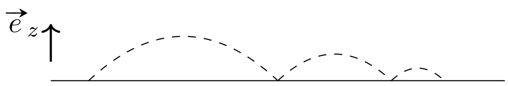
TD14 Cinématique du point

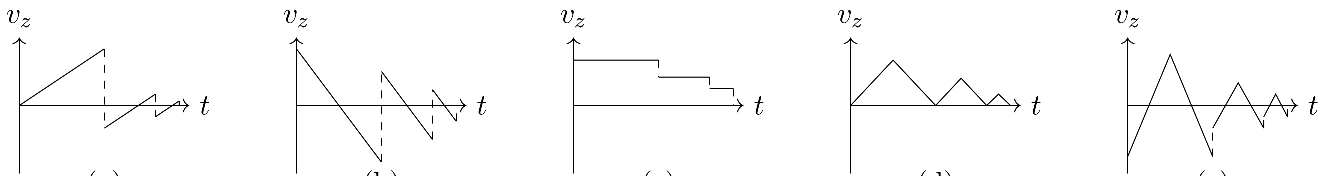
Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Exercice 1 - Applications du cours :

1.Une balle est lancée et suit la trajectoire ci-contre.



Quelle courbe ci-dessous correspond le mieux à l'évolution de v_z (composante verticale de la vitesse) au cours du temps ? Que vaut alors la vitesse verticale quand la balle fait demi-tour ?

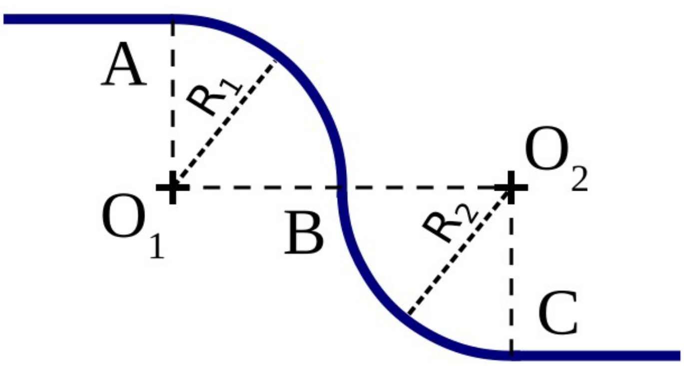


(a) (b) (c) (d) (e)

2. Un mobile dont l'accélération conserve une même direction peut-il avoir un mouvement courbe ? Donner un exemple.

3.Un mobile peut-il avoir une accélération non nulle en un instant où sa vitesse est nulle ?

Exercice 2 - Base de Frenet :



On considère un mobile se déplaçant à la vitesse $v = 70$km/h constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles (avant A et après C), raccordés par deux quarts de cercles rayon R_1 et R_2, avec $R_2 > R_1$ (même si ce n'est pas visible sur la figure) et de centre O_1 et O_2.

1. Reproduire à l'échelle 1/200 le circuit avec $R_2 = 2R_1 = 20$m.
2. On s'intéresse au mouvement entre A et B.
   - ▹ Où se trouve le centre de la base de Frénet pour cette partie du mouvement.
   - ▹ Placer le point mobile en un point M_1 quelconque entre A et B et représenter la base de Frenet en ce point.
   - ▹ Donner l'expression de la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet $(\vec{T}_1, \vec{N}_1)$.
   - ▹ Les représenter sur le schéma (on ne tiendra pas compte de l'échelle).
3. Mêmes questions pour la partie $B \to C$.
4. Pour cette question on considère que le point mobile accélère ($\sim v$ augmente) entre A et C. Représenter qualitativement la vitesse et l'accélération en deux points M_1 et M_2, situés entre A et B et situé entre B et C.
5. Même question que précédemment mais cette fois-ci le point décélère.

1 Coordonnées cartésiennes

Exercice 3 - Chute libre :

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes de l'accélération sont, à chaque instant :

$$a_x(t) = \quad ; \quad a_y(t) = 0 \quad ; \quad a_z(t) = -g$$

Initialement la masse possède une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan (Oxz), de norme v_0 et formant un angle α avec l'axe horizontal (Ox). Elle part du point H de coordonnées $(0, 0, h)$.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et position dans la base cartésienne.
2. Exprimer la norme de la vitesse de M à chaque instant.
3. Exprimer la norme de accélération de M à chaque instant.
4. Exprimer la trajectoire $z[x]$.
5. Exprimer l'altitude maximale z_{max} atteint par la masse.
6. Exprimer la distance parcourue d par la masse avant de toucher le sol.
7. (*) Exprimer l'angle β que forme la tangente à la trajectoire avec l'axe horizontale.
   Astuce : à l'aide d'un schéma, exprimer $\tan\beta$ en fonction de $z'[x]$.

Exercice 4 - Décélération d'une voiture :

Une voiture initialement animé d'une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u}_x$ pénètre dans un milieu résistant dans lequel elle est soumis à des frottements. Son accélération est alors proportionnelle à l'opposée de sa vitesse $\vec{a} = -k\vec{v}(t)$; k est une constante et $\vec{v} = v(t)\vec{u}_x$ la vitesse du mobile.

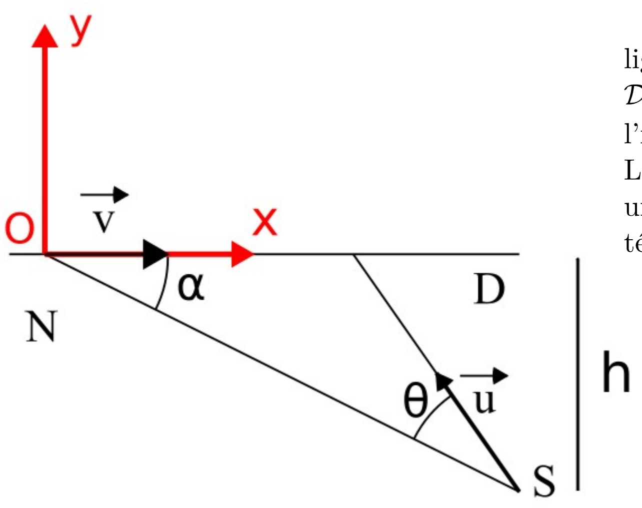
1. Donner la dimension du coefficient k
2. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$. En déduire l'équation du mouvement $x(t)$. Commenter.
3. Exprimer la vitesse $v(x)$ du mobile comme une fonction de l'abscisse x.
4. Reprendre les questions précédentes mais désormais l'accélération de la voiture est constante : $\vec{a} = -ka_0\vec{u}_x$.

Exercice 5 - Ascenseur :

Un ascenseur monte du rez de chaussée au dernier étage, soit un parcours total de 190 m. Sa vitesse vitesse est initialement nulle et il atteint une vitesse maximale de 305 m/mn. Lorsqu'il accélère ou ralentit, il le fait à accélération constante de norme 1,22 m.s^{-2}.
On décompose son mouvement en trois phases :
▹ il accélère jusqu'à sa vitesse maximale
▹ il continue à vitesse constante
▹ il ralentit pour atteindre le dernier étage avec une vitesse nulle

1. Tracer le graphe de l'évolution de son accélération au cours du temps. En déduire celui de la vitesse.
2. Combien de temps dure la phase d'accélération ? En déduire la distance parcouru par l'ascenseur lors de cette première phase ?
3. Même question mais lors de la décélération.
4. Combien de temps met-il à parcourir les 190 m de hauteur, sans arrêter aux étages intermédiaires.

Exercice 6 - Bataille navale (**) :



Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$, le long d'une droite $\mathcal{D}$. Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant $t = 0$ où l'angle $(\overrightarrow{NS}, \vec{v})$ a la valeur α.
La torpille est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u}$. On introduit un repère cartésien $O, \vec{e}_x, \vec{e}_y$).

1. Exprimer dans la base la position $\overrightarrow{OT}$ de la torpille en $t = 0$.
2. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ s'écrit comme :

$$\vec{u} = u(\sin(\alpha+\theta)\vec{e}_y - \cos(\alpha+\theta)\vec{e}_x)$$

   Astuce : on pourra introduire l'angle β entre la verticale et $\vec{u}$
3. En déduire le déplacement $\overrightarrow{ST}(t)$ de la torpille à l'instant t à l'aide du vecteur $\vec{u}$, puis dans la base cartésienne.
4. En déduire la position $\overrightarrow{OT}(t)$ de la torpille à un instant quelconque t.
5. (*) Montrer que la torpille touche le bateau à un instant τ :

$$\tau = \frac{h \sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)u}$$

6. (*) Montrer que pour toucher le bateau, l'angle de tir $\theta =$ doit vérifier :

$$v \sin\alpha = u \sin\theta$$

7. On veut que T atteigne N en un temps minimum. A quel instant, c'est-à-dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? (On donnera la relation entre θ et α). Calculer l'angle de tir θ correspondante.

2 Avec les coordonnées cylindriques

Exercice 7 - Éléments de cinématique :

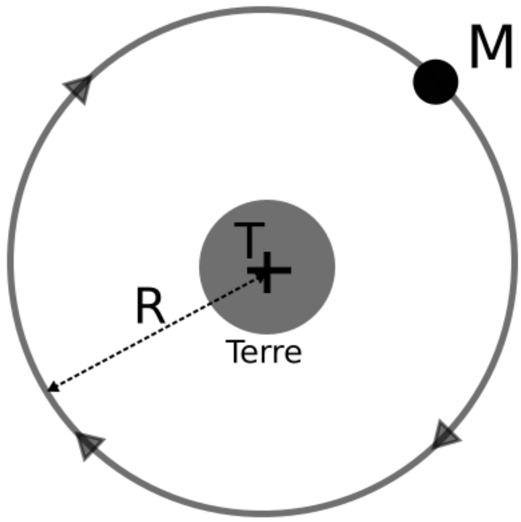
On considère un point mobile M en mouvement dont les coordonnées en coordonnées cylindrique sont, à chaque instant :

$$r(t) = R \quad ; \quad \theta(t) = \omega t \quad ; \quad z(t) = v_0 t$$

avec R, ω et v_0 des constantes.

1. Donner les dimensions de R, ω et v_0.
2. Exprimer les coordonnées des vecteurs vitesses et accélération dans la base cylindrique.
3. Donner la direction de l'accélération. Commenter
4. Donner l'allure de la trajectoire.
5. Désormais on considère $R(t) = R\cos\Omega t$.
   Exprimer les coordonnées des vecteurs vitesses et accélération dans la base cylindrique.

Exercice 8 - Mouvement circulaire : Un satellite, repéré par un point matériel M, tourne autour de la Terre en suivant une orbite circulaire de rayon R et de centre T, centre de la Terre.



1. Introduire sur le schéma un système de coordonnées adapté à l'étude du mouvement de la bille.
2. Donner le signe de la vitesse angulaire.
3. On appelle $v(t)$ la vitesse du satellite. Donner l'accélération $\vec{a}$ en fonction de v, de R et des vecteurs de la base.
4. Le PFD permet de monter que :
$$\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R^2}\vec{e}_r$$
En déduire que le mouvement est uniforme et exprimer la vitesse du satellite v_0.

Exercice 9 - Histoire de mouche :

Une mouche est sur l'extrémité de la trotteuse d'une horloge, on note $R = 30$cm la taille de l'aiguille. Elle se dirige vers le centre en restant sur l'aiguille. Elle avance à une vitesse constante de $v_0 = 0.1\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. On s'intéresse au mouvement de la mouche.

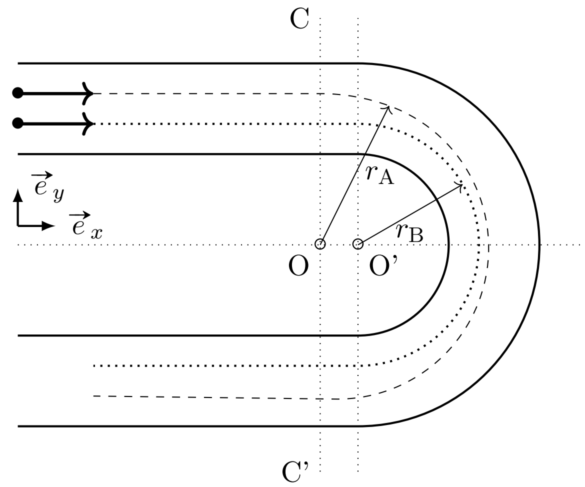
1. Introduire un repère de coordonnées qui vous semble pertinent pour étudier le problème.
2. Donner la distance $L(t)$ entre le centre de l'aiguille et la mouche.
En déduire le vecteur position de la mouche $\overrightarrow{OM}$
3. Quelle est la vitesse angulaire de rotation d'une trotteuse ?
4. Donner la vitesse de la mouche.
5. Donner l'accélération de la mouche.
6. Combien de tour va réaliser la mouche avant d'atteindre le centre ? Représenter alors sa trajectoire.

Exercice 10 - Course de karting :

Deux conducteurs A et B s'affrontent lors d'une course de Karting. Ils arrivent en ligne droite, coupent l'axe CC' au même instant et prennent le virage de deux manières différentes :

- Le kart A suit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r_\mathrm{A} = 90\,\mathrm{m}$.
- Le kart B prend l'intérieur et suit une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $r_\mathrm{B} = 75\,\mathrm{m}$.

On appelle $\mathcal{R}$ le référentiel $(\mathrm{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On chercher à déterminer lequel des deux candidats sortira en premier du virage en coupant à nouveau l'axe CC' gagnant ainsi la course. On suppose que OO' $= r_\mathrm{A} - r_\mathrm{B}$.



1. Déterminer puis calculer les longueurs L_A et L_B des trajectoires des deux kartings.
2. On suppose que les deux kartings roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses pour que dans le virage, les accélérations des 2 kartings restent inférieures à $0.8\ g$ avec $g = 9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur (au delà de cette limite, les kartings et leurs conducteurs dérapent et finissent leur course dans le bac à gravier ou dans les pneus).
3. Conclure. Qui est le plus fort ?