TD08 Corrigé — Régime sinusoïdal forcé

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

1 Calcul d'impédance

Exercice 1 - : Calculs d'impédance :

1.
$$Z = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

2.
$$\underline{Z} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}$$

3.
$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega + 1/(jL\omega)} = R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} = R\frac{1 + jL/R\omega - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2}$$

4.
$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega + 1/R} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R + \frac{1 + 2jRC\omega}{jC\omega - R(C\omega)^2} = R\frac{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}{jRC\omega - (RC\omega)^2}$$

5.
$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{1}{jC_1\omega + 1/(jL\omega)} = \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{jL\omega}{1 - LC_1\omega^2} = \frac{1 - L(C_1 + C_2)\omega^2}{jC_2\omega(1 - LC_1\omega^2)}$$

Exercice 2 - Modèle équivalent de condensateur :

1. On a un condensteur en parallèle avec une résistance, l'impédance équivalente est donc donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_P} + jC_P\omega$$

Donc

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_P}{1 + jR_PC_p\omega}$$

2. L'association d'un condensateur et d'une résistance en série donne une impédance équivalente :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = R_S + \frac{1}{jC_S\omega} = R_S - \frac{j}{C_S\omega}$$

Pour que les deux association soient équivalente, il faut que les impédances équivalentes obtenues soient égales.

$$\frac{R_P}{1 + jR_PC_p\omega} = R_S - \frac{j}{C_S\omega}$$

On fait apparaître la partie réelle et la partie imaginaire dans le membre de droite :

$$R_P\frac{1 - jR_PC_P\omega}{1 + (R_PC_p\omega)^2} = R_S - \frac{j}{C_S\omega}$$

On a donc :

$$R_S = \frac{R_P}{1 + (R_PC_P\omega)^2} \quad \text{et} \quad \frac{-1}{C_S\omega} = \frac{-R_P^2C_P\omega}{1 + (R_PC_P\omega)^2}$$

Donc :

$$R_S = \frac{R_P}{1 + (R_PC_P\omega)^2} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{1 + (R_PC_P\omega)^2}{R_P^2C_P\omega^2}$$

3. Pour $R_P C_P \omega >> 1$:
$$R_S = \frac{R_P}{1+(R_P C_P \omega)^2} \simeq \frac{R_P}{(R_P C_P \omega)^2}$$
Donc
$$R_S = \frac{1}{R_P C_P^2 \omega^2}$$
et
$$C_S = \frac{1+(R_P C_P \omega)^2}{R_P^2 C_P \omega^2} \simeq \frac{(R_P C_P \omega)^2}{R_P^2 C_P \omega^2}$$
Donc
$$C_S = C_P$$
4. On a donc $C_P = C_S = 1\mu$F et $R_P \simeq 1$MΩ. On a bien une résistance très élevé en parallèle d'un condensateur idéal. En première approximation on peut considérer cette résistance en parallèle comme infini. Le modèle du condensateur idéal est correct.

2 RSF

Exercice 3 - Étude d'un circuit en régime sinusoïdal forcé :

1. On a deux branches sur lesquelles deux dipôles sont en parallèles. On va écrire pour chaque branche l'impédance équivalente.
   ▷ Sur la branche de gauche :
$$\underline{Z}_g = R + jL\omega$$
   ▷ Sur la branche de droite :
$$\underline{Z}_d = R + 1/jC\omega \Rightarrow \underline{Z}_d = \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}$$
Les deux branches sont associées en parallèles donc :
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_g} + \frac{1}{\underline{Z}_d}$$
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{R+jL\omega} + \frac{jC\omega}{1+jRC\omega}$$
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1+jRC\omega + jC\omega(jL\omega+R)}{(jL\omega+R)(1+jRC\omega)}$$
$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1-LC\omega^2+2jRC\omega}{(jL\omega+R)(1+jRC\omega)}}$$
On peut développer le dénominateur mais on gardera cette forme pour la suite des questions.
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} \times \frac{1-LC\omega^2+2jRC\omega}{1-LC\omega^2+j\omega(L/R+RC)}$$
2. On passe en notation complexe des signaux :
$$\begin{cases} u(t) = U_m \cos\omega t \rightarrow \underline{u}(t) = U_m e^{j\omega t} \\ i_1(t) = I_{0,1}\cos(\omega t+\phi_1) \rightarrow \underline{I_1} = I_{0,1}e^{j(\omega t+\phi_1)} = \underline{I_{0,1}}e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I_{0,1}} = I_{0,1}e^{j\phi_1} \\ i_2(t) = I_{0,2}\cos(\omega t+\phi_2) \rightarrow \underline{I_2}(t) = I_{0,2}e^{j(\omega t+\phi_2)} = \underline{I_{0,2}}e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I_{0,2}} = I_{0,2}e^{j\phi_2} \end{cases}$$
On applique la loi d'Ohm en RSF : $\underline{u}(t) = \underline{Z}_{\text{eq}}\underline{I}(t)$. Donc :
$$\underline{I}(t) = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}\underline{u}(t)$$

En notations complexes et pont diviseur de courant : Pour $\underline{I_1}(t)$:

$$\underline{I_1}(t) = \frac{R + 1/jC\omega}{R + 1/jC\omega + R + jL\omega}\underline{I}(t)$$

$$\underline{I_1}(t) = \frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2}\underline{I}(t)$$

Pour $\underline{I_2}(t)$:

$$\underline{I_2}(t) = \frac{R + jL\omega}{R + 1/jC\omega + R + jL\omega}\underline{I}(t)$$

$$\underline{I_2}(t) = \frac{jC\omega(R + jL\omega)}{2jRC\omega + 1_L C\omega^2}\underline{I}(t)$$

3. **Attention ! Important ! ! !**

Méthode en DS. Obtenir un déphasage particulier

Calculer le déphasage $\phi_2 - \phi_1$ entre deux signaux complexes $\underline{X_2}$ et $\underline{X_1}$:

$$\phi_2 - \phi_1 = \arg\frac{\underline{X_2}}{\underline{X_1}}$$

- en phase $\phi_2 - \phi_1 = 0$
  $\frac{\underline{X_2}}{\underline{X_1}}$ est un réel **positif POSITIF** : sa partie imaginaire est nulle et sa partie réelle est positive
- en phase $\phi_2 - \phi_1 = \pi$
  $\frac{\underline{X_2}}{\underline{X_1}}$ est un réel **négatif NEGATIF** : sa partie imaginaire est nulle et sa partie réelle est négative
  négative
- en opposition de phase $\phi_2 - \phi_1 = \pi./2$
  $\frac{\underline{X_2}}{\underline{X_1}}$ est un imaginaire pure : sa partie réelle est nulle

- On cherche $\varphi_1 - \varphi$ avec φ_1 l'argument de $\underline{i_1}$ et φ l'argument de $\underline{i}$.

$$\varphi_1 - \varphi = \arg\frac{\underline{i_1}}{\underline{i}} = \arg\frac{\underline{I_1}}{\underline{I}}$$

$$\varphi_1 - \varphi = \arg\left[\frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2}\right]$$

On veut les deux signaux en phase donc $\varphi_1 - \varphi = 0$:

$$\frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} \quad \text{est un réel positif}$$

On l'écrit comme somme de partie réelle et imaginaire en multipliant son dénominateur par son complexe conjugué :

$$\frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} = \frac{(jRC\omega + 1)(-2jRC\omega + 1 - LC\omega^2)}{\text{la valeur du dénominateur n'a pas d'importance ici}}$$

on isole la partie imaginaire du numérateur et on la veut égale à zéro. Soit :

$$RC\omega(1 - LC\omega^2) - 2RC\omega = 0 \Rightarrow -RC\omega(1 + LC\omega^2)$$

$$R = 0 \;\text{ ou }\; C = 0 \text{ ou } \;\omega = 0 \;\text{ ou } 1 + LC\omega^2 = 0 \text{ ce qui est impossible}$$

- Avec la même,méthode on obtient :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \arg\frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} = \arg\frac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}}$$

Ici on a :

$$\frac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega(jL\omega + R)}$$

On se force à faire apparaître des quantités sans dimension :

$$\frac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega(1 + j\omega L/R)}$$

Les deux signaux devant être en quadrature de phase, on veut que $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2$ donc que

$$\arg \frac{\underline{I_2}}{-\underline{I_1}} = \pm\pi/2 \Rightarrow \frac{\underline{I_2}}{-\underline{I_1}} \text{ est un imaginaire pur}$$

Donc :

$$\frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega(1 + j\omega L/R)} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega - LC\omega^2} \text{ est un imaginaire pur}$$

On calcule sa partie réelle en multipliant le dénominateur par son complexe conjugué :

$$\frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega(1 + j\omega L/R)} = \frac{(1 + jRC\omega)(-jRC\omega - LC\omega^2))}{\text{la vlaur du dénominateur n'a pas d'importance ici}}$$

On isole sa partie imaginaire et on la veut égale à 0 :

$$-LC\omega^2 + R^2C^2\omega^2 = 0 \rightarrow RC = \frac{L}{R}$$

4. On cherche une condition sur ω, L et C pour que les amplitudes de i_1 et i_2 soient égales. Pour cela on calcule le module de $\frac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}}$. Il est plus simple (pour se débarrasser des racines carrés) de travailler sur les modules au carré. On cherche R, C, ω tels que :

$$|\frac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}}|^2 = 1$$

$$\frac{|1 + jRC\omega|^2}{|jRC\omega(1 + j\omega L/R)|^2} = 1$$

$$\frac{1 + (RC\omega)^2}{(RC\omega)^2(1 + (\omega L/R)^2)} = 1$$

$$1 + (RC\omega)^2 = (RC\omega)^2(1 + (\omega L/R)^2)$$

$$1 = (RC\omega)^2(\omega L/R)^2) \Rightarrow L^2C^2\omega^4 = 1 \Rightarrow LC\omega^2 = 1$$

Exercice 4 - Étude expérimentale d'un moteur :

1. On remplace dans le circuit le moteur par une bobine d'inductance L et une résistance de résistance r. On se place en RSF et on utilise la notation complexe :

$$E(t) = E\cos\omega t \rightarrow \underline{E}(t) = Ee^{j\omega t}$$

$$u_r(t) = U\cos(\omega t + \phi) \rightarrow \underline{u_r}(t) = \underline{U}e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{U} = Ue^{j\phi}$$

On cherche ici l'amplitude complexe de la tension $\underline{u_r}$ $\underline{U}$. Le pont diviseur de tension permet d'obtenir :

$$\underline{U} = \frac{r}{r + R + jL\omega}E$$

On a donc

$$U = |U| = \frac{rE}{\sqrt{(r + R)^2 + L^2\omega^2}}$$

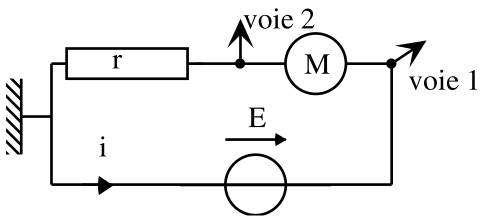
$$\phi = \arg(\underline{U}) = -\arg[(r + R) + jL\omega] = -\arctan\left(\frac{L\omega}{r + R}\right)$$

Attention ! On peut utiliser la fonction tangente car la partie réelle de $(r+R)+jL\omega$ est positive et son argument est bien compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Application numérique : $\boxed{U = 2,64 \text{ V et } \phi = -29,9°}$.

2. $\phi < 0$ donc $u_r(t)$ est en retard sur $E(t)$.

3. On pense à bien placer la masse du GBF. La masse de l'oscilloscope et celle du GBF doivent correspondre. Pour mesurer les tensions on réalise les branchements suivants :



4. $U = 2,64V$ donc l'amplitude est de 2,64 carreaux.
Le plus délicat est le décalage temporel entre les deux courbes. Pour le déterminer on relie le déphasage et le retard temporel. Pour cela on se rappelle que :

$$\begin{array}{ccc} \text{déphasage} & \longleftrightarrow & \text{retard temporel} \\ 2\pi & \longleftrightarrow & T = 1 \text{ période} \\ \phi & \longleftrightarrow & \delta t \end{array}$$

En appliquant une règle de 3 on a :$\delta t = \frac{\phi}{2\pi}T$ soit $\delta t = 1,7$ ms.
Comme $u_r(t)$ est en retard, elle atteint son maximum après $E(t)$. Ce retard temporelle est égale à $|\delta t|$, $u_r(t)$ atteint son maximum $1,7$ms après $E(t)$.

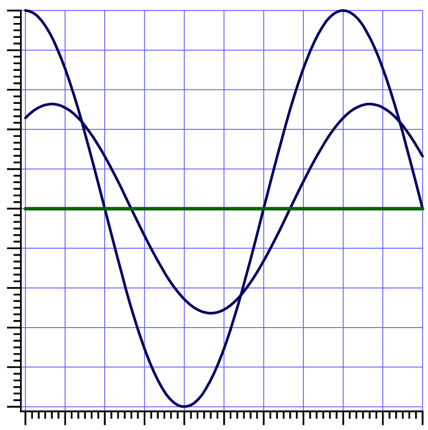


Fig. 1 – Étude expérimentale du moteur

Exercice 5 - Modèle de Thévenin en régime sinusoïdal forcé (*) :

1. ▷ L'intensité sortante $i(t)$ est nulle, tous les dipôle du générateur sont donc en série.
   ▷ On adopte une représentation complexe des signaux $v(t) \to \underline{v} = \underline{V_0} e^{j\omega t}$.
   Par un pont diviseur de tension on a :

$$\underline{V_0} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + jL\omega + R} E_0 = \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

   ▷ Pour obtenir l'équation différentielle on multiplie par le dénominateur :

$$\left(1 - LC\omega^2 + jRC\omega\right) \underline{V_0} E_0 \;\Rightarrow\; \underline{v} + LC \times \underbrace{(j\omega^2)\underline{v}}_{\frac{\mathrm{d}^2\underline{v}}{\mathrm{d}t^2}} + RC \times \underbrace{j\omega\underline{v}}_{\frac{\mathrm{d}\underline{v}}{\mathrm{d}t}} = \underline{e}$$

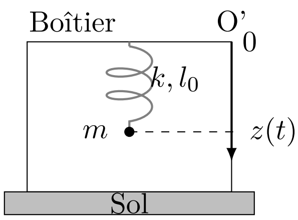
   Si l'équation différentielle est vérifiée en complexe, elle l'est aussi en réel : $v(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = e(t)$.

2. ▷ A cause du courant sortant i non nul, les dipôles ne sont plus en série. Impossible d'associer les impédances, on applique les lois des nœuds/mailles et on adopte une représentation complexe des signaux.
On appelle i_0 la tension délivrée par le GBF et i_C celle circulant dans le condensateur. Loi des nœuds : $i_0 = i + i_C$
$$\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{v} \text{ avec } \underline{u}_R = R\underline{i}\ ;\ \underline{u}_L = jL\omega\underline{i}\ ;\ \underline{v} = \underline{i}_C/jC\omega$$
Donc : $\underline{e} = (R + jL\omega)\left(\underline{i} + \underline{i}_C\right) + \underline{v} \Rightarrow \underline{e} = (R + jL\omega)\left(\underline{i} + jC\omega\underline{v}\right) + \underline{v}$

On a donc $\underline{e} = (R + jL\omega) + \left(1 + jRC\omega - LC\omega^2\right)\underline{v}$
Finalement :
$$\underline{v} = \underbrace{\frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}}_{\underline{E}_{eq}} - \underbrace{\frac{R + jL\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}}_{\underline{Z}_{eq}}\underline{i}$$

3 RSF sur oscillateur mécanique

Exercice 6 - Le sismographe : :



1. La gravité et la force du ressort s'équilibrent. Donc $-k(z_{\text{éq}} - l_0) + mg = 0$ donc $z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$.
2. PFD : $m\ddot{z}(t) = mg - k(z(t) - l_0) - \alpha\dot{z}(t) = -k(z(t) - z_{\text{éq}}) - \alpha\dot{z}(t)$. La solution une sinusoïde décroissant de manière exponentielle.
3. On rajoute une force, dans ce cas, le PFD est modifié $m\ddot{z}(t) = mg - k(z(t) - l_0) - \alpha\dot{z}(t) + mz_0\omega^2\cos(\omega t)$ et on réécrit l'équation différentielle
$$m\ddot{z}(t) + \alpha\dot{z}(t) + k(z(t) - z_{\text{éq}}) = z_0 m\omega^2\cos(\omega t) \tag{3.1}$$
4. On cherche $\underline{Z}(t) = z_{\text{éq}} + \underline{Z_0}\exp[i\omega t]$. Il vient
$$\underline{Z_0} = \frac{mz_0\omega^2}{k - m\omega^2 + i\alpha\omega} = \frac{z_0\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\alpha}{m}\omega}\ . \tag{3.2}$$
5. Pour la résonance il faut résoudre
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right) = 0 \tag{3.3}$$
Tous calculs fait, on trouve
$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \alpha^2/(2m^2\omega_0^2)} = \frac{\omega_0^2}{1 - \alpha^2/(2mk)} \tag{3.4}$$
Pour éviter la résonance, il faut $\alpha > \sqrt{2mk}$.

4 Résonance du RLC et lecture graphique

Exercice 7 - Circuit RLC :

1. On passe en notation complexe, et on utilise un pont diviseur :

$$\underline{u} = R/(R + 1/(jC\omega) - jL\omega)\underline{e} = 1/(1 + 1/(jRC\omega) - jL/R\omega)\underline{e}$$

On a donc

$$\underline{I}(\omega) = \underline{U}/R = 1/(1 + 1/(jRC\omega) + jL/R\omega)\underline{e}/R$$

On repasse en réel, et donc $I_\mathrm{m}(\omega) = |\underline{I}(\omega)|$. Il vient

$$I_\mathrm{m} = \frac{e_0}{R}\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2\right)^2}$$

On a donc $Q/\omega_0 = L/R$ et $Q\omega_0 = 1/(RC)$. D'où $Q = 1/R\sqrt{L/C}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

2. Pour mesurer à la fois $e(t)$ et $u(t)$, la masse du circuit doit se trouver entre la résistance et le générateur. Or le générateur impose un masse à sa borne d'entrée. Il faut donc placer la résistance en dernier dans le circuit RLC.

   La tension aux bornes de la résistances est plus petite que la tension totale (formule de la question 3), c'est donc la voir Y.$\Rightarrow$ $e(t)$: voie X ; $u(t) = Ri(t)$ voie Y.

   La figure (c) représente l'évolution de l'amplitude du courant en fonction de la fréquence. Pour savoir quel point de la figure (c) on a obtenu, il faut savoir quelle est la fréquence délivrée par $e(t)$.
   On observe 3 périodes sur environ 8.5 divisions, d'où $T = 8.5 \times 200\,\mu\mathrm{s}/3$ d'où $f \approx 1800\,\mathrm{Hz}$ (aux incertitudes près).

3. Lorsque $f = f_0$, l'amplitude du courant est maximale. On mesure $f_0 = (2.4 \pm 0.1)\,\mathrm{kHz}$ et donc $\omega_0 = (15.0 \pm 0.6) \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

4. À la résonance, $I_\mathrm{m} = e_0/R \approx 18\,\mathrm{mA}$ (figure 1) et $e_0 \approx 3.2\,\mathrm{V}$ (figure 1) donc $R \approx 180\,\Omega$.

5. On mesure directement la bande passante sur la figure 2, il faut que la courbe soit supérieure à $I_\mathrm{m}/\sqrt{2} \approx 13\,\mathrm{mA}$ et donc $f_1 = 2\,\mathrm{kHz}$ et $f_2 = 3\,\mathrm{kHz}$ d'où $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 6.3 \times 10^3\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

6. $Q = \omega_0/\Delta\omega \approx 2.4$.

7. $\Delta\omega = R/L$ d'où $L \approx 30\,\mathrm{mH}$ et $C = 1/(RQ\omega_0)$ d'où $C \approx 150\,\mathrm{nF}$.