TD14 Cinématique du point

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

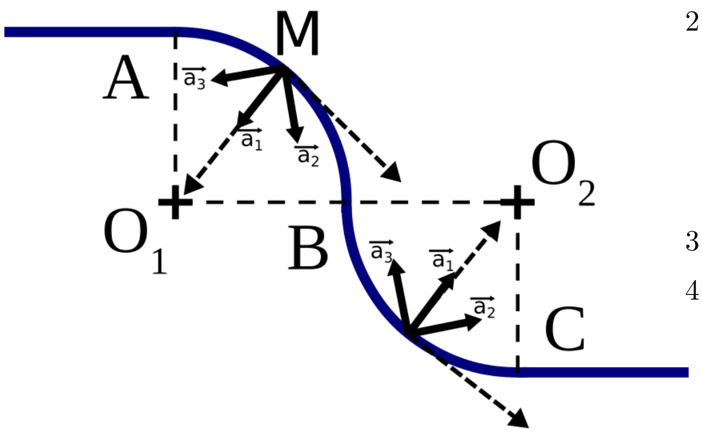
Exercice 1 - Applications du cours :

1. On remarque qu'au cours d'un rebond la vitesse verticale est positive, la balle monte, puis négative, la balle descend. C'est donc la courbe (b).
Lorsque la balle fait demi tour la vitesse verticale s'annule.

2. Il suffit que la vitesse initiale ne soit pas dans la même direction que l'accélération : c'est le cas lorsqu'on lance une balle. l'accélération $\vec{a}$ est constante et égale à $\vec{g}$ mais le mouvement est courbe.

3. Oui, tout comme la dérivée d'une fonction n'est pas nulle quand la fonction s'annule.

Exercice 2 - Base de Frenet :



1. *Faites un beau dessin*
2. ▷ Au centre de l'arc de cercle, soit en O_1.
   ▷ *Cf schéma*
   ▷ Comme la vitesse est constante : $\vec{v} = v_0\vec{T}_1$ et $\vec{a}_1 = \dfrac{v_0^2}{R_1}\vec{N}_1$).
   ▷ *Cf schéma*
3. Mêmes questions pour la partie $B \to C$.
4. Les accélération $\vec{a}_2$ (vitesse qui augmente) et $\vec{a}_3$ (vitesse qui diminue).

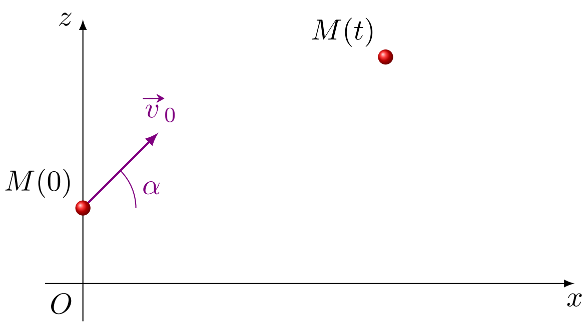
1 Coordonnées cartésiennes

Exercice 3 - Chute libre :

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes de l'accélération sont, à chaque instant :

$$a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = 0 \quad ; \quad a_z(t) = -g$$

Initialement la masse possède une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan (Oxz), de norme v_0 et formant un angle α avec l'axe horizontal (Ox). Elle part du point H de coordonnées $(0, 0, h)$.

1. 

Vecteurs cinématiques
▷ position $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.
▷ vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.
▷ position $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.
Avec les informations du texte on a : $\vec{a} = -g\vec{e}_z$ donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = C_2 \\ \dot{z} = -gt + C_3 \end{cases}$$

Condition initiale :

$$\vec{v}(0) = \underbrace{v_0 \cos\alpha}_{\dot{x}(0)} \vec{e}_+ \underbrace{v_0 \sin\alpha}_{\dot{z}(0)} \vec{e}_z$$

Donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$; $C_2 = 0$; $C_3 = v_0 \sin\alpha$. Finalement il ne se passe rien suivant (Oy), on ne s'y intéresse plus désormais.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t + A_1 \\ z = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + A_2 \end{cases}$$

Condition initiale : $\overrightarrow{OM}(0) = \underbrace{h}_{z(0)} \vec{e}_z$ donc $A_1 = 0$ et $A_2 = h$. Finalement :

$$\overrightarrow{OM} = (v_0 \cos\alpha t)\, \vec{e}_x + \left(-g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + h\right) \vec{e}_z \; ; \; \vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha\, \vec{e}_x + (-gt + v_0 \sin\alpha)\, \vec{e}_z \; ; \; \vec{a} = -g\,\vec{e}_z$$

2. $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0 \sin(\alpha)t}$
3. $|\vec{a}| = g$.
4. On exprimer t en fonction de x : $t = x/v_0 \cos\alpha$ et donc :

$$z[x] = -g\frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + h = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x + h$$

5. **Attention !** *prendre le temps de "traduire" le français en équations mathématique sur les coordonnées !!*
La hauteur maximale est atteinte pour x_{mmax} : $z_{max} = z[x_{max}]$ avec $z'[x_{max}] = 0$. (*Finalement on cherche ici la valeur max d'une fonction* $z[x]$

$$z'[x] = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}x + \tan\alpha \;\Rightarrow\; x_{max} = \frac{\tan\alpha v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

Donc $z_{max} = z[x_{max}]$:

$$z_{max} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}\right)^2 + \tan\alpha \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} + h \;\Rightarrow\; z_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

6. **Attention !** *prendre le temps de "traduire" le français en équations mathématique sur les coordonnées !!*
La distance d parcourue est la solution de $z[x = d] = 0$. Donc :

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos\alpha^2}d^2 + \tan\alpha d + h$$

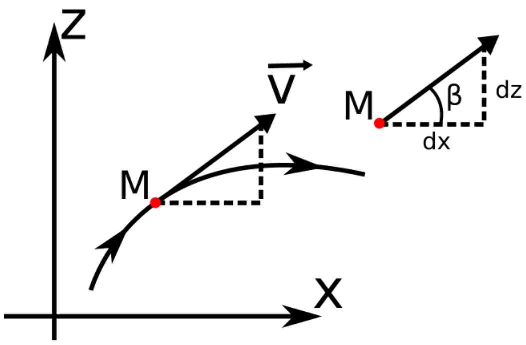
C'est un polynôme d'ordre 2 à résoudre ... $d = \dfrac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right)$

7. Avec un schéma on peut voir que, dans le triangle formée par la vitesse :

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

On trouve alors :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{v_0^2 \cos\alpha^2}x + \tan\alpha$$



Exercice 4 - Décélération d'une voiture :

Une voiture initialement animé d'une vitesse $\vec{v_0} = v_0 \vec{u}_x$ pénètre dans un milieu résistant dans lequel elle est soumis à des frottements. Son accélération est alors proportionnelle à l'opposée de sa vitesse $\vec{a} = -k\vec{v}(t)$; k est une constante et $\vec{v} = v(t)\vec{u}_x$ la vitesse du mobile.

1. $[a] = [k][v]$ donc $[k] = [a]/[v] = \mathrm{s}^{-1}$.
2. **Vecteurs cinématiques**
   - ▷ position $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$
   - ▷ vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ avec $v(t) = \dot{x}$ car $\dot{x} > 0$
   - ▷ accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$

   On a alors : $\ddot{x} = -k\dot{x}$ soit : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = 0$.
   On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 avec $\tau = 1/k$.
   - ▷ solution particulière : $v_P = 0$
   - ▷ solution homogène : $\widetilde{v} = Ae^{-t/\tau}$.

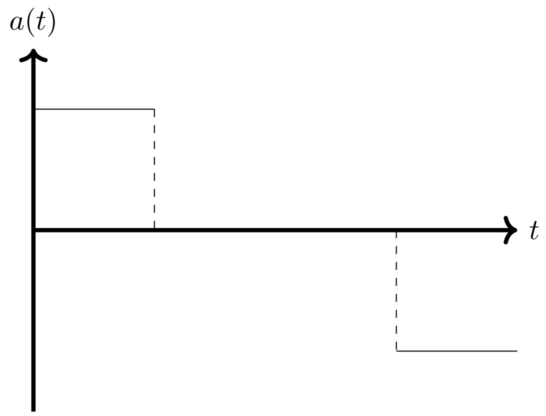
   CI : $v(0) = v_0$ donc $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

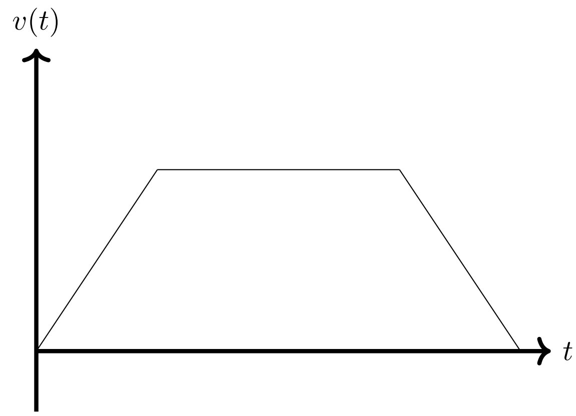
   Pour obtenir $x(t)$ on intègre $v(t)$: $x(t) = -v_0\tau e^{-t/\tau} + C$.
   CI $x(0) = 0$ (voiture initialement à l'origine des positions) donc : $x(t) = v_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. On remarque alors que la vitesse devient nulle pour un temps $t > 5\tau$. La position de la voiture sera alors $v_0\tau$.
3. On va plutôt chercher à exprimer $e^{-t/\tau}$ en fonction de x : $e^{-t/\tau} = 1 - \dfrac{x}{v_0\tau}$.
   Donc : $v[x] = v_0\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau}\right) = v_0 - \dfrac{x}{\tau}$.
4. *On refait pareil mais c'est "plus simple" à intégrer ....*
   - ▷ $[k] = 1$
   - ▷ $\ddot{x} = -ka_0 \Rightarrow v(t) = v_0 - ka_0 t \Rightarrow x(t) = v_0 t - ka_0 t^2/2$.
   - ▷ $t = \dfrac{v_0}{ka_0}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{2ka_0}{v_0^2}x}\right)$ $v[x] = v_0\sqrt{1 - \dfrac{2ka_0}{v_0^2}x}$

Exercice 5 - Ascenseur :

On choisit pour tout l'exercice un axe (Oz) verticale orienté vers le haut, avec O au niveau du sol.

1. L'accélération vaut $+a_0$ au début, 0 au milieu du trajet et $-a_0$ sur la fin. Pour trouver la vitesse il suffit d'intégrer.





2. *Pour la phase d'accélération, on applique la méthode de cinématique ...*
   Vecteur cinématiques
   - ▷ position $\overrightarrow{OM}(t) = z(t)\vec{e}_z$
   - ▷ vitesse $\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{e}_z$
   - ▷ accélération $\vec{a}(t) = \ddot{z}\vec{e}_z$

   On a alors $\ddot{z} = +a_0 \Rightarrow v(t) = \dot{z}(t) = +a_0 t \Rightarrow z(t) = a_0 t^2/2$.
   Fin de la phase d'accélération : $v(\tau) = v_{max}$ donc $\tau = v_{max}/a_0$.
   Distance parcourue $d = z(\tau) = v_{max}^2/2a_0$.

3. On peut remarquer que les deux phases sont similaires, la distance parcourue et le temps seront les mêmes que pour l'accélération.

4. Les 190m de l'immeuble sont parcouru lors de la phase d'accélération (distance $v_{max}^2/2a_0$), la phase à vitesse constante (distance $v_{max}\tau'$) et la phase de décélération (distance $v_{max}^2/2a_0$). Donc :

$$190 = v_{max}^2/2a_0 + v_{max}\tau' + v_{max}^2/2a_0 \;\Rightarrow\; \tau' = \frac{190 - v_{max}^2/a_0}{v_0}$$

Le temps total est alors $T = \tau + \tau' + \tau$.

Exercice 6 - Bataille navale (**) :

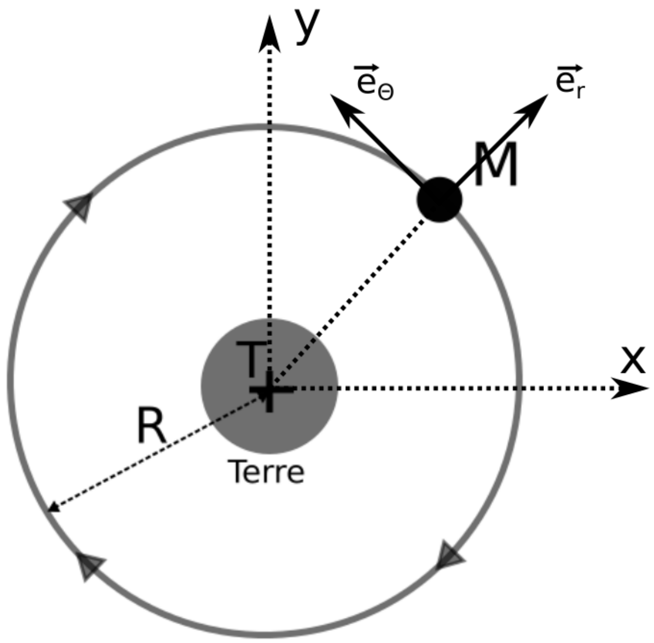
Exercice difficile ..., à travailler en dernière approche du cours.

2 Avec les coordonnées cylindriques

Exercice 7 - Éléments de cinématique :

1. $[R]$ =m ; $[\omega]$ =rad/s ; v_0 =m/s
2. **Vecteurs cinématiques**
   - ▷ position $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + v_0 t\vec{e}_z$
   - ▷ vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + v_0\vec{e}_z = R\omega\vec{e}_\theta + v_0\vec{e}_z$ et $v(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}$
   - ▷ accélération $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r$.
3. L'accélération est uniquement orienté suivant $-\vec{e}_r$, vers le centre de la trajectoire, comme dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.
   Attention ! à cause de la composante suivant $\vec{e}_z$, ce n'est pas un tel mouvement.
4. Le point tourne dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ tout en se déplaçant à vitesse constante suivant l'axe (Oz) : le mouvement sera celui d'une spirale ascendante.
5. **Vecteurs cinématiques**
   - ▷ position $\overrightarrow{OM} = R\cos\Omega t\vec{e}_r + v_0 t\vec{e}_z$
   - ▷ vitesse $\vec{v} = -R\Omega\sin\Omega t\vec{e}_r + R\cos\Omega t\omega\vec{e}_\theta + v_0\vec{e}_z$ et $v(t) = \sqrt{R^2\Omega^2\sin^2\Omega t + R^2\omega^2 + v_0^2}$
   - ▷ accélération $\vec{a} = -R\left(\Omega^2\cos\Omega t + \omega^2\right)\vec{e}_r - 2R\Omega\omega\sin\Omega t\vec{e}_\theta$.

Exercice 8 - Mouvement circulaire : 1. Le système étudié tourne autour du point $T \Rightarrow$ on introduit un système de coordonnées polaire de centre T (on pense à quand même représenter le système cartésien !=



2. Position : $\overrightarrow{TM} = R\vec{e}_r$; Vitesse : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $v(t) = -R\dot{\theta}$: Accélération : $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$.
3. En projetant sur les deux axes on trouve :

$$(\vec{e}_r) : -\frac{v^2}{R} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R^2} \ ; \ (\vec{e}_\theta) : -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le mouvement est bien circulaire et on a $v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R}}$.

Exercice 9 - Histoire de mouche :

1. La mouche va tourner autour du point O, au centre de l'horloge : on choisit un système de coordonnée polaire ($\sim$cylindrique 2D) de centree O pointant vers la mouche.
2. La mouche avance à vitesse constante le long de l'aiguille : $L(t) = R - v_0 t$. On a alors $\overrightarrow{OM} = (R - v_0 t)\,\vec{e}_r$.
3. A vitesse angulaire constante (ce qui est le cas sur une horloge) : $\dot{\theta}$ =angle/durée=$2\pi/60$.
On note souvent ω les vitesses angulaires constantes.
4. On dérive la position : $v(t) = -v_0\,\vec{e}_r + (L - v_0 t)\,\omega\,\vec{e}_\theta$
5. On dérive la vitesse : $va(t) = -2v_0\omega\,\vec{e}_\theta - (L - v_0 t)\,\omega^2\,\vec{e}_r$
6. Le temps pour atteindre le centre $T = L/v_0$ et le nombre de tour $\omega T/2\pi$.

Exercice 10 - Course de karting * :

Très proche du cours ...