TD10 Filtrage linéaire

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Exercices qualitatifs

Exercice 1 - Spectre d'un signal et concevoir un filtre :

1. En récupérant les amplitudes et phases des différentes harmoniques ($f_1 = 50\text{Hz}$; $f_3 = 100\text{Hz}$; $f_4 = 150\text{Hz}$) on a :
$$e(t) = 0 + A_1 \cos(100\pi t + \pi) + A_3 \cos 200\pi t + A_4 \cos(300\pi t + \pi/3)$$
On voudrait pouvoir conserver en sortie de filtre un signal aussi sinusoïdal que possible, de fréquence comprise entre 75 Hz et 200 Hz.
2. Pour obtenir un signal sinusoïdal, il ne doit apparaître dans la décomposition de Fourier qu'une seule fréquence.
3. Les deux fréquences fonctionnent (elles sont entre 75 et 200 Hertz) mais il vaut mieux prendre 100Hz car son amplitude est plus grande.
4. On veut couper les hautes et basses fréquences, il faut un filtre passe bande.
5. On va "centrer" la bande passante sur la fréquence qu'on souhaite conserver, ici 100Hz, et couper les autres. Donc la fréquence 150Hz doit être en dehors de la bande passante. La largeur de cette dernière doit inférieur à 100Hz.
On a alors $Q > \omega_0/\Delta\omega$ avec
   - $\omega_0 = 2\pi f_0$ avec $f_0 = 100\text{Hz}$
   - $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ avec $\Delta f = 100\text{Hz}$.

   Finalement : $Q > 100/100 = 1$. A noter que plus Q sera élevé, plus le filtre sera sélectif.

Exercice 2 - Effet d'un filtre passe haut :

On considère un filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est de 100 Hz. Donner l'allure du signal en sortie si on envoie en entrée :

1. La fréquence du signal est de 2kHz»100Hz, la fréquence de coupure du filtre. Donc toutes les fréquences des harmoniques, qui sont des multiples de 2kHz seront bien supérieure également à 100Hz et ne seront pas atténuées.
Le signal de sortie sera identique au signal d'entée.
2. Le raisonnement sur la partie oscillante sera le même que précédemment. Mais la tension continue de 1V possède une fréquence nulle : elle sera coupée par le filtre.
Le signal de sortie sera alors une sinusoïde d'amplitude 4V et de fréquence 2kHz sans composante continue.
3. C'est le cas précédent donc on récupèrera en sortie en créneau de même fréquence, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 4V.
4. On remarque que cette fois la fréquence du signal est de 2Hz«100Hz de la fréquence de coupure. Toutes les premières harmoninques (jusqu'à la 50ième) seront coupés par le filtre. Le signal en sortie sera très faible.
Mais, dans le cas d'un passe-haut, il y a un effet dérivateur si $f << f_0$. la dérivée d'un triangle est un créneau de même fréquence : le signal de sortie sera un signal créneau de faible amplitude et de fréquence 2Hz.

Exercice 3 - Concevoir un filtre :

On souhaite nettoyer l'enregistrement d'une conversation, rendu difficilement audible par des bruits divers. On considère que le spectre de l'audition humaine s'étend de 20 Hz à 20 kHz, tandis que celui de la voix couvre un intervalle allant de 100 Hz à 2 kHz.

1. *Cf cours pour tracer un axe log*
2. On veut ne conserver qu'une bande de fréquence : il faut un filtre passe-bande. **Attention !** : on veut centrer la bande passante **en échelle log !!**

$$f_{milieux} \neq \frac{2000+100}{2} = 1050\text{Hz}$$

Si on le place sur l'échelle, ce n'est pas du tout au milieu ! Il faut donc trouver le centre **en échelle log !!**

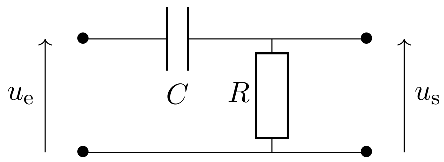
$$\log f_{milieu} = \frac{\log 2000 + \log 100}{2} = 3,3 \ \Rightarrow \ f_{milieu} = 10^{3,3} = 450\text{Hz}$$

3. La largeur de la bande passante est $\Delta\omega = 2000 - 100 = 1900$hz donc $Q = \omega_0/\Delta\omega = 0,23$. Il faut un facteur de qualité faible.

Exercice classique de filtrage

AVANT TOUTE CHOSE ? VOUS ALLEZ FAIRE ET REFAIRE ET RERERERERERERERERAIRE L'ETUDE DES FILTRES CLASSIQUES DU COURS !!!!!!

Exercice 4 - Impédance d'entrée d'un oscilloscope :



1. Pont diviseur de tension : $\underline{H} = \dfrac{R}{R + 1/jC\omega}$

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

On reconnait un filtre passe-haut.

2. $\omega_0 = 20$kHz donc $f_0 = 3,2$kHz
3. Pour $\omega = \omega_0$ alors $\underline{H} = j/(1+j)$ donc $G = 1/\sqrt{2}$ et $G_{dB} = -20\log\sqrt{2} = 3$dB.
   - ▷ Asymptote pour $\omega << \omega_0$:

$$\underline{H} \simeq \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1} \Rightarrow G = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow G_{dB} = 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$$

   on a une droite de pente 20dB/décade.

   - ▷ Asymptote pour $\omega >> \omega_0$:

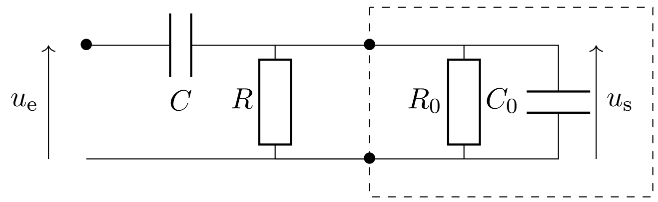
$$\underline{H} \simeq \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = 1 \Rightarrow G = 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$$

   on a une droite horizontale de gain 0dB.
   On peut ensuite tracer grossièrement le graphe du gain en dB.

4. Avec les deux expressions de $\underline{H}$ obtenue précédemment on remarque que :
   - ▷ **BF** : $\underline{H} \simeq j\dfrac{\omega}{\omega_0}$.
     C'est un complexe de partie imaginaire positive $\Rightarrow \arg\underline{H} \simeq +\pi/2$.
   - ▷ **BF** : $\underline{H} \simeq 1$.
     C'est un réel positif $\Rightarrow \arg\underline{H} \simeq 0$.

Plat

On observe la tension de sortie à l'aide d'un oscilloscope ayant une impédance d'entrée due à un groupement parallèle ($R_0 = 1\,\mathrm{M\Omega}$, $C_0 = 30\,\mathrm{pF}$).



1. En associant R, R_0 et C on obtient :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} + jC_0\omega = \frac{R + R_0 + jRR_0C_0\omega}{RR_0} \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \frac{R_0}{1 + R_0/R + jR_0C_0\omega}$$

A l'aide d'un pont diviseur de tension entre $\underline{Z}_{eq}$ et C on a :

$$\underline{H} = \frac{\dfrac{R_0}{1 + R_0/R + jR_0C_0\omega}}{\dfrac{R_0}{1 + R_0/R + jR_0C_0\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jR_0C\omega}{jR_0C\omega + 1 + R_0/R + jR_0C_0\omega}$$

On regroupe les termes :

$$\underline{H} = \frac{jR_0C\omega}{1 + R_0/R + jR_0\left(C + C_0\right)\omega}$$

et l'énoncé nous demande de factoriser par $\dfrac{C}{C + C_0}$:

$$\underline{H} = \frac{C}{C + C_0} \times \frac{jR_0\omega}{\dfrac{1 + R_0/R}{C + C_0} + jR_0\omega}$$

On fait apparaître le $1 + j...$:

$$\underline{H} = \frac{C}{C + C_0} \times \frac{j\dfrac{C + C_0}{1 + R_0/R}R_0\omega}{1 + \dfrac{C + C_0}{1 + R_0/R}R_0\omega}$$

On identifie alors $\omega_0' = \dfrac{1 + R_0/R}{R_0\left(C + C_0\right)}$.

2. Pour que l'influence de l'oscilloscope soit négligeable on veux retrouver la même fonction de transfert que précédemment. Pour cela :
   - ▷ $\dfrac{C}{C + C_0} \simeq 1$ donc $C >> C_0$
   - ▷ $\dfrac{1 + R_0/R}{R_0\left(C + C_0\right)} \simeq \dfrac{1}{RC}$. Comme $C >> C_0$ il faut que $\dfrac{1 + R_0/R}{R_0C} \simeq \dfrac{1}{RC}$ donc $R_0 >> R$.

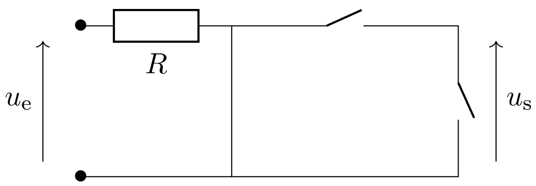
   Un oscilloscope doit posséder une grande résistance d'entrée R_0 et une faible capacité C_0.

Pas de dessert

Exercice 5 - Filtre de Colpitts : Pour tout l'exercice on se place en RSF et on adopte une représentation complexes des signaux.

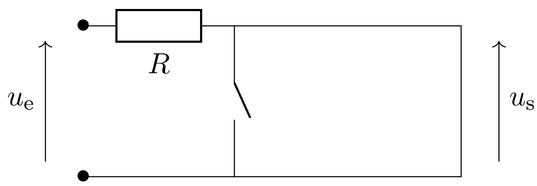
1. On se place à hautes et basses fréquences

BF : $\omega \to 0$



La partie du circuit n'est pas connecté à l'entrée : $u_s = 0$.

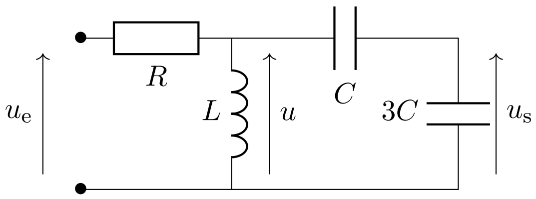
HF : $\omega \to \infty$



Tension aux bornes d'un fil : $u_s = 0$.

C'est un filtre passe-bande.

2. *C'est le cas typique où on ne peut pas appliquer un pont diviseur de tension pour relier u_s et u_e. On va passer par une tension intermédiaire u*



Par un pont diviseur de tension on a :

$$\underline{u_s} = \frac{1/3jC\omega}{1/3jC\omega + 1/jC\omega}\underline{u} = \frac{\underline{u}}{4}$$

On va ensuite exprimer $\underline{u}$ à partir de $\underline{u_e}$ via un pont diviseur de tension. On associe en série entre deux condensateurs :

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{3jC\omega} = \frac{4}{3jC\omega}$$

Puis $\underline{Z_C}$ avec la bobine en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{3}{4}jC\omega \;\Rightarrow\; \underline{Z_{eq}} = \frac{jL\omega}{1 - \frac{3}{4}LC\omega^2}$$

Finalement :

$$\underline{u} = \frac{\dfrac{jL\omega}{1-\frac{3}{4}LC\omega^2}}{\dfrac{jL\omega}{1-\frac{3}{4}LC\omega^2} + R}\underline{u_e} = \frac{jL\omega}{R\left(1 - \dfrac{3}{4}LC\omega^2\right) + jL\omega}\underline{u_e}$$

On a donc : $\underline{u_s} = \dfrac{1}{4}\dfrac{j\dfrac{L}{R}\omega}{1 - \dfrac{3}{4}LC\omega^2 + j\dfrac{L}{R}\omega}\underline{u_e}$.

On identifie $\underline{H}$ et on trouve alors dans l'ordre $\omega_0 \to Q \to A$.

$$\frac{3}{4}LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}$$

$$\frac{L}{R}\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{3C}{L}}$$

$$\frac{L\omega}{4R} = \frac{A}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\dfrac{Q\omega_0}{j\omega}$:

$$\underline{H} = \frac{A}{\dfrac{Q\omega_0}{j\omega} - \dfrac{Q\omega}{j\omega_0} + 1} = \frac{A}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $1/j = -j$.

4. ▷ pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = A$ donc $G_{dB}[\omega_0] = 20\log A = 20\log 0.25 = -12$dB. C'est cohérent avec le graphe.
   ▷ on mesure ω_0 lorsque le gain atteint son max : on lit $f_0 \simeq 160$Hz soit $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1000$Hz
   ▷ Pour les parties rectilignes, on se place en **BF** et **HF**

   ▷ Basse fréquence : $\omega << \omega_0$

$$\underline{H} \simeq \frac{A}{-jQ\dfrac{\omega_0}{\omega}} \Rightarrow G = \frac{A\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow G_{dB} = 20\log\frac{A}{Q} + 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$$

   Asymptote croissante de pente 20 décibel par décade.

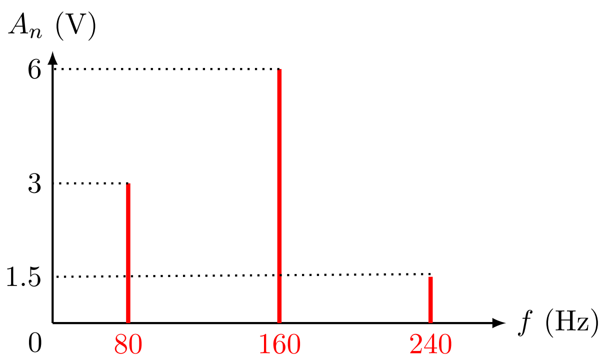
   ▷ Haute fréquence : $\omega >> \omega_0$

$$\underline{H} \simeq \frac{A}{jQ\dfrac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow G = \frac{A\omega_0}{Q\omega} \Rightarrow G_{dB} = 20\log\frac{A}{Q} + 20\log\frac{\omega_0}{\omega} = 20\log\frac{A}{Q} - 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$$

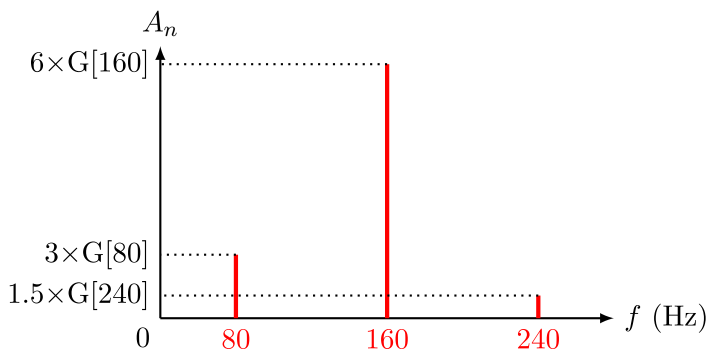
   Asymptote décroissante de pente -20 décibel par décade.

5. On lit les valeurs du gain pour chacune des fréquences des harmoniques sur le graphe et on multiplie l'amplitude de chaque harmonique par le gain associé.
   Les amplitudes à 80 et 240 Hertz seront atténuées plus fortement que celle à 160Hz. (*les hauteurs des piques ne sont pas à l'échelle*).

   Entrée



   Sortie



Exercice 6 - Filtre ADSL (*) :

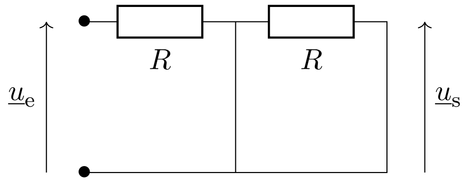
Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une large gamme de fréquence : de 0 à 4 kHz pour les signaux téléphoniques (transmettant la voix) et de 25 kHz à 2 MHz pour les signaux informatiques (internet).

1. Pour récupérer seulement l'un des deux signaux il faut donc trier suivants les fréquences : il faut filtrer.
   ▷ signaux téléphoniques : ce sont les basses fréquences du signal. On les récupère en sortie d'un filtre passe-bas.
   ▷ signaux informatiques : ce sont les hautes fréquences du signal. On les récupère en sortie d'un filtre passe-haut.
   La fréquence de coupure de chacun de ces filtres doit :
   ▷ préserver le signal souhaité
   ▷ exclure l'autre
   Dans les deux cas, on peut "couper" à partir de 10kHz, $f_0 = 10$kHz.

   Pour toute la suite, on se place en RSF et on adopte une représentaiton complexe des signaux.

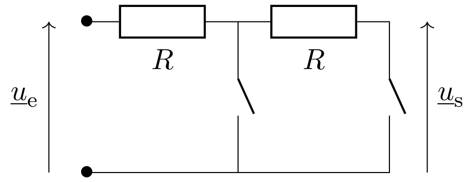
2. On réalise une étude HF et BF pour trouver la nature du filtre.

Basse Fréquences



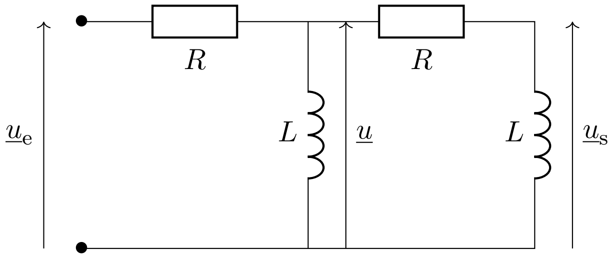
$\underline{u}_s = 0$ (tension d'un fil)

Hautes Fréquences



$\underline{u}_s = \underline{u}_e$ (pas de courant dans les résistances)

3. **Attention !** On ne peut pas directement appliquer un pont diviseur de tension entre $\underline{u}_e$ et $\underline{u}_s$. On passe par une tension intermédiaire $\underline{u}$.



Pont diviseur entre $\underline{u}_s$ et $\underline{u}$:

$$\underline{u}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}\underline{u}$$

Pont diviseur entre $\underline{u}$ et $\underline{u}_e$:
on associe les trois dipôle de droite :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R + 2jL\omega}{jL\omega\,(R + jL\omega)}$$

Soit $\underline{Z}_{eq} = \dfrac{jL\omega\,(R + jL\omega)}{R + 2jL\omega}$.
Finalement :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}}\underline{u}_e = \frac{jL\omega\,(R + jL\omega)}{R\,(R + 2jL\omega) + jL\omega\,(R + jL\omega)}\underline{u}_e$$

En regroupant les deux on trouve :

$$\underline{u}_e = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \frac{jL\omega\,(R + jL\omega)}{R\,(R + 2jL\omega) + jL\omega\,(R + jL\omega)}\underline{u}_e$$

On simplifie et on fait apparaître des grandeurs adimensionnés, ici $\dfrac{L}{R}\omega$ en simplifiant en haut et en bas par R^2.

$$\underline{u}_e = \frac{-L^2\omega^2}{R^2 + 2jLR\omega + jLR\omega - L^2\omega^2}\underline{u}_e = \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + 3j\frac{L}{R}\omega - \left(\frac{L}{R}\right)^2}\underline{u}_e$$

On a bien : $\underline{H} = \dfrac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}$ avec $x = \omega/\omega_0$ et $\omega_0 = R/L$.

4. On donne le diagramme de Bode en amplitude ci-dessous.
   - ▷ On trouve une pente de +40bB/dec pour les basses fréquences et une pente nulle pour les hautes fréquences.
   - ▷ On choisit $\omega_0 = 2\pi f_0$ avec $f_0 = 10\text{kHz}$, soit $\omega_0 = 6,28\ 10^4\text{rad/s}$.
     Avec $L = 10\text{mH}$, on trouve $R = L\omega_0 = 628\Omega$.
   - ▷ Comme c'est un filtre passe-haut :
     - ▷ la fréquence des signaux internet la plus atténuée est 25kHz, soit $x = 2,5$. On mesure un Gain en dB de $G_{dB}(2,5) = -3$, ce qui correspond à un gain de $10^{-3/20} \simeq 0,7$.
     - ▷ la fréquence des signaux téléphone la moins atténuée est 4kHz, soit $x = 0,4$. On mesure un Gain en dB de $G_{dB}(0,4) = -20$, ce qui correspond à un gain de $10^{-20/20} = 0,1$.