# TD16 Approche énergétique du mouvement d'un point

**Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB**

## Les indispensables

**Exercice 1 - Applications directes du cours :**

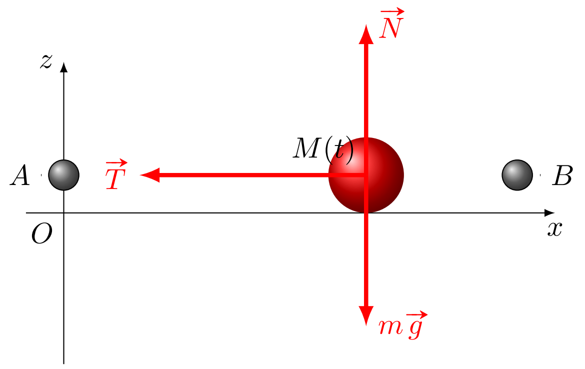
**Attention !** *Petites applications rapides pour voir si on a bien compris les notions*

1. **Notion : puissance**
   (a) *On fait* ***Attention !*** *aux projections et aux unités !!*
   $\mathcal{P} = \vec{v} \cdot m\vec{g} = -mvg\sin\alpha = 160\text{W}<0$ : le poids est résistif.
   (b) C'est trois fois moins que ce que produit le cycliste pour rouler à vitesse constante.

2. **Notion TEM et système conservatif**
   On applique le **TEM** entre le point $A$ (altitude $z_A$, vitesse nulle) et le point $B$ (altitude $z_B = z_A - h$, vitesse $v_B$).
   $$mgz_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgz_A = 0 \;\Rightarrow\; v_B = \sqrt{2gh} = 17\text{m/s}$$

3. **Notion : TEM et travail des forces de frottement**
   On applique le **TEM** entre le point $A$ (altitude $z_A$, vitesse nulle) et le point $B$ (altitude $z_B = z_A - h$, vitesse $v_B = 16\text{m/s}$).
   $$mgz_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgz_A = W_{A\to B}(\vec{T}); \Rightarrow\; W_{A\to B}(\vec{T}) = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh < 0$$
   Les frottements sont résistifs

**Exercice 2 - Distance de freinage :**




- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ ; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $v(t) = \dot{x}$.
- **Bilan des forces**
  - $m\vec{g}$ ne travaille pas
  - $\vec{N}$ ne travaille pas
  - $\vec{T} = -T\vec{e}_x$

1. - **Travail élémentaire** : $\delta W = \vec{T} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = -T\vec{e}_x \cdot \mathrm{d}x\vec{e}_x = -T\mathrm{d}x$.
   - **Trajectoire** de $A$ $x_A = 0$ à $B$ $x_B = d$
   - **calcul du travail** :
   $$W_{A\to B}(\vec{T}) = \int_{A\to B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} -T\mathrm{d}x = -Td$$

2. On applique le **TEM** pour estimer $T$
   - **Trajet et bilan d'énergie**
     - point de départ $A$ :
       $x_A = 0$ et $v_A = 50\text{km/h}=14\text{m/s}$
       Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_A^2$ et $E_p = 0$
     - point d'arrivée $B$ :
       $x_B = d$ et $v_B = 0$
       Energie : $E_c = 0$ et $E_p = 0$

- **Travail des forces NC**
  on a montré que $W = \int_{x_A}^{x_B} -T\mathrm{d}x = -Td$
- **TEM**

$$0 - \left(\frac{1}{2}mv_A^2\right) = -Td \Rightarrow T = \frac{mv_A^2}{2d}$$

On trouve $T = 9600$N.

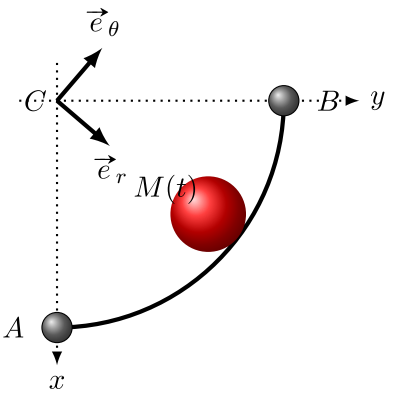
Avec cette valeur, on peut de nouveau appliquer le TEM pour une vitesse initiale de 90km/h et trouver $d = mv_A^2/2T$ soit 49m.

**Exercice 3 - Théorème de l'Ec/Em :**

**Attention !** *Exercice important à bien maîtriser : beaucoup de situation ressemble à ces deux là !!*

**Cas circulaire**

On choisit un repère cylindrique de centre $C$ suivant le point $M$. On note $\theta$ l'angle entre $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta$.




- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = R_0\vec{e}_r$ ; $\vec{v} = R_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $v(t) = R\dot{\theta}$
- **Bilan des $\vec{F}$ et des $E_p$**
  - Réaction du support $\vec{N}$ : ne travaille pas
  - poids $m\vec{g} \rightarrow E_p = -mgx = -mgR_0\cos\theta$
  - force de frottement $\vec{T} = -T\vec{e}_\theta$

  On applique le **TEM** pour trouver la vitesse en $B$.

- **Trajet et bilan d'énergie**
  - point de départ $A$ : $\theta = 0$ et $v_A = v_0$
    Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et $E_p = -mgR_0$
  - point d'arrivée $B$ : $\theta = \pi/2$ et $v_B$
    Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_B^2$ et $E_p = 0$

- **Travail des forces NC**
  - travail élémentaire $\delta W = \vec{T} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$ avec $\vec{\mathrm{d}l} = \vec{v}\mathrm{d}t = R_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R_0\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$
    Donc $\delta W = -TR_0\mathrm{d}\theta$.
  - trajectoire $A$ $\theta_A = 0$ à $B$ $\theta_B = \pi/2$
  - calcul du travail

$$W_{A\rightarrow B}(\vec{T}) = \int_{A\rightarrow B} \delta W = \int_0^{\pi/2} -TR_0\mathrm{d}\theta = -TR_0\pi/2$$

- **TEM**

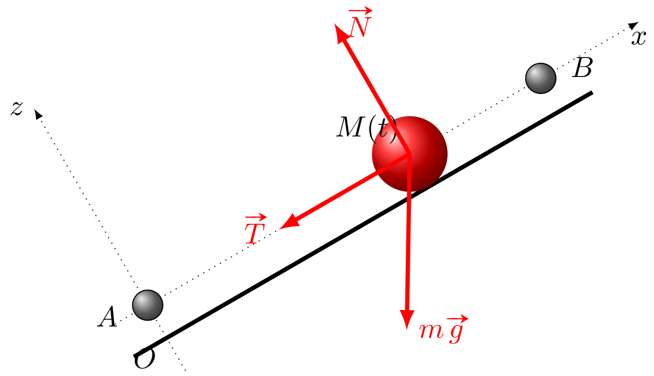
$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2 + 0\right) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_0\right) = -TR_0\pi/2 \Rightarrow v_B^2 = v_0^2 - 2R_0g - \frac{TR_0\pi}{2m}$$

Pour que cela soit possible, il faut que $v_B^2 > 0$ donc :

$$v_0^2 > 2R_0g + \frac{TR_0\pi}{2m} \Rightarrow v_0 > \sqrt{2R_0g + \frac{TR_0\pi}{2m}}$$

On remarque que si $T = 0$ (*pas de frottement*) $v_0 > \sqrt{2gR_0}$ : c'est le "classique" $\sqrt{2gh}$.

**Rampe inclinée**




- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ ; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $v(t) = \dot{x}$
- **Bilan des $\vec{F}$ et des $E_p$**
  - Réaction du support $\vec{N}$ : ne travaille pas
  - poids $m\vec{g} \to E_p = mg\sin\alpha\, x$
  - force de frottement $\vec{T} = -T\vec{e}_x$ avec $T = fN$

  On applique le **TEM** pour trouver la vitesse en $B$.

- **Trajet et bilan d'énergie**
  - point de départ $A$ : $x = 0$ et $v_A = v_0$
    Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et $E_p = 0$
  - point d'arrivée $B$ : $x = h/\sin\alpha$ et $v_B$
    Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_B^2$ et $E_p = mgh$

- **Travail des forces NC**
  - travail élémentaire $\delta W = \vec{T}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$ et $T = fN = fmg\cos\alpha$ (*PFD projeté sur* $\vec{e}_y$)
    Donc $\delta W = -fmg\cos\alpha\mathrm{d}x$.
  - trajectoire $A$ $x_A = 0$ à $B$ $x_B = h/\sin\alpha$
  - calcul du travail

$$W_{A\to B}(\vec{T}) = \int_{A\to B}\delta W = \int_0^{h/\sin\alpha} -fmg\cos\alpha\mathrm{d}x = -\frac{fmgh}{\tan\alpha}$$

- **TEM**

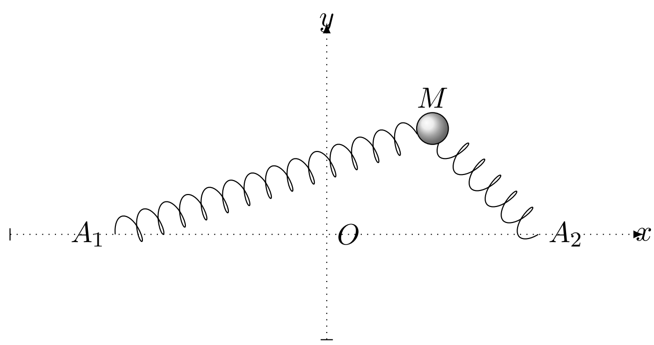
$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh\right) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + 0\right) = -\frac{fmgh}{\tan\alpha} \;\Rightarrow\; v_B^2 = v_0^2 - 2gh - \frac{2fgh}{\tan\alpha}$$

Pour que cela soit possible, il faut que $v_B^2 > 0$ donc :

$$v_0^2 > 2gh + \frac{2fgh}{\tan\alpha} \;\Rightarrow\; v_0 > \sqrt{2gh + \frac{2fgh}{\tan\alpha}}$$

On remarque que si $f = 0$ (*pas de frottement*) on retrouve le "classique" $\sqrt{2gh}$.

**Exercice 4 - Stabilité d'une position d'équilibre :**




1. - Energie potentielle du ressort 1 : $E_{p,1} = \frac{k}{2}(l_1 - l_0)^2$ avec $l_1 = A_1M = \sqrt{(x-(-a))^2 + (y-0)^2}$.

   **Attention !** *on cherche une longueur, on a un système à deux coordonnées* $\Rightarrow$ *on écrit les coordonnées de* $M$ : $(x, y)$ *et* $A_1$ : $(-a, 0)$ *!!!*

▷ Energie potentielle du ressort 2 : $E_{p,1} = \frac{k}{2}(l_2 - l_0)^2$ avec $l_2 = A_2M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$.

Donc $E_p = \frac{k}{2}\left(\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right)^2 + \left(\sqrt{(x-a)^2+y^2} - l_0\right)^2\right)$.

2. *Cf avant*

3. **Attention !** Lien $\vec{F} \leftrightarrow E_p$ : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p$ donne $E_p$ si on connaît $\vec{F}$ mais sert aussi dans l'autre sens : donne $\vec{F}$ si on connaît $E_p$ ! !

$$\vec{F}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_{p,1} = -\frac{\partial E_{p,1}}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p p, 1}{\partial y}\vec{e}_y$$

*Un peu de calcul donc ... à faire avec* ***méthode*** *! !*

$$\frac{\partial E_{p,1}}{\partial x} = \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sqrt{(x+a))^2+y^2} - l_0\right)^2\right] \quad \text{(dérivée d'une fonction au carrée)}$$

$$= k\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right) \times \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right] \quad \text{(dérivée d'une racine carrée (le } l_0 \text{ dégage)}$$

$$= k\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right) \times \frac{1}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}} \times \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a)^2+y^2\right] \quad \text{(dérivée de } (x+a)^2\text{)}$$

Finalement : $\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a)^2+y^2\right] = 2(x+a)$ et donc :

$$\frac{\partial E_{p,1}}{\partial x} = 2k(x-a)\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

De la même façon on trouve : $\frac{\partial E_{p,1}}{\partial y} = 2ky\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$.

Finalement :

$$\vec{F}_1 = 2k(x-a)\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\vec{e}_x + 2ky\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\vec{e}_y$$

Pour trouver $\vec{F}_2$, il suffit de remarque qu'il faut transformer $+a \to -a$.

4. Pour $x = 0$, les longueurs $A_1M$ et $A_2M$ sont les mêmes et l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E_p = k\left(\sqrt{a^2+y^2} - l_0\right)^2$$

L'énergie potentielle n'est plus qu'à une seule variable : $\partial \to \mathrm{d}$

▷ **position d'équilibre** : $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = 0$

▷ **stabilité** : $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}y^2} > 0$

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = 2k\left(\sqrt{a^2+y^2} - l_0\right)\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

On a plusieurs position d'équilibre potentielle :

▷ $y = 0$

▷ $\sqrt{a^2+y^2} - l_0 = 0$ donc $y^2 = l_0^2 - a^2$ donc $y = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$

Pour que les deux dernières position existent il faut que $l_0 > a$.

5. Soit on calcule $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}y^2} > 0$ et on évalue en $y = a$ et $y = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$ (*très calculatoire*) soit on est malin et on trace $E_p[y]$ sur sa calculette ! (*on peut prendre* $a = 1/l_0 = 2$ *et* $a = 2/l_0 = 1$)
On cherche alors les maximas et minimas d'énergie potentielle.

# Exercice complet

**Exercice 5 - Saut à l'élastique :**

1. **Phase 1** Au cours de cette phase, l'élastique n'est pas tendu : il n'y a pas de force de rappel élastique et donc pas d'énergie potentielle élastique.
   On peut alors écrire rapidement le TEM entre le point de saut et un poiunt d'altitude $z$ quelconque, avec un axe $(Oz)$ orienté vers le bas dont l'origine coïncide avec la position initiale.
   $$\frac{1}{2}mv[z]^2 - mgz = 0$$
   On obtient alors $v[z] = \sqrt{2qz}$ et donc en fin de mouvement, $z = l_0$, $v[l_0] = \sqrt{2gl_0}$.
2. **Phase 2**
   Il faut alors prendre en compte l'élastique via son énergie potentielle élastique : $E_k = \frac{k}{2}(z-l_0)^2$.
   On applique le TEM entre un point $z = l_0$ et un point d'altitude quelconque $z$.
   **Attention !** pas le droit de prendre comme point de départ $O$ !
   $$\frac{1}{2}mv[z]^2 + \frac{k}{2}(z-l_0)^2 - mgz - \underbrace{\frac{1}{2}mv[l_0]^2}_{=mgl_0} = 0$$
   Donc $v[z] = \sqrt{2g(z+l_0) - \frac{k}{m}(z-l_0)^2}$.
   On écrit le TEM avec les coordonnées $v = \dot{z}$ : $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{k}{2}(z-l_0)^2 - mgz = 0$
   $$\frac{1}{2}m \times 2\dot{z}\ddot{z} + \frac{k}{2} \times \dot{z}(z-l_0)^2 - mg\dot{z} = 0$$
   En simplifiant par $\dot{z}$ on trouve : $m\ddot{z} + k(z-l_0)^2 - mg = 0$ ce qui est équivalent au PFD projeté sur l'axe $(Oz)$.

   A l'étirement maximale, la vitesse est nulle (le sauteur fait demi tour) donc :
   $$\frac{k}{2}(z_{max} - l_0)^2 - mgz_{max} - mgl_0 = 0 \;\Rightarrow\; z_{max}^2 - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) z_{max} - 2\frac{mgl_0}{k} + l_0^2 = 0$$
   On trouve $z_{max} =$ ..... et on peut évaluer la force de rappel du ressort via $F = k(z_{max} - l_0)$.

**Exercice 6 - Mouvement dans le champ de pesanteur terrestre :**

*Exercice difficile jusqu'au chapitre sur les mouvements à force centrale. A travailler une fois ce chapitre fini.*

**Exercice 7 - Travail d'une force non conservative (*) :**

*A travailler en dernière approche, venir me voir si question. La partie **Chemin 1** est facilement abordable.*