***On écrit les vecteurs cinématiques***
   On choisit un repère cylindrique de centre A.
   - ▷ *position : $\overrightarrow{AM} = l_0 \vec{e}_r$*
   - ▷ *vitesse : $\vec{v} = l_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$*

2. ***On calcule le moment cinétique par rapport au point fixe***

$$\vec{L}_M^A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = l_0 \vec{e}_r \wedge m l_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_M^A = m l_0^2 \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m l_0^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

   ♡ *Instant math* ♡
   Dans une base directe : $\vec{1} \wedge \vec{2} = \vec{3}$ et on décale vers la gauche !!

3. ***On calcule le moment cinétique par rapport à l'axe fixe***

$$L_M^{(\Delta)} = \vec{L}_M^A \cdot \vec{e}_z = m l_0^2 \dot{\theta}$$

Attention ! *Le point fixe qui définit l'axe et le point fixe par rapport auquel on calcule le moment cinétique sont les mêmes !*

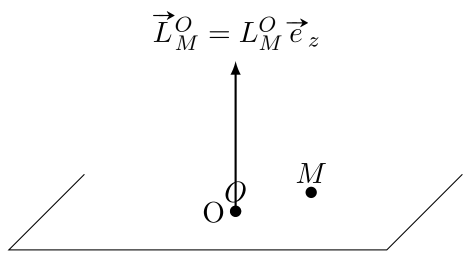
1.3 Cas particulier : mouvement plan

Le moment cinétique $\vec{L}_M^O$ représente la "quantité de rotation" d'un point M autour d'un point O. Si cette grandeur est nulle, cela signifie que le point M ne tourne pas autour de O.

Propriété. Mouvement rectiligne
Si le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O nul alors le mouvement de M est rectiligne et passe par O.

▶ Trajectoire d'un mouvement plan

On étudie la trajectoire d'un point M possédant un mouvement plan : le point M se déplace dans le plan (O, x, y).
- ▷ vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$
- ▷ vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$



On a alors :

$$\vec{L}_M^O = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \wedge m(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) = (x\dot{y} - y\dot{x})\,\vec{e}_z$$

Le moment cinétique du point M pointe toujours dans la direction de $\vec{e}_z$. On admettra la contrapposé comme vraie.

Propriété. Moment cinétique et mouvement plan
Un point mobile M dont le moment cinétique par rapport à O est de direction fixe possède un mouvement plan.
Le plan du mouvement est perpendiculaire à $\vec{L}_M^O$.

Attention ! Cette propriété est très importante !

Astuce pratique : " montrer que le mouvement de M est plan " $\Rightarrow$ je montre que $\vec{L}_M^O$ est de direction fixe

2 Moment de force et théorème du moment cinétique

2.1 Moment de force

Le moment cinétique décrit la quantité de rotation d'un point mobile. Tout comme la variation de la quantité de mouvement d'un point dépend des forces qui s'appliquent en ce point, la variation du moment cinétique dépend d'une grandeur **mécanique** appelée **moment des forces**.

Définition. Moment d'une force par rapport à un point fixe
Le moment d'une force $\vec{F}$ appliqué à un point M par rapport à un point fixe O est notée $\vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F})$

$$\vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

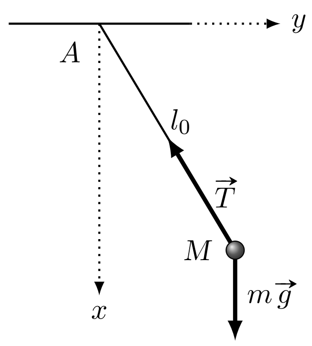
De la même façon que pour le moment cinétique, on peut définir le moment d'une force par rapport à un axe.

Définition. Moment d'une force par rapport à un axe fixe
Le moment d'une force par rapport à un axe fixe $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$ est noté $\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{F})$

$$\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

"Avec les mains"
Le moment d'une force appliquée en M par rapport à un axe (Δ) rend compte d'à quel point la force fait tourner le point M autour de (Δ).

Exemple 4 :



Calculons les moment des deux forces qui s'appliquent en M par rapport à l'axe de rotation $(\Delta) = (A, \vec{e}_z)$.

▷ *Tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$*

$$\vec{\mathcal{M}}_M^A(\vec{T}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T} = l_0\vec{e}_r \wedge -T\vec{e}_r$$

$$\vec{\mathcal{M}}_M^A(\vec{T}) = -l_0T\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$$

On trouve un moment par rapport à A nul et donc un moment par rapport à l'axe (Δ) également nul.
Ce résultat est attendu ! La force de tension du fil n'entraîne pas le mouvement de rotation de M autour de (Δ) : son moment est nul.

▷ *poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_x$*
Attention ! *On exprime tout dans une même base ! ! On a choisi précédemment $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ donc on doit exprimer $\vec{e}_x$ dans cette base*

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\mathcal{M}}_M^A(m\vec{g}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{g} = l_0\vec{e}_r \wedge mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$$
$$\vec{\mathcal{M}}_M^A(m\vec{g}) = -l_0 mg\sin\theta\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -l_0 mg\sin\theta\vec{e}_z$$

Une fois qu'on a le moment par rapport au point fixe, on calcule celui par rapport à l'axe :

$$\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(m\vec{g}) = \vec{\mathcal{M}}_M^A(m\vec{g}) \cdot \vec{e}_z = -l_0 mg\sin\theta$$

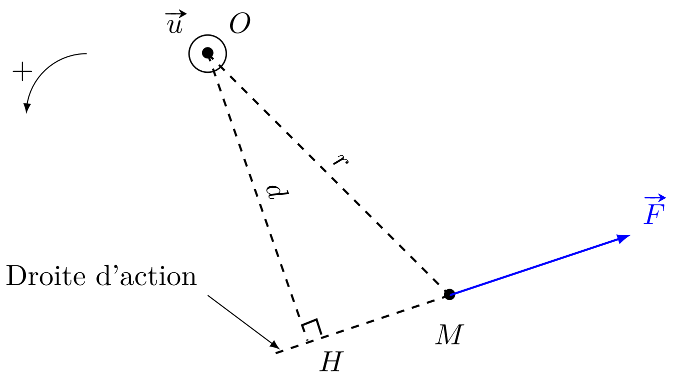
2.2 Bras de levier

Derrière cette notion un peu abstraite de moment d'une force se cache un concept de la vie de tous les jours : le bras de levier.

▶ Notion de bras de levier

On considère un axe Δ dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et une force $\vec{F}$ orthogonale à l'axe (Δ).

On définit **la droite d'action** comme la droite dans le prolongement de $\vec{F}$. On note d la distance entre la droite d'action et l'axe de rotation. Cette grandeur est nommée **bras de levier**.



Attention ! d n'est pas égale à r : c'est la plus petite distance entre O et la droite d'action. Pour la trouver, on trace le projeté orthogonal de O sur la droite.

Propriété. Moment d'une force et bras de levier
Le moment d'une force par rapport à un axe (Δ) est

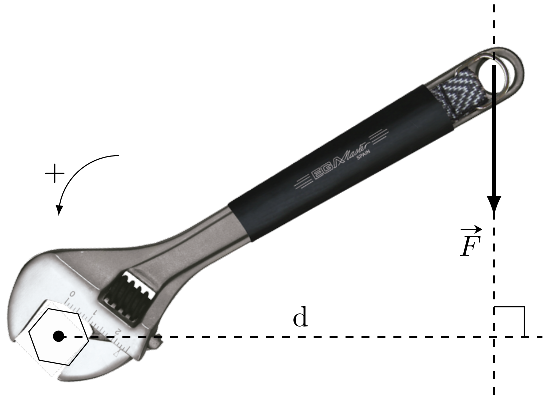
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm\text{" force } \times \text{ bras de levier}$$

Le signe dépend du sens dans lequel la force fait tourner le point.
Cas particulier : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$ si
- ▷ la droite d'action passe par l'axe (Δ) ;
- ▷ si la force est parallèle l'axe Δ

▶ Applications : La clé à molette

Si on essaie de dévisser un écrou, on utilise une clé à molette. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'opérateur (de norme F). On note (Δ) l'axe de rotation de l'écrou. Le moment par rapport à l'axe exercée par l'opérateur est $\mathcal{M}_\Delta = -Fd$.

On constate que pour avoir un moment le plus grand possible (en valeur absolue), on a intérêt à exercer une force orthogonale à la clé à molette. Dans ce cas, le bras de levier d est égale à la longueur de la clé. Par conséquent, plus la clé est grande, plus l'action est efficace.



2.3 Enoncé

Le Théorème du Moment Cinétique, ou TMC, est le pendant du PFD mais pour les moments.

Théorème. Théorème du moment cinétique
Dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un point M soumis à un ensemble de forces extérieures vérifie :

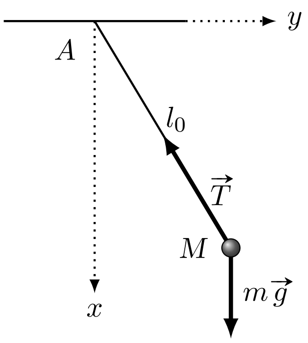
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_M^O}{\mathrm{dt}} = \sum \vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F})$$

Théorème. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe
On considère dans un référentiel galiléen un point M soumis à un ensemble de forces extérieures. Pour un axe fixe $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$ on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}L_M^{(\Delta)}}{\mathrm{dt}} = \sum \mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{F})$$

Attention ! Le TMC est une reformulation du PFD : il est donc nécessaire de se placer dans un référentiel galiléen pour pouvoir l'utiliser.

Exemple 5 :



Pour le pendule simple on avait par rapport à l'axe $(\Delta) = (A, \vec{e}_z)$:

- ▷ *moment cinétique :* $L_M^{(\Delta)} = ml_0^2\dot{\theta}$
- ▷ *moment de la tension du fil* $\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{T}) = 0$
- ▷ *moment du poids :* $\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(m\vec{g}) = -mgl_0 \sin\theta$

Le TMC nous indique que :

$$\frac{dL_M^{(\Delta)}}{dt} = \mathcal{M}_M^{(\Delta)}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{T})$$

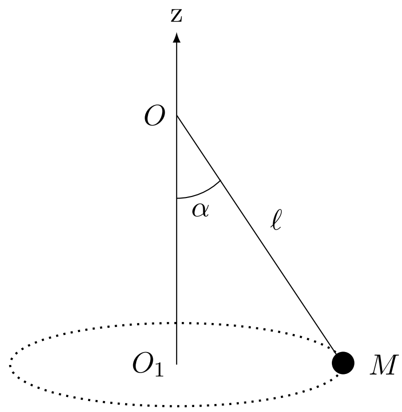
$$\frac{dml_0^2\dot{\theta}}{dt} = -mgl_0 \sin\theta + 0 \;\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l_0}\sin\theta = 0$$

On retrouve bien l'équation différentielle obtenue avec le PFD.

3 Exemple d'application : le pendule conique

Un point matériel M (de masse m) est suspendu à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ attaché en un point O fixe. On définit l'axe vertical $(\Delta) = (Oz)$.
On fait tourner le pendule de manière à ce que la masse effectuer un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω dans le plan horizontal (xO_1y). Le fil garde une inclinaison constante α par rapport à la verticale.

On remarque alors que si on augmente la vitesse de rotation ω, l'angle α augmente également. On cherche la relation entre ces deux grandeurs.



1. Sur un schéma en 3D représenter la base cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
   Faire de même pour un schéma à $2D$ dans le plan contenant O, O_1 et M
2. ▷ Exprimer le moment cinétique de M par rapport au point O en fonction de m, l, α, ω et des vecteurs de la base.
   ▷ Déterminer le moment cinétique des forces par rapport au point O.
   ▷ En appliquant le TMC par rapport à l'axe (O, z), montrer que l'on tombe sur une impasse.
   ▷ En appliquant le TMC par rapport au point O, trouver un lien entre α et ω.