TD15 Principe de la dynamique newtonienne

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

Avant toute chose, on retravaille les exemples du COURS!!!!!!!!!!

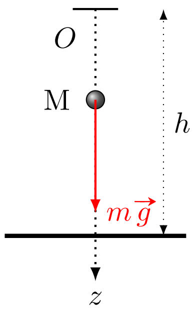
Pour chacun des exercices, on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

1 Chute libre

Exercice 1 - Profondeur d'un puits :

Sans prendre en compte la vitesse du son

On prend un axe (Oz), orienté vers le bas avec l'origine au sommet du puits.



- **Vecteurs cinématiques :** $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$; $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$.
- **Bilan des forces :** poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$.
- **PFD :** $m\vec{a} = m\vec{g}$ donc $\ddot{z} = g$

On intègre : $\dot{z}(t) = a_0 t$ et $z(t) = a_0 t^2/2$ et le temps de chute est $z(T) = H$ donc $H = a_0 T^2/2$.

En prenant en compte la vitesse du son

Complètement similaire sauf que le temps de chute n'est pas le temps au bout duquel on entend le plouf : $T = T_{chute} + T_{son}$, où

- Temps de chute : $z(T') = H$ donc $H = a_0 T'^2/2$
- Temps de propagation du son : $T_{son} = H/c$

Finalement : $T = \sqrt{\frac{2H}{a_0}} + \frac{H}{c}$.

Polynôme d'ordre 2 en $Y = \sqrt{H}$. On résout ...

$$Y = \sqrt{\frac{c^2}{2a_0} + cT} - \frac{c}{\sqrt{2a_0}} = \quad \text{donc} \quad H = \sqrt{\sqrt{\frac{c^2}{2a_0} + cT} - \frac{c}{\sqrt{2a_0}}}$$

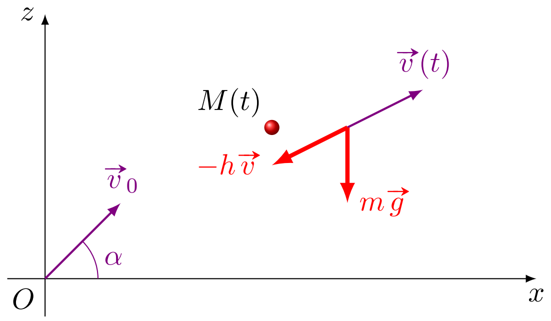
Exercice 2 - Coup franc :

Mouvement sans frottement

1. *C'est de la chute libre "classique" : on reprend son cours et on le fait* ***rapidement*** *et* ***méthodiquement*** *(les deux allant de paire)*
$$z[x] = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x + \tan\alpha x$$
2. On fait la "traduction"
   - Passe au dessus du mur : $z[9.15] > 1.90$m
   - Tir cadré : $z[20] < 2,44$m
   - Durée du tir : $z(\tau) = 20$m

Plus qu'à faire les AN ...

3. **Mouvement avec frottement**



tout comme avant sauf :

- ...
- Bilan des forces : poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$; force de frottement fluide : $-h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{e}_x - h\dot{z}\vec{e}_z$.
- PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} - h\vec{v}$ donc :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -h\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg - h\dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + \dfrac{h}{m}\dot{z} = -g \end{cases}$$

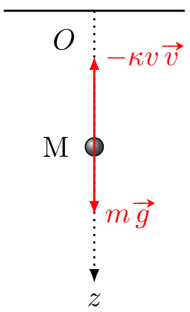
On obtient bien deux équations différentielles du premier ordre sur $\dot{z}$ et $\dot{x}$, de temps caractéristique $\tau = m/h$.

- Sans même résoudre, $\dot{x}$ et $\dot{z}$ tendent vers des valeurs limites égales au solution particulière. On trouve alors : $\dot{x}_\infty = 0$ et $\dot{z}_\infty = -mg/h$
  Finalement $\vec{v}_\infty = -mg/h\vec{e}_z$.
- $\vec{v}$ atteint sa valeur limite pour $t > 5\tau$. En faisant l'application numérique, on se rend compte que la balle atteindra le but bien avant.

2 Frottements

Exercice 3 - Viscosimètre à bille :

1. On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.



Attention ! *on applique la méthode*

- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ avec $v(t) = \dot{z}(t)$; $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$
- **Bilan des forces** :
  poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ avec $m = 4\pi R^3\rho_a/g$; force de frottement fluide : $-6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R\dot{z}\vec{e}_z$
- **PFD**
  $m\vec{a} = m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$

2. Donc :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{6\pi\eta R}{m}v = g$$

on introduit le temps caractéristique $\tau = m/(6\pi\eta R) =$

3. **Attention !**

Méthode en DS. Vitesse limite
La vitesse limite (*ou vitesse en régime stationnaire*) est la vitesse aux temps longs : $v_{lim} \simeq v(t)$ pour $t \sim \infty$. La vitesse limite est donc la solution particulière de l'équation v_P.

Ici on a $v(t) \simeq v_\infty$ et donc $0 + \dfrac{6\pi\eta R}{m}v_\infty = g$.

On trouve $v_\infty = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}$. Cette vitesse est atteinte pour des temps $t > 5\tau$.

4. On résout (**Attention !** méthode !!) : $v(t) = v_P + \tilde{v}$
- solution particulière $v_P = v_\infty = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}$
- solution homogène $\tilde{v} = Ae^{-t/\tau}$

CI $v(0) = 0$ donc $v(t) = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1.6\,\mathrm{s}$ mise pour passer de l'altitude $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$ à $z_2 = 50\,\mathrm{cm}$. On suppose qu'entre ces deux altitudes, le régime permanent est atteint.

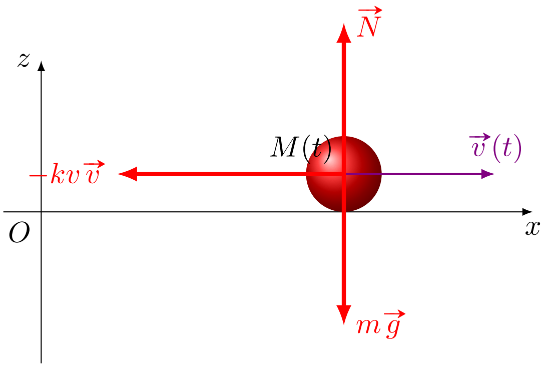
5. En régime permanent, $v(t) \simeq v_\infty$: la vitesse est constante donc $v_\infty \Delta t = z_2 - z_1$. On obtient v_∞ puis η : $\eta = \dfrac{mg}{6\pi R(z_2 - z_1)}\Delta t$.
   AN : $\eta \simeq$....? **Attention !** unité!! Pour les trouver on procède par analyse dimensionnelle : $[\eta] = [F]/[R][v] = \mathrm{kg.m^{-1}s^{-1}}$

6. On peut donner une estimation haute de la distance parcourue via $\Delta z = v_\infty \tau$ (comme $v(t) < v_\infty$). L'intérêt de faire les mesures loin de la surface est de se placer en régime stationnaire où $v(t) \simeq v_\infty$ et donc avoir une estimation aisée de $z_2 - z_1$.

   Remarque : *Si* $v = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ *(sans simplification) il aurait fallu trouver* $z(t)$ *puis résoudre* $z(\Delta t) - z_1 = z_2 - z_1$ *avec des exponentielles et tout et tout ... Pas pratique !*

7. On peut avec cette nouvelle valeur de η estimer le temps τ et la distance parcourue avant d'atteindre le régime permanent. On obtient alors un distance parcourue bien trop grande : cela ne fonctionnerait pas aussi facilement (cf remarque).

Exercice 4 - Voiture et frottements fluides : *Question 1, 2, 3 déjà faites dans le TD précédent et le Chap XIV ... On s'attarde sur la question 4.*



- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ avec $v(t) = \dot{x}$ car $\dot{x} > 0$; accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$
- **Bilan des forces**
  poids $-mg\vec{e}_z$; force de frottement fluide $-kv^2\vec{e}_x$; réaction du support $\vec{R} = N\vec{e}_z$ (*pas de frottement*)
- **PFD** :
  sur (Ox), on a alors : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}x = -kv^2$

On cherche donc à résoudre : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}v^2 = 0.$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 **NON LINEAIRE** (à cause de v^2) et là **Attention !** : tout ce qu'on a appris ne marche plus !! Notamment : plus de découpage en une solution particulière et une solution homogène.

Méthode en DS. Séparation des variables

Pour résoudre les équations différentielles autres que les 3 classiques (Régime Linéaire d'ordre 1, Oscillateur Harmonique, Oscillateur amorti)

1. on sépare d'un côté tous les termes dépendant de la solution et de l'autre côté tous les termes dépendant de la variable

$$\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{solution:} f(t),\, \mathrm{d}f,\, \ldots} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{variable : } t,\, \mathrm{d}t \text{ ou } x,\, \mathrm{d}x}$$

2. on intègre à gauche et à droite entre $t = 0$ et t en faisant **Attention !** aux bornes :

$$\int_{f(0)}^{f(t)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ; = \int_0^t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. il faut ensuite manipuler l'équation pour obtenir $f(t)$.

L'équation différentielle est $dfracdvdt + \frac{k}{m}v^2 = 0$: solution $v(t)$ et variable t. Donc on sépare puis on intègre entre $t = 0$ et t :

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t -\frac{k}{m}\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \left[-\frac{1}{v}\right]_{v(0)}^{v(t)} = -\frac{k}{m}t$$

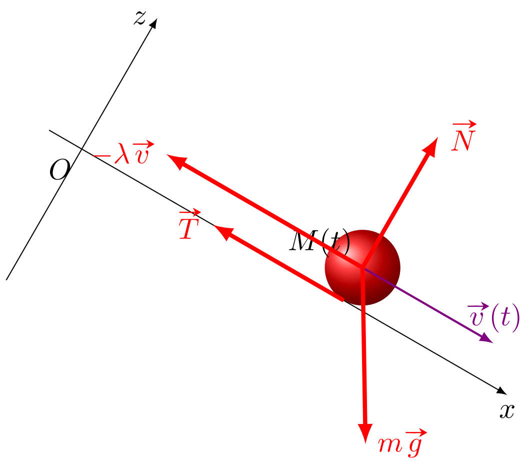
Trouver la primitive peut être parfois difficile ...

Finalement on a : $\frac{-1}{v(t)} - \frac{-1}{v(0)} = -\frac{k}{m}t$. D'où $v(t) = \dfrac{v_0}{1 + \frac{kv_0}{m}t}$.

On intègre de nouveau pour trouver la position $x(t)$: $x(t) = \frac{kv_0^2}{m} \ln\left[1 + \frac{kv_0}{m}t\right]$

Exercice 5 - Descente à ski (frottement solides) :

1. *Si on ne voit pas quoi faire, on applique la méthode de résolution d'exercice de mécanique. Si on sait quoi faire, on sait qu'il faut appliquer la méthode de résolution d'exercice en mécanique ...*



- **Vecteurs cinématiques :**
  - $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ (pas de mouvement suivant (Oy))
  - vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ ($v(t) = \dot{x}$)
  - accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$
- **Bilan des forces :**
  - poids $m\vec{g} = mg\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
  - force de réaction $\vec{R} = N\vec{e}_y - T\vec{e}_x$ avec $T = fN$ car il y a glissement
  - force de frottement fluide $-\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{e}_x$

- **PFD projeté sur les axes** :
  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - \lambda\vec{v}$ soit

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T - \lambda\dot{x} \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

On a alors $N = mg\cos\alpha$.

2. La projection du PFD sur (Ox) donne : $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T - \lambda\dot{x}$ soit, avec $T = fN = fmg\cos\alpha$ et $\dot{x} = v(t)$:
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) - \lambda v(t)$$
En régime permanent $v(t) \simeq v_l$ constant et : $0 = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) - \lambda v_l$ soit $v_l = \frac{mg}{\lambda}\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$.

3. On va résoudre l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$
   - ▷ solution particulière $v_P = v_l = \frac{mg}{\lambda}\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$
   - ▷ solution homogène $\tilde{v} = Ae^{-t/\tau}$.

   CI à $t = 0$, v$(t = 0) = 0$ donc $A + v_l = 0$.
   Attention ! On applique les CI sur $v(t) = v_P + \tilde{v}$ et pas que sur $\tilde{v}$!!!
$$v(t) = v_l\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec } v_l = \frac{mg}{\lambda}\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$$

4. On pose $v(t_1) = v_l/2$ et on trouve $t_1 = \tau\ln 2$.

5. On recommence l'étude mais désormais avec comme équation : $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\left(\sin\alpha - 100f\cos\alpha\right)$ et $v(t = 0) = v_l/2$.
   On a alors $v(t) = v_l/2 - mg\left(100f\cos\alpha - \sin\alpha\right)t$ et donc le temps d'arrêt T est $T = \frac{v_l}{2mg\left(100f\cos\alpha - \sin\alpha\right)}$..

En réalité, la modélisation pour les frottements de l'air n'est pas pertinente. On choisit donc maintenant $\vec{F} = -KSv\vec{v}/2$. On prendra $K = 0.6\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et $S = 0.4\,\mathrm{m}^2$.

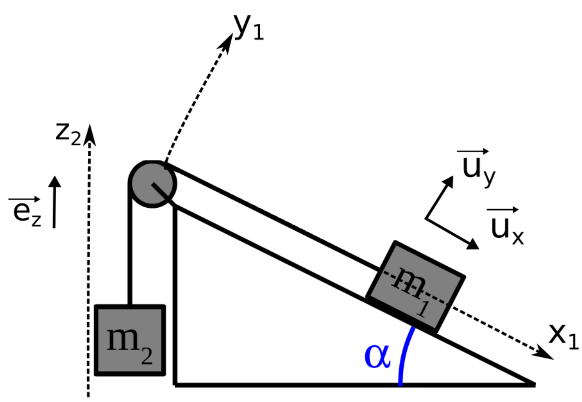
6. Vitesse limite = solution particulière donc
$$0 = mg\sin\alpha - KSv_l^2 \;\Rightarrow\; v_l = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{KS}}$$

3 Tension/ressorts

Exercice 6 - Masses reliées par une poulie :

1. On introduit deux systèmes de coordonnées, un pour chaque masse.
   - ▷ masse m_1 : vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et coordonnées (x_1, y_1)/
   - ▷ masse m_2 : vecteur $\vec{e}_z$ et coordonnée z_2 (mouvement à 1D)

   Attention ! $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $\vec{e}_z$ ne forment pas une base à 3 dimensions !



2. On remarque que la longueur de la corde reliant les deux masses est fixe : si m_1 se déplace m_2 bouge de la même quantité : $\dot{x}$ (pour m_1) $=\dot{z}$ (pour m_2) et donc $\ddot{x} = \ddot{z}$.

3. *Cf comme d'habitude : on écrit les vecteurs cinématiques de m_1, les forces, ...* ***pour les deux masses séparément !!***. On trouve alors :
   - ▷ masse 1 : $m_1\ddot{x} = m_1 g\sin\alpha - T$ et $0 = -mg\cos\alpha + N$
   - ▷ masse 2 : $m_2\ddot{z} = -m_2 g + T$

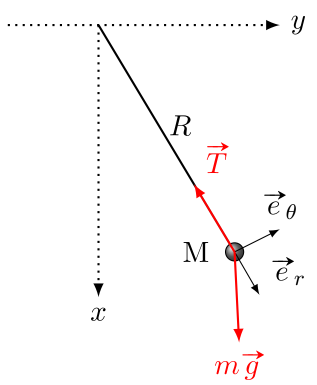
   Attention ! la tension du fil T est la même **en intensité** pour les deux masses ! Donc $N = mg\cos\alpha$

4. Comme $\ddot{x} = \ddot{z}$ alors :
$$g\sin\alpha - \frac{T}{m_1} = -g + \frac{T}{m_2} \;\Rightarrow\; g(1 + \sin\alpha)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

5. Exprimer la tension T du fil.

Exercice 7 - Tension d'une corde :

1. Principe de la statique $T = mg$
2. *Cf cours* $T = mR\omega^2 = m\dfrac{v_0^2}{R}$
3.



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$; $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec $v = R|\dot{\theta}|$; $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

▷ **Bilan des forces**
poids : $m\vec{g} = mg\,(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$; tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

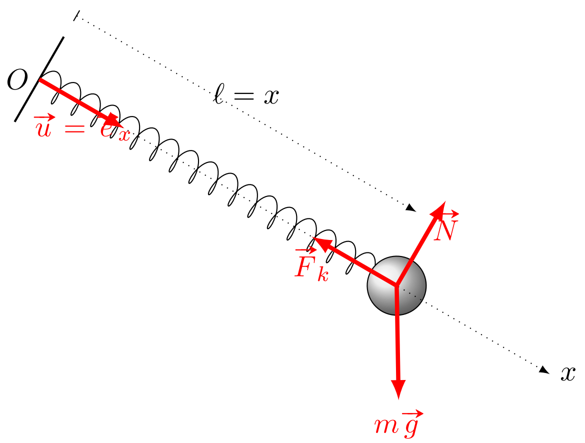
▷ **PFD projeté sur les axes**

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

donc $T = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$.
▷ Au point le plus bas $\theta = 0$ donc $\cos\theta = +1$. On a alors $T_0 = mR\dot{\theta}^2(\theta = 0) + mg = 3mg$ donc $\dot{\theta}^2(\theta = 0) = 2g/R$.
Comme $v = R|\dot{\theta}|$ alors $v(\theta = 0) = \sqrt{2gR}$.

Exercice 8 - Ressort sur plan incliné :

D'abord la méthode d'analyse, on verra ensuite la première question ...



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$

▷ **Bilan des forces :**
- ▷ poids $m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
- ▷ force de rappel du ressort : $-k(x - l_0)\vec{e}_x$ (**Attention !** à bien écrire $\vec{u}$ et l dans la base *cf schéma*)
- ▷ réaction : $\vec{R} = N\vec{e}_y$ (pas de frottement donc $T = 0$)

▷ **PFD projeté sur les axes**

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\theta - k(x - l_0) \\ 0 = -mg\cos\theta + N \end{cases}$$

1. A l'équilibre $\ddot{x} = 0$ donc : $mg\sin\theta - k(x_{eq} - l_0) = 0$ et $x_{eq} = l_0 + mg\sin\alpha/k$
2. On écrit l"équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} = g\sin\theta + \frac{k}{m}l_0 \;\Rightarrow\; \text{Oscillateur harmonique avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

On écrit $x(t) = x_P + \tilde{x}$
▷ $x_P = x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$
▷ $\tilde{x} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$
CI $x(0) = x_{eq} + d$ et $\dot{x}(0) = 0$. On a donc :

$$x_{eq} + A = x_{eq} + d \quad \text{et} \quad B\omega_0 = 0$$

donc $x(t) = x_{eq} + d\cos\omega_0 t$.

Réaction du support et décollage

Exercice 9 - Piste de luge : 1. Mouvement circulaire donc $r(t) = R$ constant et :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \ ; \ \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \ ; \ \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

2. **Bilan des forces**
   ▷ poids $m\vec{g} = mg(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta$
   ▷ réaction du support $\vec{R} = N\vec{e}_r$ (*pas de frottement*)

   PFD projeté sur les axes
   $$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta + N \\ mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta + \end{cases}$$
   On a alors : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{R}\cos\theta$ et $k = -g/R$.

3. **Attention !** on ne cherche pas ici à obtenir une équation horaire $\dot{\theta}(t)$ mais une équation paramétrique $\dot{\theta}[\theta]$!

   Méthode en DS. Obtenir la vitesse en fonction de la position
   A partir d'une équation de la forme : ..... $\ddot{\theta}$ = ... $F[\theta]$
   ▷ on multiplie par $\dot{\theta}$: ..... $\ddot{\theta}\dot{\theta}$ = ... $F[\theta]\dot{\theta}$
   ▷ on reconnaît $\ddot{\theta}\dot{\theta} = \left(\dot{\theta}^2/2\right)'$
   ▷ on intègre entre deux **temps** $t = 0$ et t quelconque

   $$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos\theta \Rightarrow \underbrace{\ddot{\theta}\dot{\theta}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\theta}^2/2]} = -\frac{g}{R} \times \underbrace{\dot{\theta}\cos\theta}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sin\theta]}$$

   On intègre entre $t = 0$ et t :

   $$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}^2/2\right] = -\frac{g}{R}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sin\theta] \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}(0)^2}{2} = -\frac{g}{R}(\sin\theta - \sin\theta(0))$$

   avec $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \pi/2$).
   On a : $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{R}(1 - \sin\theta)$.

4. Vecteur vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $v(t) = R|\dot{\theta}|$. Avec l'expression précédente : $v = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}$.

5. **Décollage $\iff$ N qui s'annule !!**
   Réaction normale du support : $N = mg\sin\theta - mR\dot{\theta}^2$ soit :

   $$N = mg\sin\theta - mR\frac{2g}{R}(1 - \sin\theta) = 3mg\sin\theta - 2mg$$

   Donc N s'annule, et il y a décollage, pour $\sin\theta_1 = 2/3$.
   A ce moment là : $v[\theta_1] = \sqrt{2gR(1-2/3)} = \sqrt{\dfrac{2gR}{3}}$.