Le Soulard

PCSI

Tome 2 : Electricité I

- *Dipôle et lois de l'électricité*
- *Régime transitoire d'ordre 1 et 2*
- *Oscillateurs harmoniques et amortis*

Cours de Physique de première année de classe préparatoire

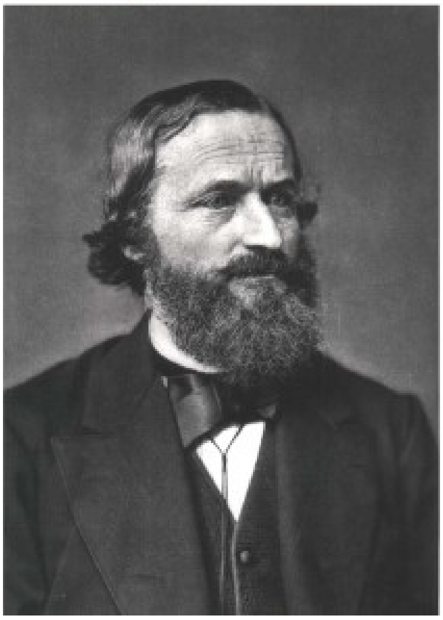
Lycée Louis Thuillier

Chap III

Fondements de l'électrocinétique

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières



Savoirs ♡

- ▷ ♡ Notion de charge électrique ; lien courant électrique et charge électrique ; intensité électrique et sens de mesure
- ▷ ♡ Potentiel électrique et mouvement des charges positives et négatives
  Notion de masse et de Terre.
- ▷ ♡ Mesure d'une tension ; mesure d'une intensité ; appareils de mesures
- ▷ ♡ Notion de dipôle électrique. Convention récepteur et générateur ; puissance électrique fournie et reçue.
- ▷ ♡ Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire (ARQS)
  - ▷ condition d'application
  - ▷ Loi de Kirchhoff : loi des mailles et loi des nœuds

Savoir Faire

Savoir justifier si un circuit électrique est dans le cadre de l'ARQS

Reconnaître deux dipôles branchés en série / en parallèle / aucun des deux

Reconnaitre dans un circuit les mailles et les nœuds ; savoir appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds

Orienter les tensions et les courants en convention générateur et récepteur. Calculer un puissance (reçue ou fournie) et justifier si un dipôle est générateur ou récepteur

L'électricité est omniprésente : on peut décomposer son usage en deux grands domaines :
- ▷ **domaine de l'électrotechnique** : on utilise l'électricité en tant que source d'énergie (machines outils, moteurs,...)
- ▷ **domaine des communications** : on utilise l'électricité en tant que support de l'information (calculatrice, ordinateurs, traitement du son ...)

Définition. Electrocinétique
C' est le domaine de la physique qui étudie le mouvement des électrons et des charges, autrement dit les courants électriques, dans le cadre de l'ARQS.

1 Le courant électrique

Objectif : définir les grandeurs macroscopiques à travers lesquelles se manifestent la tension électrique (la cause) et le mouvement des charges électriques (conséquence).

1.1 Charge et porteurs de charges

Définition. Charge électrique Q
La charge électrique Q mesurée en Coulombs (C) est un nombre algébrique qui caractérise la sensibilité d'une particule à l'interaction électromagnétique.

Q est toujours un multiple entier de la charge élémentaire notée e :

$$Q = \pm Ze \quad \text{avec} \quad e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Théorème.
La charge électrique se conserve. Il n'y a pas de disparition ou de création de charges. C'est une grandeur extensive (les charges s'ajoutent).

Attention ! Une lampe ne consomme pas de charges électriques ! ! !

▶ Postulat fondamental de l'électrocinétique

André Marie Ampère en 1820 pour décrire la décharge de la pile Volta :

> *Le courant électrique est le résultat d'un déplacement d'ensemble, ordonné, de particules chargées, sous l'effet d'actions extérieures (en général un champ électrique).*

Définition. Courant électrique
Le **courant électrique** correspond au déplacement **ordonné** d'un ensemble de porteurs de charges mobiles.

Les **porteurs de charges** peuvent être de natures très différentes :
- ▷ dans un métal conducteur (comme les fils électriques en cuivre) : les électrons libres (ou de conduction) qui se déplacent.

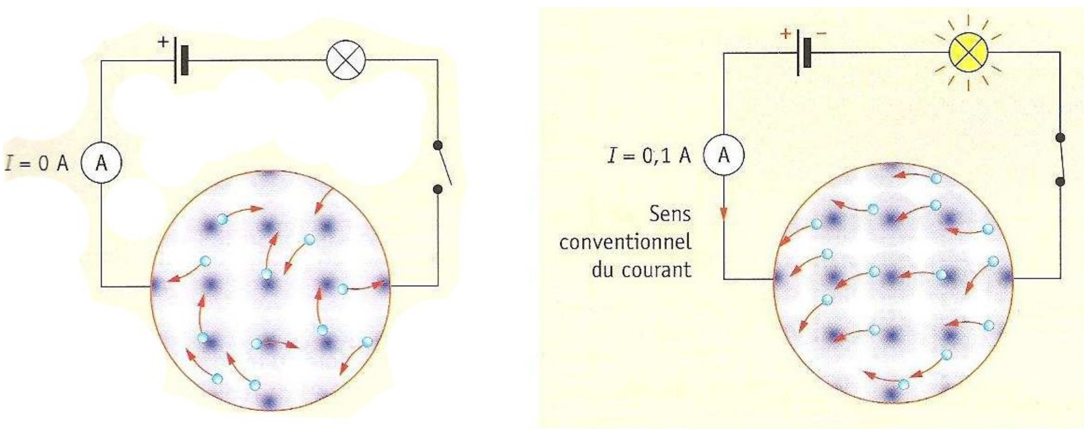
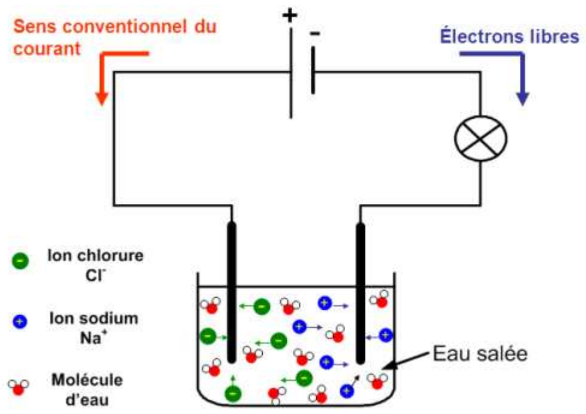


Fig. 1 – Schéma du mouvement désordonné (absence de courant) ou ordonné (présence de courant) des électrons dans un circuit.

▷ dans une solution ionique (comme les neurones ou les piles) : il s'agit des ions (figure 2) ;

> *Exemple 1 : L'eau salée est une solution ionique, les ions en mouvements sont les ions Na^+ (charge $+e$) et les ions Cl^- (charge $-e$).*
>
> 
>
>
> **Fig. 2** – Conduction électrique par des ions en solution

1.2 L'intensité électrique

▶ Définition

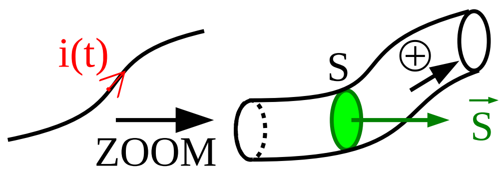
L'intensité électrique quantifie l'importance du courant électrique. Elle mesure le débit de charges à travers la section du conducteur, autrement dit le nombre de charges qui traverse la surface transverse du conducteur par unité de temps.

Définition. L'intensité électrique
L'intensité du courant électrique qui traverse une section S de conducteur est égale à la quantité de charge dq qui la traverse par unité de temps dt :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Elle s'exprime en ampère (A)

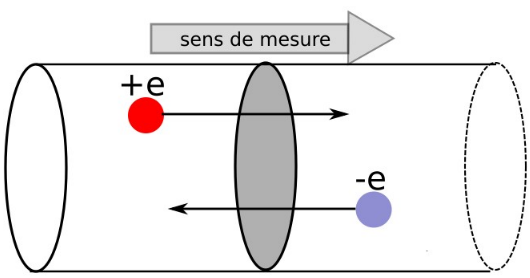
Notion de sens de mesure
Pour définir l'intensité algébrique $i(t)$ on compte le nombre de charges traversant une surface S à l'instant t.



▷ on choisit une surface S : ici le diamètre du fil
▷ on choisit un sens de mesure : de droite à gauche, ou de gauche à droite
▷ puis on compte les charges qui passent pendant un instant dt :
  ▷ $+q$ si la charge passe dans le sens choisi
  ▷ $-q$ si la charge passe dans le sens opposé

Attention ! q peut être positif ou négatif!!

Exmeple d'un courant : pendant 2s deux charges traversent la surface

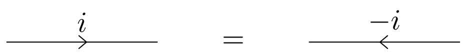


Des charges positives se déplacent dans le sens de mesure : $+ \times (+q)$ et des charges négatives se déplacent dans le sens contraire $- \times (-q)$, contribueront de façon positive à l'intensité $i(t)$ positive.

▶ Représentation et sens conventionnel du courant

Le courant est algébrique, il peut être positif ou négatif. On le représente par :

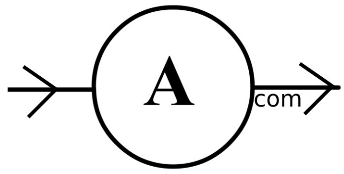
1. une flèche sur les fils électriques qui définit le sens de mesure
2. une valeur $i(t)$ qui dépend du sens de mesure



> ***Exemple 2*** *: On choisit de mesurer le courant de la droite vers la gauche. On mesure une intensité : $I = 2A$. Dans quel sens se déplacent les charges ?*
> *Dans le cas d'un fil électrique, les charges q sont dues aux électrons de charges négatives. Par conséquent les électrons se déplacent de gauche à droite.*
>
> 
>

▶ Mesure d'une intensité électrique

Appareil :
un ampèremètre ;
Branchement : en série
Il mesure l'intensité du courant qui le traverse, intensité compté positivement dans le sens sortant de l'appareil par sa borne "com".



▶ Ordres de grandeurs

Courant	**Composants ou appareils**
10 mA	DEL commune
100 mA	Risque d'électrocution
0.5 A	ampoule à incandescence sous 230 V
10 A	Four/Chauffage/Chauffe-eau sous 230 V
100 A	Démarreur automobile
10 kA–100 kA	Foudre

> ***Application 1*** *: Calculer le nombre d'électrons traversant le circuit sous 1 A pendant 1 s.*

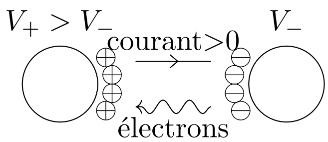
2 Le potentiel électrique

2.1 Potentiel et tension

▶ Le potentiel

Le **potentiel électrique** V quantifie la façon dont un point de l'espace attire les charges électriques.

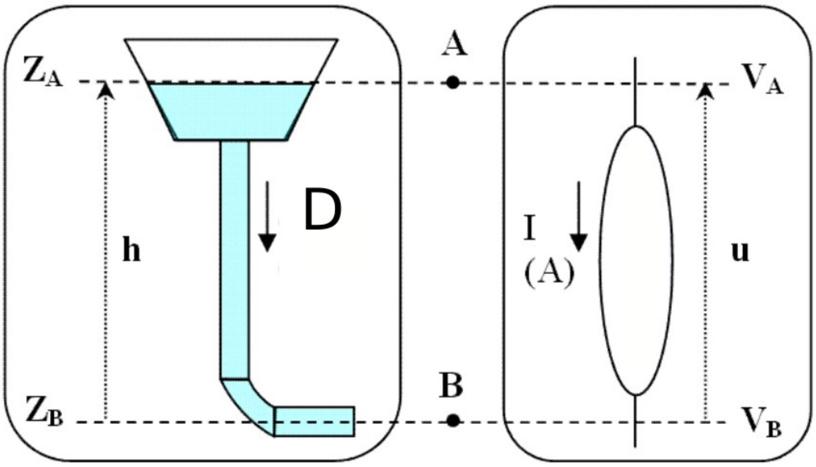
Propriété. Potentiel électrique et charges
Plus un point de l'espace est à un potentiel élevé, plus il va attirer les charges négatives.
Le potentiel s'exprime en Volts (V).



Dans un circuit :
Les charges électriques (négatives dans un circuit) se déplacent spontanément vers les potentiels les plus élevés, le courant positif se mesure en sens inverse et se dirige vers les potentiels les plus faibles.

▶ Analogie hydraulique

On peut se faire une bonne image des phénomènes électriques en raisonnant par analogie. Un liquide va s'écouler dans un tuyau sous l'effet de la pesanteur g s'il est incliné, : il existe une différence de hauteur entre l'entrée A et la sortie B.



- ▷ l'eau (en kg) $\iff$ la charge (en C)
- ▷ l'altitude z $\iff$ le potentiel électrique V
- ▷ différence de hauteur h $\iff$ la différence de potentiel ΔV
- ▷ le débit $D(t)$ (en kg/s) $\iff$ l'intensité $i(t)$ du courant électrique (en A=C/s)
- ▷ moulin/pompe à eau entre deux points $\iff$ composants électriques

▶ La tension ou différence de potentiel (ddp)

C'est la différence de potentiel électrique entre deux points qui était à l'origine de la circulation des charges entre ces deux points.

Définition. Tension électrique
La **tension électrique** entre deux points A et B correspond à la différence de potentiel électrique entre ces points. On la note

$$\boxed{U_{\mathrm{AB}} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}}$$

Elle s'exprime en Volts (V).

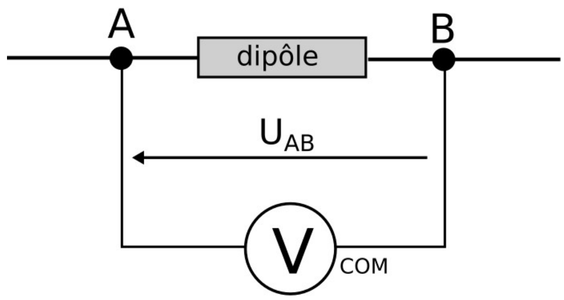
Représentation sur un circuit électrique

Dans les schémas électrique, les tensions se représentent par des flèches allant du point initial (B) vers le point final (A).

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

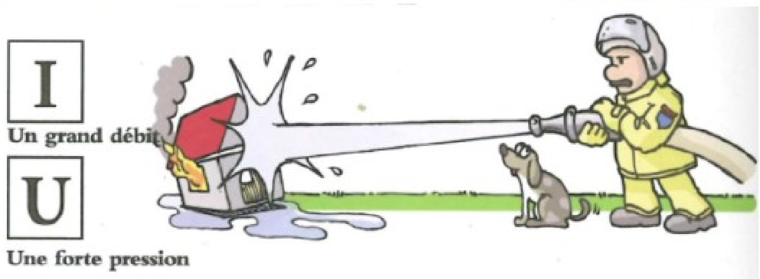
▶ Mesure d'une tension stationnaire

Appareil : un voltmètre
Branchement : en parallèle, on mesure U_{AB} en reliant borne "COM" du voltmètre au point B.
Attention ! Si on branche le voltmètre dans l'autre sens, on mesure $U_{BA} = -U_{AB}$.



▶ Ordres de grandeurs

Tension	**Provenance**
230 V	EDF (délivrée)
plusieurs kV	Industrielle
225 kV à 400 kV	Lignes haute tension
quelques V	Piles



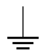
2.2 Notion de masse (IMPORTANT EN TP ! !)

Pour mesurer une altitude, il existe un niveau zéro : le niveau de la mer. De la même façon, il existe un niveau zéro pour les potentiels électriques.

Définition. Masse d'un circuit
Le potentiel de référence est appelé **la masse**. On l'assimile au potentiel du sol qui est fixé à 0 V.
On parle alors indifféremment de masse ou de Terre.

Symbole :

masse : 

Terre : 

Utilité pratique de la Terre :
On relie le plus souvent un circuit à la Terre. En cas de court circuit ($\sim$ un trop grand débit de charge), le trop plein de courant est réorienté vers la terre pour éviter d'endommager les appareils.

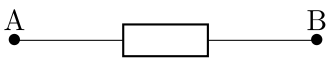
Propriété. La règle d'or de la masse
Dans un même circuit électrique, il ne peut y avoir deux niveaux zéro.
En TP lorsqu'on utilise deux appareils alimentés par une prise (GBF + oscilloscope), on relie **TOUJOURS** une masse de l'un des appareils à la masse de l'un autre ! !

> *Exemple 3 : On veut brancher en série un générateur et un moteur. Chacun de ses deux appareils possèdent une de ses deux bornes reliées à la Terre. Préciser les branchements.*

2.3 La puissance électrique

La grandeur physique coûteuse d'un dipôe électrique n'est ni le courant, ni la tension, mais la puissance électrique.

Définition. Dipôle électrique
Un dipôle électrique est un composant électronique ayant deux branchements : une entrée et une sortie.

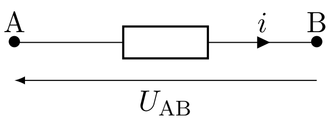


Définition. Puissance électrique
La puissance électrique $\mathcal{P}$ est : $\mathcal{P} = u \times i$

Question :
▷ quel courant : compter de $A \to B$ ou $B \to A$?
▷ quelle tension : $u = u_{AB}$ ou u_{BA} ?

▶ La convention récepteur et la puissance reçue

Définition. Dipôle en convention récepteur
Lorsque l'on dessine la tension et le courant en sens opposé, on parle de **convention récepteur**.



Propriété. Puissance reçue
La **puissance reçue** par un dipôle AB, lorsque le courant i et la tension U_{AB} sont en convention **récepteur**, est

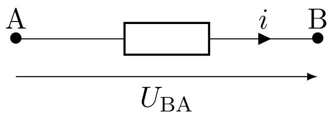
$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{reçue}} = U_{\mathrm{AB}}\ i} \ .$$

La puissance s'exprime en Watts (W).

Intérêt de la convention :
Prenons le cas où la tension est positive $U_{AB} > 0$ donc $V_A > V_B$. Si le dipôle est passif, le courant se dirige naturellement du potentiel le plus fort vers celui le plus faible, donc de A vers B. Ainsi $i > 0$. Dans ce cas, $\mathcal{P}_{\text{reçue}} > 0$: le dipôle reçoit de l'énergie.
Analogie : le dipôle reçoit de l'énergie du flux électrique, comme un moulin reçoit de l'énergie de la rivière.

▶ La convention générateur et la puissance fournie

Définition. Dipôle en convention générateur
Lorsque l'on dessine la tension et le courant dans le même sens, on parle de **convention générateur**.



Propriété. Puissance fournie
La **puissance fournie** par un dipôle AB, lorsque le courant i et la tension U_{AB} sont en convention **générateur**, est :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = U_{\text{BA}}\ i$$

Si la puissance fournie est positive, cela veut dire que le courant ne se déplace pas dans le sens "naturel" : les électrons remontent la pente. Il y a un système qui permet ce mouvement : le dipôle est actif.
Analogie : le dipôle fournit de l'énergie au flux électrique, comme une pompe permet de faire remonter la pente à de l'eau.

▶ Lien puissance fournie-puissance reçue

La puissance fournie par un dipôle est l'opposé de sa puissance reçue.

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = U_{\text{BA}}\ i = -U_{\text{AB}}\ i = -\mathcal{P}_{\text{reçue}}\ .$$

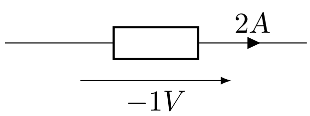
▶ Caractère récepteur et générateur

Attention ! les conventions ne décident en rien de la réalité physique ! !
En effet, il ne s'agit que d'un dessin sur un schéma.

Propriété.
Pour savoir si un dipôle est **physiquement** récepteur de courant ou générateur de courant, il faut calculer **sa puissance reçue $\mathcal{P}_{\text{reçue}}$ en convention récepteur.**

- ▷ Si $\mathcal{P}_{\text{reçue}} > 0$ ou $\mathcal{P}_{\text{fournie}} < 0$, le dipôle est **réellement** récepteur de puissance électrique (par exemple des résistances).
- ▷ Si $\mathcal{P}_{\text{reçue}} < 0$ ou $\mathcal{P}_{\text{fournie}} > 0$ le dipôle est **réellement** générateur de puissance électrique (par exemple une pile).

Lorsque c'est possible, on fera en sorte que les conventions et les caractères soient en accord.

> **Exemple 4** *: Donner la convention d'orientation du courant ? Le dipôle est-il générateur ? Récepteur ? Calculer la puissance fournie. La puissance reçue.*
>
> 
>
>
> *Le sens de mesure de la tension et de l'intensité sont dans le même sens : le dipôle est en convention générateur.*

On calcule la puissance fournie :

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = -1 \times 2 = -2W$$

Le dipôle est un récepteur.

3 L'étude des circuits électriques

3.1 Le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

▶ Hypothèse de l'ARQS

Dans un circuit électrique, les porteurs de charges se déplacent très peu. Il faut considérer le circuit comme une grande chaîne de charge côte à côte.

$$\text{temps de propagation } = \frac{\text{distance parcourir}}{\text{vitesse de propagation}} = \frac{L}{c}$$

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** fait l'hypothèse ce temps de propagation est négligeable devant la durée caractéristique T des variations temporelles de ces phénomènes.

$$\frac{L}{c} << T = \frac{1}{f}$$

avec f la fréquence typique du système électrique.

> **Propriété. Domaine d'application de l'ARQS**
> La durée caractéristique T des variations temporelles des phénomènes électriques est très longues devant le temps parcours de l'onde électrique :
> $$T = \frac{1}{f} >> \frac{L}{c}$$

> **Propriété. Fil électrique dans l'ARQS**
> Dans l'ARQS l'intensité du courant et le potentiel électrique sont donc les mêmes le long d'un fil électrique.

Attention ! DANS UN FIL ! ! !

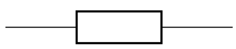
Application 2 : Vérifier si on se situe en ARQS dans chacun des trois exemples ci-dessous :
- ▷ *une ligne à haute tension de 300km de long, parcourue par une fréquence de 50Hz*
- ▷ *un circuit électrique de $L = 10cm$ qui travaille à une fréquence $f = 10MHz$*
- ▷ *une antenne radio FM de 2m, alimentée par un courant de fréquence $f = 100MHz$*

3.2 Description des circuits

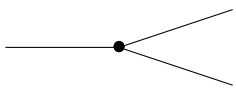
▶ Vocabulaire du circuit électrique

▷ Un fil :

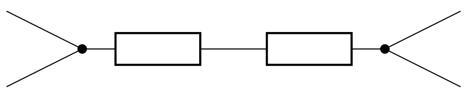
▷ Une résistance ou un dipôle quelconque :



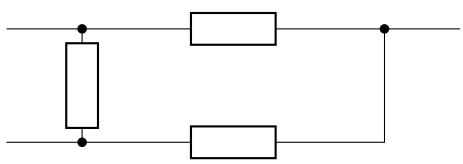
▷ **Un nœud** - point auquel est connecté au moins 3 fils :



▷ **Une branche** - portion entre deux nœuds parcourue par le même courant :

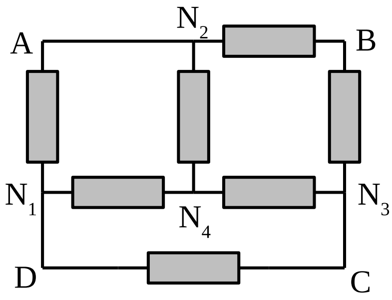


▷ **Une maille** - portion de circuit fermée (succession de branches qui retournent au nœud de départ) :



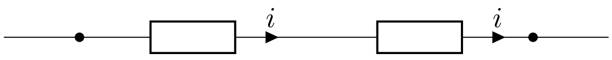
Application 3 :

> *Repérer les noeuds, mailles et branches sur le circuit suivant :*



▶ Association en parallèle ou en série

Définition. Branchement en série
Deux dipôles sur une même branches sont **en série**.



Ils sont parcourus par le même courant.

Définition. Branchelent en parallèle
Deux dipôles reliés à deux mêmes nœuds sont **en parallèle** (ou en dérivation).

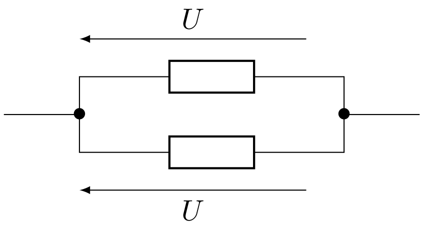


Fig. 3 – Deux dipôles en parallèle.

Ils sont soumis à la même tension.

> *Application 4 : Sur l'e circuit de l'application 3, y a-t-il des dipoles en série et en parallèle ?*

3.3 Les lois de Kirchhoff

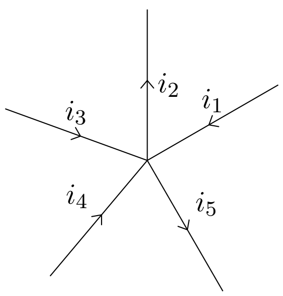
ARQS dans la pratique :
Dans l'ARQS, il n'y a pas d'accumulation de charges dans un circuit électrique : les charges apportées par un courant doivent immédiatement être évacuées par un autre courant.

▶ La loi des nœuds

Théorème. Loi des nœuds
Dans un nœude d'un circuit, on a

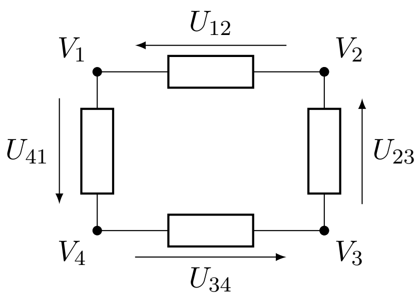
$$\boxed{\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}} .$$

> *Exemple 5 :*



▶ La loi des mailles

Soit la maille ci-dessous. Les notations V_i représentent les potentiels électriques en chacun des points.



Écrivons $U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41}$

$$= (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) + (V_4 - V_1)$$

$$= (V_1 - V_1) + (V_2 - V_2) + (V_3 - V_3) + (V_4 - V_4)$$

$$U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} = 0$$

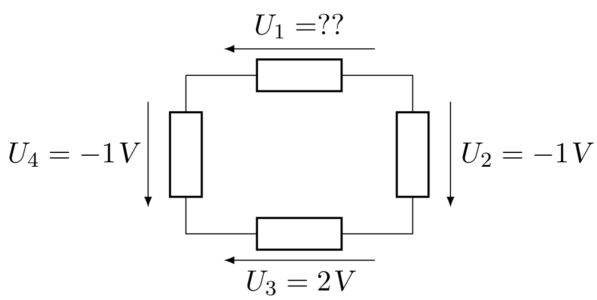
Théorème. Loi des mailles
La somme algébrique des tensions le long d'une maille dans un sens de parcours donné est nulle, soit

$$\boxed{\sum_k \pm u_k = 0}\,.$$

où ± 1 selon que la tension u_k est orienté dans le même sens que le sens de parcours la maille $(+1)$ ou non (-1).

Pour appliquer cette loi fondamentale, il faut
- ▷ choisir un sens de parcours de la maille ;
- ▷ sommer toutes les tensions en mettant un signe + si la tension est orientée dans le sens de la maille, moins sinon ;

Exemple 6 :



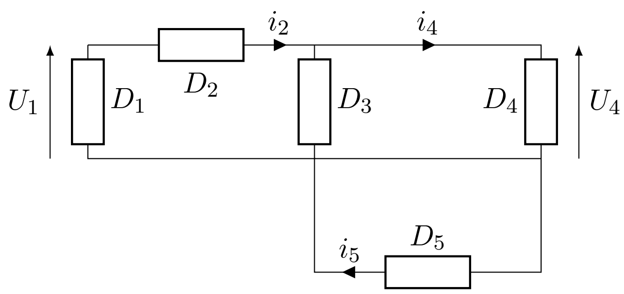
Les tensions U_1 et U_4 vont dans son sens et les tensions U_2 et U_3 vont en sens inverse. On a donc

$$U_1 + U_4 = U_2 + U_3\ .$$

Soit : $U_1 = U_2 + U_3 - U_4 \Rightarrow U_1 = -1 + 2 - (-1) = 2V$

▶ Application

Application 5 : *Dans le circuit ci-dessous, orienter puis préciser les valeurs des tensions et des courants manquants puis préciser le caractère récepteur ou générateur de chaque dipôle. On prend* $U_1 = -2\,\mathrm{V}$, $U_4 = -3\,\mathrm{V}$, $i_2 = -1\,\mathrm{mA}$, $i_4 = 1\,\mathrm{mA}$ *et* $i_5 = 0\,\mathrm{mA}$.



Chap IV Les dipôles élémentaires

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

Table des matières

Savoirs ♡

- ▷ ♡ Caractéristique courant-tension
  - ▷ Notion de tension en boucle ouverte et courant de court circuit
  - ▷ Point de fonctionnement
- ▷ ♡ **Résistance** :
  - ▷ loi d'Ohm + ordre de grandeur de résistances usuelles
  - ▷ Effet Joule : puissance dissipée et échauffement du milieu conducteur
  - ▷ modèle du fil et de l'interrupteur ouvert. Lien courant et tension dans les deux cas.
  - ▷ résistance d'entrée d'un appareil de mesure et influence sur la valeur mesurée
- ▷ ♡ **Condensateur** :
  - ▷ lien courant-tension aux bornes d'un condensateur
  - ▷ Continuité de la tension et comportement en régime permanent
  - ▷ Energie et comportement récepteur ou générateur suivant l'évolution de la tension
- ▷ ♡ **Bobine** :
  - ▷ lien courant-tension aux bornes d'un condensateur
  - ▷ Continuité de l'intensité et comportement en régime permanent
  - ▷ Energie et comportement récepteur ou générateur suivant l'évolution de l'intensité
- ▷ ♡ **Générateur** :
  - ▷ Modèle du générateur de tension idéal et de courant idéal
  - ▷ Caractéristique et modèle du générateur réel
  - ▷ Représentation de Thévenin
- ▷ ♡ **Association de résistance** : résistance équivalente
  - ▷ en série
  - ▷ en parallèle
- ▷ ♡ **Pont diviseur** :
  - ▷ de tension
  - ▷ de courant

Savoir Faire

Utiliser et exploiter la loi d'Ohm pour trouver la tension/l'intensité dans une résistance

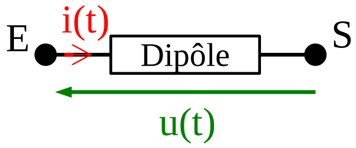
Remplacer une association de plusieurs résistances par une seule résistance équivalente.

Repérer ; établir et exploiter des ponts diviseurs de courant ou de tension.

1 Les dipôles

1.1 Définition

Définition. Dipôle
C'est un dispositif possédant deux bornes permettant de le raccorder à d'autres composants dans un circuit.

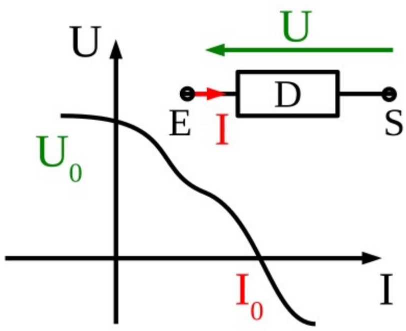


Dans l'ARQS, il est traversé par **un** courant $i(t)$ et soumis à **une** tension $u(t)$.

1.2 Caractéristique statique Courant/Tension

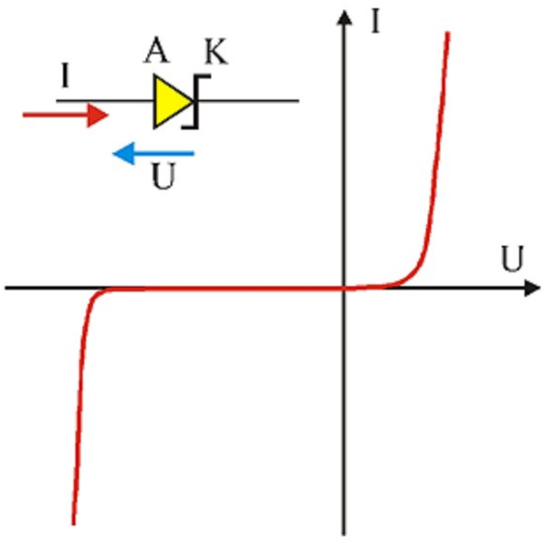
C'est la représentation graphique du lien entre le courant I qui circule dans le dipôle et la tension U à laquelle il est soumis en **régime continu**.

- ▷ U_0 est *tension en boucle ouverte* obtenue en circuit ouvert, ce qui impose $I = 0$
- ▷ I_0 est la *courant de court-circuit*, obtenu en court-circuitant le dipôle : on le branche à un fil ce qui impose $U = 0$



Définition. Dipôles actifs et passifs
- ▷ un dipôle est dit **passif** si sa caractéristique passe par l'origine.
- ▷ il est **actif** sinon.

Exemple 1 : Une diode possède la caractéristique courant tension suivante :



- *sur une certaine plage de valeur de tension, quelque soit la tension appliquée l'intensité est nulle.*
  Si la tension aux bornes de la diode est trop faible, elle empèche le passage du courant : c'est un interrupteur ouvert.
- *Si la tension devient trop forte (en valeur absolue) la diode laisse passer le courant.*
  Ce dernier augmente rapidement si on augmente U : c'est quasiment un fil.

2 Dipôles remarquables

2.1 Résistance, interrupteur et fil

▶ Loi d'Ohm et puissance dissipée par effet Joule

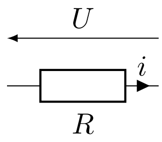
Lorsqu'un courant circule dans un milieu conducteur, les électrons sont freinés par les atomes de celui-ci. Ce freinage induit un chauffage du matériaux Cet effet est maximal dans certains dipôles que l'on appellera résistance. *Exemple :* le grille pain.

Définition. Résistance (ou résistor)

Dans une résistance, lorsque courant et tension sont en convention récepteur, la **loi d'Ohm** est vérifiée et indique que

$$\boxed{U = Ri}$$

avec R la valeur de la résistance en Ohm (Ω).



On définit aussi la grandeur $G = 1/R$ la conductance qui s'exprime en Siemens (S).

Attention ! La loi d'Ohm est écrite pour U et i en convention récepteur !!!!

Puissance reçue :
La puissance reçue est, en convention récepteur : $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = UI$.
On applique la loi d'Ohm et il vient : $\mathcal{P} = Ri^2$

Propriété. Effet Joule
La puissance reçue par une résistance vaut

$$\boxed{P_{\text{reçue}} = Ri^2 = \frac{U^2}{R} > 0}.$$

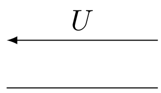
La résistance est donc toujours un récepteur de courant.

Cette puissance est dissipée dans le matériau sous forme de chaleur (hausse de la température) : on parle de**pertes par effet Joule**.

▶ Le fil électrique

Un fil électrique est un cylindre très fin de conducteur ohmique. Ainsi, il a les mêmes propriétés qu'une résistance mais sa résistance est numériquement très faible (généralement inférieure à un ohm).

Définition. Fil électrique
Un fil électrique est un dipôle ohmique modélisé par une résistance nulle $R = 0$.



Propriété. Tension aux bornes d'un fil
Quel que soit le courant traversant un fil, la tension aux bornes d'un fil est toujours nulle

Attention ! En TP, dans la "vraie vie", les fils ont une résistance.

▶ L'interrupteur ouvert

Un interrupteur ouvert modélise une portion de circuit présentant "un trou" de milieu conducteur. Autrement dit, cette portion du circuit est ouverte, les charges ne peuvent plus passer.

Définition. Interrupteur ouvert

Un interrupteur ouvert est un dipôle modélisé par une résistance infinie.

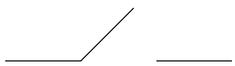


Fig. 1 – Un interrupteur ouvert.

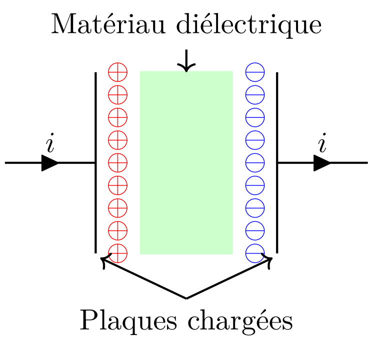
Propriété. Tension aux bornes d'un interrupteur ouvert
Quelle que soit la tension aux bornes d'un interrupteur ouvert, le courant le traversant est nul.

▶ Ordres de grandeurs de résistances

Les résistances typiques présentes au laboratoire : 1Ω (faible résistance) et 10 MΩ (forte résistance). Une résistance "moyenne" en électronique est de l'ordre de 1 kΩ.

2.2 Condensateur

▶ Présentation



Un condensateur est un système de deux plaques conductrices séparées par un milieu diélectrique (du verre, de la céramique, éventuellement de l'air...). L'intérêt est que, bien que les charges ne puissent pas traverser, le courant continue de circuler : il y a une accumulation de charge sur chacune des faces.

Une plaque se charge négativement, l'autre positivement. On note la charge $\pm q$

▶ Relation fondamentale et capacité

Propriété. Tension aux bornes d'un condensateur
La tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur est donnée par

$$\boxed{q(t) = Cu(t)}$$

avec $q(t)$ la charge positive dépendant du temps présente sur l'armature (en Coulombs) et C la **capacité** du condensateur en Farad (F).

Capacité	Condensateur
1 nF	Usuel (diélectrique en verre)
1 µF	Diélectrique en papier paraffiné
1 µF–100 µF	Diélectrique en céramique
1 mF	Électrochimique

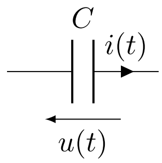
Attention ! Le Farad est une grande unité, un condensateur de 1 F est rare, ils sont utilisés par exemple pour les voiture.

▶ Modèle du condensateur idéal

Définition. Lien tension-courant dans un condensateur

En convention récepteur, dans un condensateur, on a

$$\boxed{i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}.$$



Attention ! En convention récepteur !!!!

> *Remarque :* *La notation* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ *fait référence à la dérivée mathématique par rapport à la variable temps* t.

Propriété. Continuité courant-tension

- **La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue.** Ainsi, un condensateur protège contre les variations brusques de tension.
- Si la tension $u(t) = u_0$ est constante, alors $i(t) = 0$. Ainsi, **en régime permanent, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert**.

▶ Aspect énergétique

En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = u(t)i(t) = u(t)C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

Instant Math ♡ : $(f^2)' = 2ff'$ donc notamment

$$f(t)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}f^2(t)\right]$$

On a alors ici :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = u(t)i(t) = u(t)C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{u(t)^2}{2}\right)$$

Définition. Énergie d'un condensateur

L'énergie électrostatique stockée dans un condensateur vaut

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}Cu(t)^2}.$$

Une énergie s'exprime évidemment en Joule.

▶ Comportement d'un condensateur

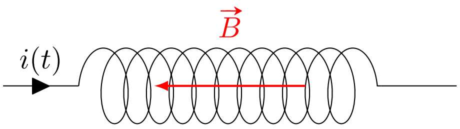
Lien puissance-énergie :

$$\mathcal{P}_{reçue} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Cu(t)^2\right]$$

- la tension $|u(t)|$ augmente :
  L'énergie du condensateur augmente : il reçoit de l'énergie de la part du circuit.
  $\Rightarrow$ la puissance reçue est positive : le condensateur a un caractère récepteur ;
  On dit qu'il **se charge.**
- la tension $|u(t)|$ diminue :
  L'énergie du condensateur diminue : il cède de l'énergie au circuit.
  $\Rightarrow$ la puissance reçue est négative : le condensateur a un caractère générateur ;
  On dit qu'il **se décharge.**

2.3 Bobine - Inductance

▶ Présentation et modèle idéal



Fil enroulé

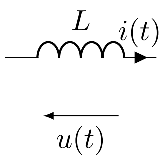
Une inductance, aussi appelée bobine, est un fil enroulé. Lorsque le courant parcourt ce fil, un champ magnétique apparaît et s'oppose aux variations de courants imposées par l'extérieur.

Définition. Lien tension-courant dans une bobine

En convention récepteur, la tension $u(t)$ aux bornes la bobine est donnée par la relation

$$\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

avec i le courant traversant la bobine et L l'**inductance** en Henry (H).



Attention ! En convention récepteur !!!!

Les bobines disponibles en TP d'électroniques sont de l'ordre du mH.

Propriété. Continuité courant-tension

- **Le courant traversant une bobine est une fonction continue.** Ainsi, une bobine protège contre les variations brusques de courant.
- Si le courant $i(t) = I_0$ est constant, alors $u(t) = 0$. Ainsi, **en régime permanent, une bobine est équivalente à un fil.**

▶ Aspect énergétique

En convention récepteur, la puissance reçue par la bobine vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = u(t)i(t) = i(t)L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{i(t)^2}{2}\right).$$

Définition. Energie stockée dans une bobine

L'énergie magnétique stockée dans une bobine vaut

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{magnétique}}(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)}.$$

Une énergie s'exprime en Joule.

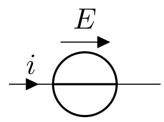
Tout comme un condensateur, l'énergie d'une bobine peut varier : elle peut se comporter comme un récepteur ou un générateur.

> *Application 1 : Décrire, en fonction du sens de variation de l'intensité traversant une bobine, le comportement générateur ou récepteur de cette dernière.*

2.4 Les générateurs de tension et de courant

Définition. Générateur de tension idéal

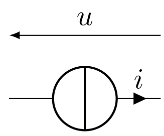
Un générateur idéal de tension est un dipôle qui impose à ses bornes une tension $e(t)$ quel que soit le courant $i(t)$ qui le traverse.



Lorsque la tensionest indépendante du temps $e(t) = E$, on parle de régime **continu** et E est appelé **force électromotrice.**
Une tension s'exprime en Volt.

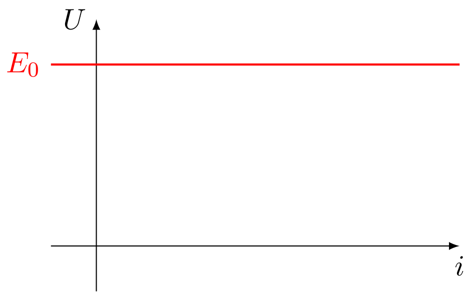
Définition. Générateur de courant idéal

Un générateur idéal de courant est un dipôle qui crée une intensité $i(t)$ quel que soit la tension $u(t)$ à ses bornes.

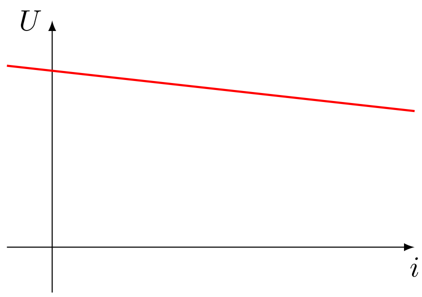


▶ Caractéristique d'un générateur de tension

Pour un générateur de tension idéal, la tension débitée est constante quelle que soit le courant.



Dans un générateur réel, il y a toujours des effets résistifs qui font que la tension diminue lorsque l'intensité du courant augmente.

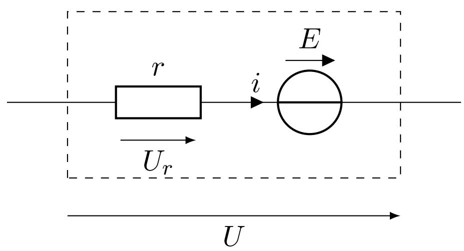


▶ Représentation de Thevenin d'un générateur réel

Objectif : construire un générateur réel à partir d'un générateur idéal.

On peut construire un générateur réel à l'aide de deux dipôle idéaux : une générateur idéal, de f.e.m. E et une résistance r branchée en série.

C'est bien un dipôle : il a deux bornes de branchement.
On appelle U la tension aux bornes du dipôle ainsi construit. Puisqu'on étudie un générateur, on choisit une convention générateur pour le sens du courant.

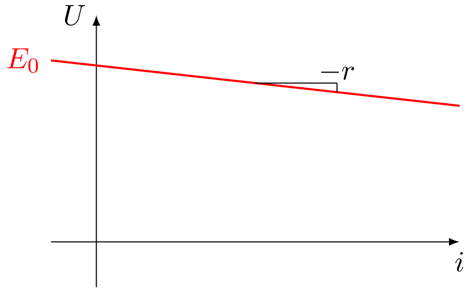


On a : $U = U_{\text{géné}} + U_r$

Tension de la résistance U_r : **Attention !** On prend garde aux conventions ! ! La résistance est en convention générateur donc $U_{\mathrm{r}} = -Ri$

Générateur idéal : $U_{\text{gene}} = E_0$

Finalement : $U = E_0 - ri$, on retrouve bien la caractéristique précédente : un droite descendante. Un générateur réel est donc modélisé par un générateur de Thévenin modélisé par le circuit de la figure suivante :

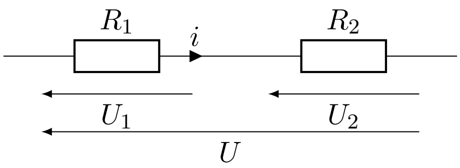


3 Méthodes de calcul des grandeurs électriques dans un circuit

3.1 Association de résistances

► Association en série

Considérons deux résistances R_1 et R_2 en série, donc parcourues par un même courant i. On note U la tension aux bornes des deux résistances.
Objectif : exprimer U en fonction de R_1, R_2 et i



On a :

$$U = U_1 + U_2$$

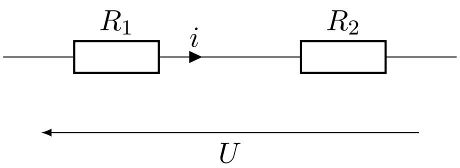
On a par la loi d'Ohm : $U_1 = R_1 i$ et $U_2 = R_2 i$.
Donc :

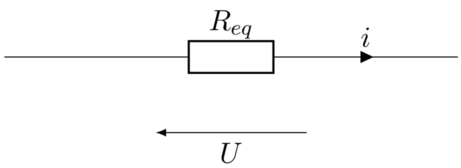
$$U = (R_1 + R_2)i$$

Tout se passe donc comme si U était la tension aux bornes d'une résistance équivalente R_{eq}.

Propriété. Résistance en série
En **série**, les résistances s'ajoutent

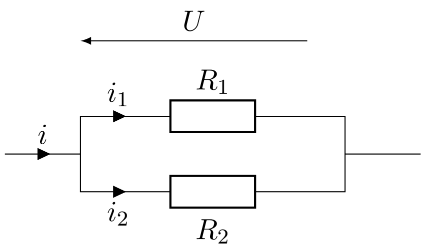
$$\boxed{R_{\text{eq}} = R_1 + R_2}\,.$$





► Association en parallèle

Considérons deux résistances R_1 et R_2 en parallèles, donc ayant une même tension U à leurs bornes. On note i le courant total parcourant le dispositif.
Objectif : exprimer U en fonction de R_1, R_2 et i



Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$ On a par la loi d'Ohm $U = R_1 i_1$ et $U = R_2 i_2$.

$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U$$

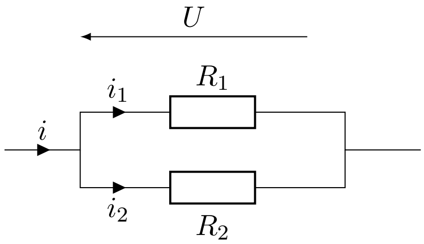
Soit :

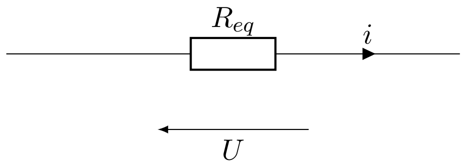
$$U = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} i$$

Tout se passe donc comme si U était la tension aux bornes d'une résistance équivalente R_{eq}.

Propriété. Résistance en parallèle
En **parallèle**, les inverses des résistances s'ajoutent

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

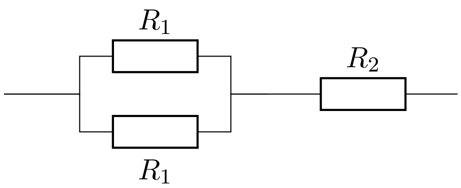


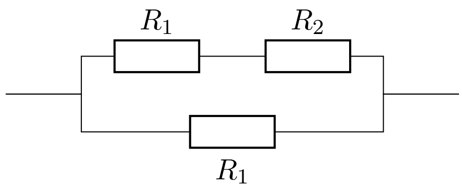


▶ Recherche de résistances équivalentes

> ***Application 2 :*** *Deux résistances de 10 kΩ sont disponibles, comment les associer pour avoir une résistance équivalente de 20 kΩ ou de 5 kΩ ?*

> ***Application 3 :*** *Quelle est la résistance équivalente pour chacun des circuits ?*

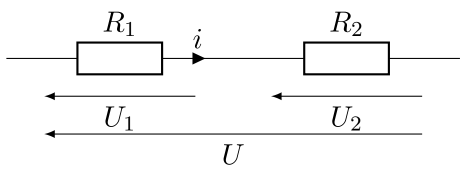




3.2 Ponts diviseurs

▶ Le pont diviseur de tension

On est confronté à la situation suivante où U, R_1 et R_2 sont connus et on cherche U_2 (ou U_1).



Loi d'Ohm : $U_1 = R_1 i$ avec i inconnu.
Les deux résistances sont en série, on a donc $U = (R_1 + R_2)i$ soit $i = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$.
Finalement :

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$$

Autrement dit, la tension se distribue majoritairement sur les « grandes » résistances.

Propriété. Pont diviseur de tension
Le **pont diviseur de tension** indique que

$$\boxed{U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U} \quad \text{et} \quad \boxed{U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U}.$$

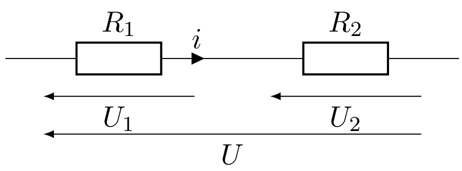
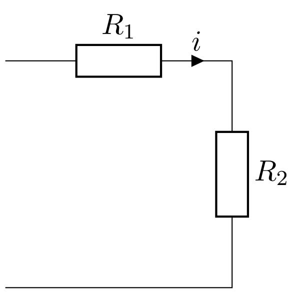


Fig. 2 – Le pont diviseur de tension.

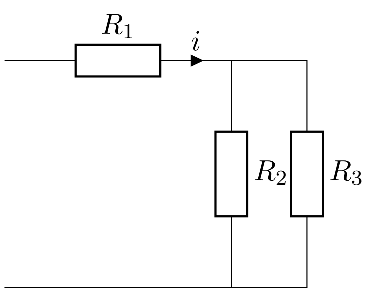
Attention ! Il faut bien être dans cette configuration. En particulier, il ne doit avoir aucun nœud entre les deux résistances !

Exemple 2 :

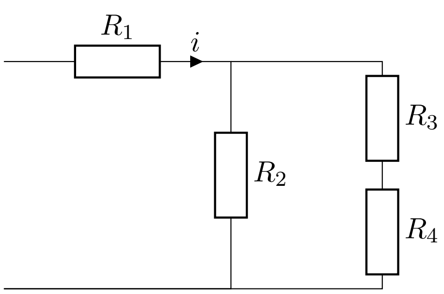
OUI



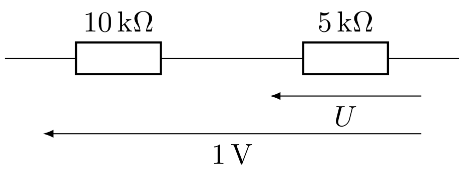
NON



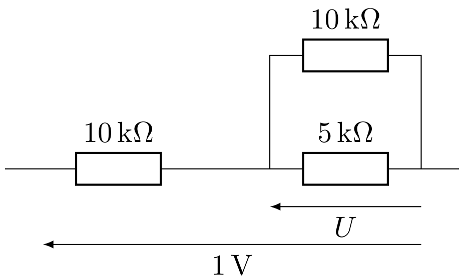
OUI pour $R_3 - R_4$



Application 4 : Combien vaut la tension U dans le circuit ci-dessous ?

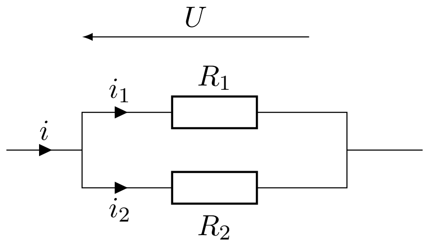


Application 5 : Combien vaut la tension U dans le circuit ci-dessous ?



▶ Le pont diviseur de courant

On est confronté à la situation de la figure 3 où i, R_1 et R_2 sont connus et on cherche i_2 (ou i_1).



Les deux résistances sont en parallèle, on a donc $U = R_{\text{eq}} i$ avec $R_{\text{eq}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. De même $U = R_2 i_2$. Ainsi,

$$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = R_2 i_2$$

Autrement dit, le courant se distribue majoritairement sur les « petites » résistances.

Propriété. Pont diviseur de courant
Le **pont diviseur de courant** indique que

$$\boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i}.$$

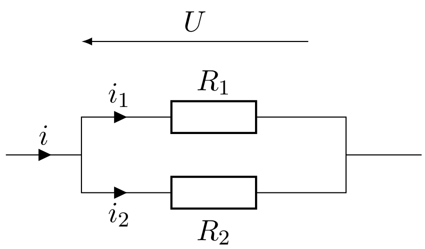
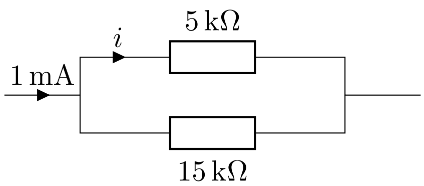


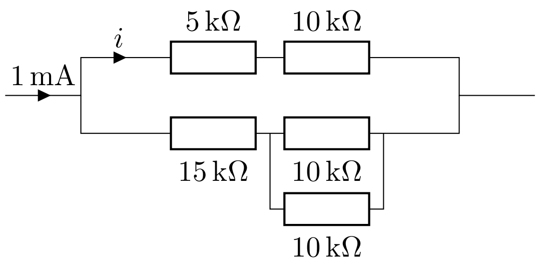
Fig. 3 – Le pont diviseur de courant.

Attention ! La résistance qui n'est pas traversée par le courant recherché est au numérateur.

Application 6 : Combien vaut le courant i dans le circuit ci-dessous ?



Application 7 : Combien vaut le courant i dans le circuit ci-dessous ?



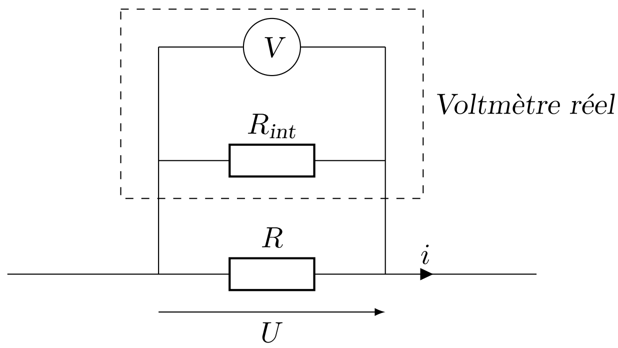
3.3 Conséquences pratiques : influence des résistances d'entrée et de sortie

▶ Résistance d'entrée d'un appareil de mesure

Règle de base :
Tous les appareils de mesures de tensions, comme les voltmètres ou les oscilloscopes, doivent être placés en parallèles de la tension à mesurer.

Exemple 3 :

Tous les appareils de mesures ont une résistance interne R_{int}. La situation réelle est donc celle de la figure suivante :



- *sans appareil de mesure la tension U est égale à : $U = Ri$*
- *avec l'appareil de mesure, le courant i se répartit suivant R et R_{int}. Par un pont diviseur de courant, on a :*

$$U == \frac{RR_{int}}{R + R_{int}} i \ .$$

♡ *Instant math* ♡ *: si $L >> l$ alors : $L + l \simeq L$*

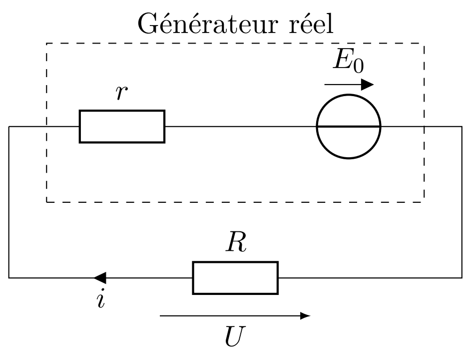
Attention ! *$L \times l = L \times l$, rien ne change !*

Pour que les deux valeurs correspondent au mieux, il faut $R \ll R_{int}$.

Propriété. Résistance interne et mesure de tension
Pour ne pas perturber le circuit, la résistance interne d'un appareil de mesure de tension doit être la plus grande possible.

▶ Résistance de sortie

Prenons un générateur réel (modèle de Thévenin) pour alimenter une résistance R, on note U la tension à ses bornes.
La tension commandée (celle sur le cadran) est la tension E_0. La résistance interne r est appelée **résistance de sortie** du générateur.



On souhaite que U, la tension délivrée, et E_0, la tension demandée, soient identiques.

Or, on remarque que la résistance r influe sur la tension U. En effet, avec un pont diviseur de tension, on constate que

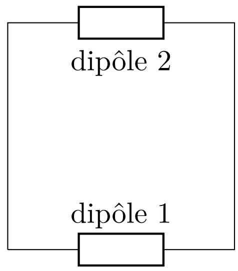
$$U = \frac{R}{R+r}E_0$$

La résistance de sortie d'un générateur peut donc perturber la tension qu'applique réellement le générateur au circuit. On s'arrange généralement pour que la résistance interne soit la plus petite possible. Généralement, on a $r \approx 50\,\Omega$.

Astuce TP :
Lorsqu'on utiliserons les GBF en mode créneau, si le créneau observé sur l'oscilloscope n'est pas parfaitement carré, cela signifie souvent que la résistance globale du circuit est plus faible ou de l'ordre de la résistance de sortie.

3.4 Point de fonctionnement

On considère deux dipôles connectés entre eux. Ils sont à la fois en parallèle et en série. Ils sont donc parcourus par le même courant I et soumis à la même tension U.

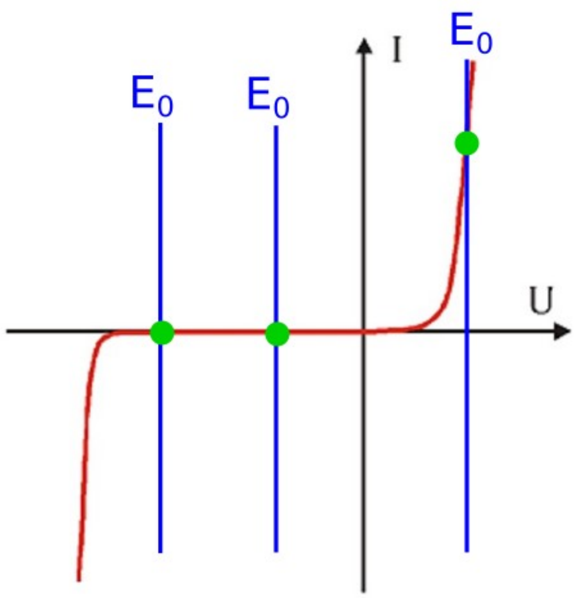


On trace les deux caractéristiques des deux dipôles sur le même graphe (U, I). Le point d'intersection des deux caractéristiques est appelé le point de fonctionnement et donne la valeur de la tension et de l'intensité du circuit.

Exemple 4 : ***Diode Zener et générateur de tension***
On considère le circuit constitué d'un générateur de tension idéal et d'une diode. On cherche la tension et l'intensité des deux dipôles.

On représente sur le même graphe les caractéristique d'une diode et d'un générateur de tension idéal. La tension et l'intensité dans le circuit sont donnés par le point d'intersection des deux droites.

On remarque que :
- ▷ *si $|E_0|$ est trop faible : $i = 0$ et $U = E_0$: il n'y a aucun courant qui circule dans le circuit.*
  La diode est dite bloquante.
- ▷ *si $|E_0|$ est suffisamment grand : $i \neq 0$ et $U = E_0$: il y a aucun courant qui circule dans le circuit.*
  La diode est dite passante.



Application 8 : *Même question mais avec un générateur de tension réel, modélisé par un générateur de Thévenin.*

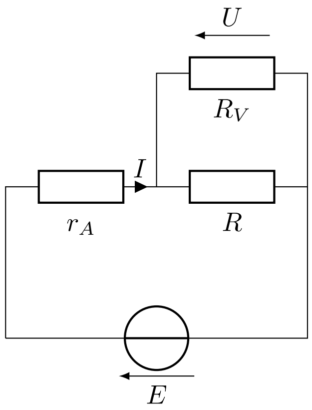
μDm Mesure de résistances

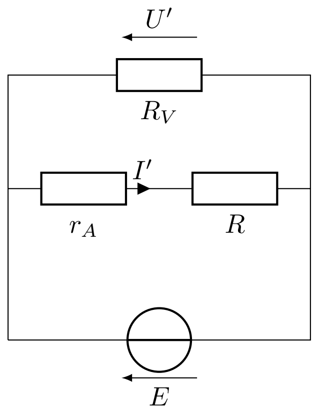
Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

On se propose de mesurer une résistance inconnue R. Pour cela, il faut mesurer simultanément la tension U aux bornes de celle-ci et l'intensité I du courant qui la traverse. On utilise donc un voltmètre et un ampèremètre. Le but de cet exercice est de mettre en évidence l'effet des résistances internes $R_V = 1M\Omega$ et $r_A = 10\Omega$ du voltmètre et de l'ampèremètre.

Fig. 1 – Montages de courte dérivation (C) et de longue dérivation (L).

1. (a) Expliquer pourquoi dans le montage courte dérivation, l'intensité mesurée n'est pas l'intensité qui circule réellement dans la résistance.
   (b) De la même façon, quel est le défaut du montage longue dérivation ?
2. Lequel de ces deux circuits équivalent correspond au montage courte dérivation ? Longue dérivation ?





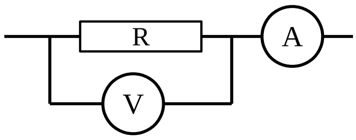
3. On considère le montage de courte dérivation. La résistance mesurée est le rapport de la tension mesuré par le voltmètre divisé par l'intensité mesuré par l'ampèremètre :

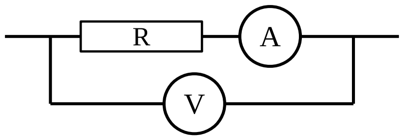
$$R_{mes} = U/I$$

   (a) Exprimer la résistance mesurée R_{mes} en fonction de R et de R_V.
   (b) Exprimer l'écart relatif $\varepsilon = \dfrac{R - R_{mes}}{R}$.
4. Exprimer l'écart relatif ε' pour le montage longue dérivation.
5. Réaliser l'application numérique pour $R = 100\Omega$ et $R = 20k\Omega$
6. (*) Pour quelle valeur de R, les résistances mesurées en courte et longue dérivation sont-elles égales ?
7. Conclure sur le choix du montage (courte ou longue dérivation) en fonction de la valeur de la résistance R à mesurer.

Mesure de résistances

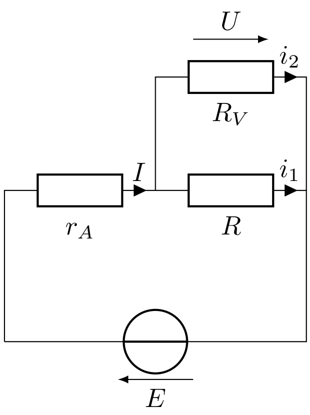
Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

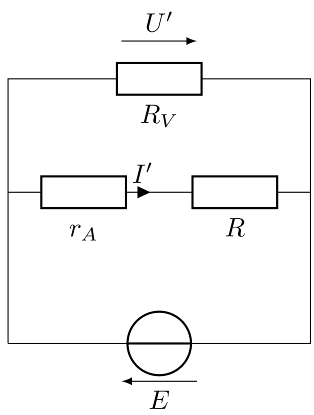




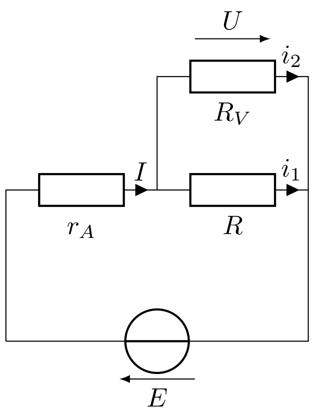
1. (a) En branchant le voltmètre aux bornes de la résistances, on crée une boucle de courant parallèle à R : le courant électrique total mesurée par l'ampèremètre se partage entre le voltmètre et R. L'ampèremètre ne mesure donc pas exactement l'intensité qui circule dans la résistance.
   (b) De la même façon, avec une longue dérivation on ne mesure pas la tension aux bornes de la résistances mais celle aux bornes de la résistance **et** de l'ampèremètre.

2. Le premier montage corresponde à une courte dérivation avec R_V la résistance du voltmètre et r_A celle de l'ampèremètre. Le second correspond à une longue dérivation avec les même notations.





3.
   (a) **Attention !** *On représente les différentes grandeurs électriques pertinentes sur un schéma*



▷ on associe les deux résistances R_V et R qui sont en parallèles :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{RR_V}{R+R_V}$$

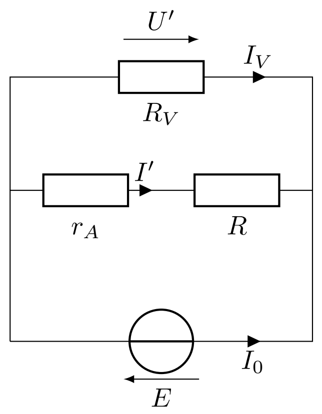
On a alors : $U = R_{eq} I$ donc

$$R_{\text{mes}} = \frac{U}{I} = \frac{RR_V}{R+R_V}$$

   (b)

$$\varepsilon = \frac{R - R_{mes}}{R} = 1 - \frac{R_V}{R+R_V}$$

4. *De la même façon :* $R_{mes} = \dfrac{U'}{I'}$ *et on refait comme avant!!*



▷ on associe r_A et R : $R_{eq} = R + r_A$
▷ On a alors : $U' = (R + r_A)I'$ et donc :

$$R_{\text{mes}} = \frac{U'}{I'} = R + r_A$$

L'écart relatif est alors :

$$\varepsilon' = \frac{R - R_{mes}}{R} = -\frac{r_A}{R}$$

5. ▷ **courte dérivation** pour $R = 100\Omega \Rightarrow \varepsilon = 0,01\%$; pour $R = 20k\Omega \Rightarrow \varepsilon = 2\%$
   ▷ **longue dérivation** pour $R = 100\Omega \Rightarrow \varepsilon = 10\%$; pour $R = 20k\Omega \Rightarrow \varepsilon = 0,01\%$

6. On cherche R telle que $\dfrac{RR_V}{R + R_V} = R + r_A$. Donc :

$$RR_V = (R + r_A)(R + R_V) \quad \text{soit} \quad R^2 + r_A R + r_A R_V = 0$$

Donc $R = \dfrac{-r_A \pm \sqrt{r_A^2 - 4r_A R_V}}{2}$. On remarque qu'il n'y a aucune solution positive : c'est impossible de trouver une telle résistance.

7. L'objectif est de minimiser l'écart relatif. On remarque alors que $\varepsilon << 1$ si :
   ▷ courte dérivation : $R << R_V$ la résistance R à mesurer est faible devant celle R_V du voltmètre. Donc plutôt adapté à des "petites" résistances.
   ▷ longue dérivation : $R >> r_A$ la résistance R à mesurer est grande devant celle r_A de l'ampèremètre. Donc plutôt adapté à des "grandes" résistances.

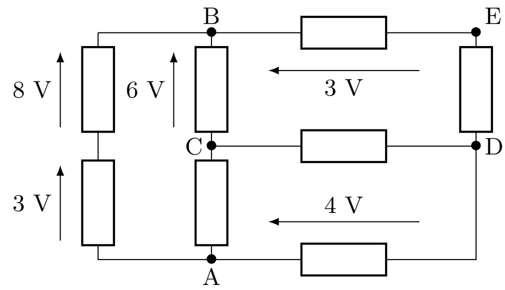
TD 03-04 Circuits électriques dans l'ARQS

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

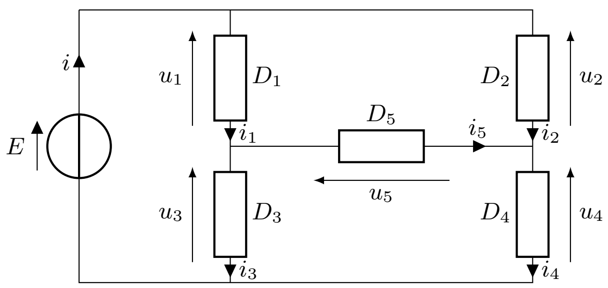
1 Lois de Kirchhoff, intensité, tension, puissance

Exercice 1 - Loi des mailles :
On considère le circuit ci-dessous, dans lequel la nature des dipôles n'est pas précisée.

1. Dénombrer le nombre de mailles qui peuvent être définies dans le circuit.
2. Appliquer la loi des mailles à chacune de celles-ci. Combien de relations indépendantes obtient-on ainsi ?
3. Déterminer les tensions u_{AC}, u_{CD} et u_{DE}

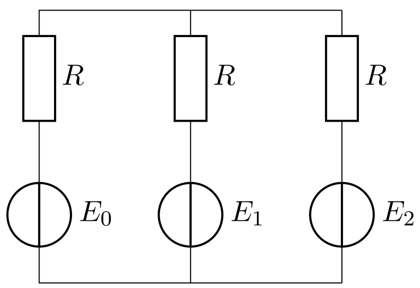


Exercice 2 - Maîtriser les conventions : Courants, tensions et puissances :
Pour le montage ci-dessous, on donne : $E = 20.0\,\text{V}$; $i_1 = 3.0\,\text{A}$; $i_2 = 4.0\,\text{A}$; $i_5 = 1.0\,\text{A}$; $u_3 = 5.0\,\text{V}$ et $u_4 = 12.0\,\text{V}$.



1. Calculer les intensités des courants i, i_3 et i_4.
2. Déterminer les tensions u_1, u_2 et u_5.
3. Quelle est la puissance P_G fournie par le générateur ?
4. Comment se comporte le dipôle D_5 ?

Exercice 3 - Générateur ou récepteur :



On considère le montage ci-contre.

On suppose que $0 < E_0 < E_1 < E_2$.

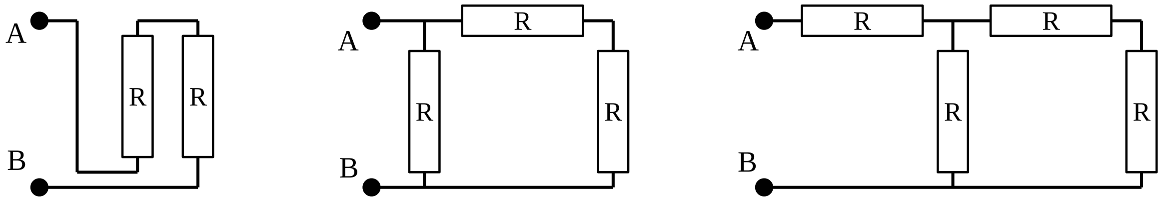
- ▷ Exprimer les courants i_1, i_2 et i_3 en fonction de E_0, E_1 et E_2.
- ▷ Les générateurs de ce circuit fonctionnent-ils en générateur ou en récepteur ?

Réponses : Gén. 0 est récepteur ; Gén. 2 est générateur ; Gén 1 est récepteur si $E_1 < (E_0 + E_2)/2$

2 Ponts diviseurs et association de résistances

Exercice 4 - Résistances équivalentes :

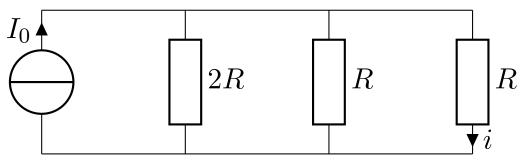
1. Déterminer la résistance équivalente des dipôles AB suivants :



Réponses : $R_1 = 2R$; $R_2 = \frac{2R}{3}$; $R_3 = \frac{5R}{3}$

Exercice 5 - Pont diviseur de courant :

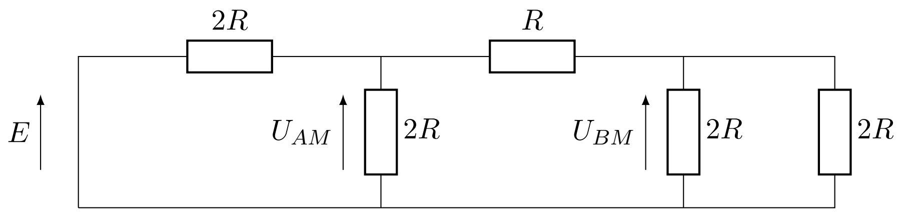
Calculer i dans le montage suivant.



Exercice 6 - Double ponts diviseurs :

Dans cette configuration, l'objectif est de déterminer U_{BM} en fonction de E.

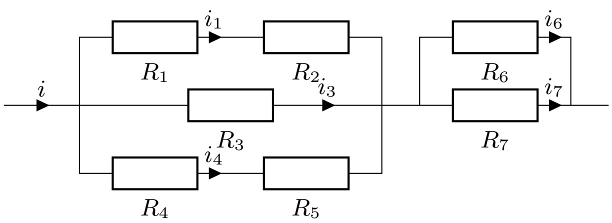
1. Peut-on directement réaliser un pont diviseur de tension ? Pourquoi ?
2. Déterminer U_{BM} en fonction de U_{AM}. Déterminer U_{AM}, puis U_{BM}, en fonction de E.



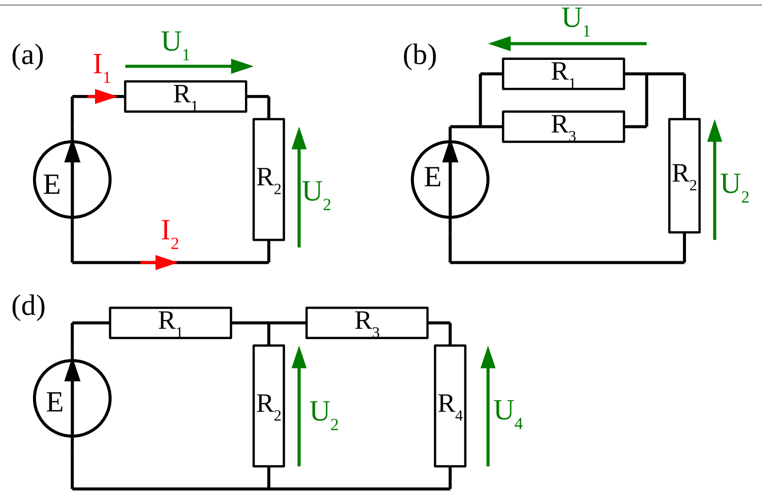
Réponses : $U_{AM} = E/3$; $U_{BM} = E/6$

Exercice 7 - Loi d'Ohm :

Le dipôle ci-dessous est parcouru par un courant total $i = 4.0\,\mathrm{A}$. On donne : $R_1 = R_7 = 6.0\,\Omega$; $R_2 = R_6 = 4.0\,\Omega$; $R_3 = 10.0\,\Omega$; $R_4 = 12.0\,\Omega$ et $R_5 = 8.0\,\Omega$.



1. Calculer la résistance totale du dipôle.
2. Déterminer les intensités i_4, i_6 et i_7.
3. On coupe le courant et on applique maintenant une tension de $10.0\,\mathrm{V}$ au dipôle, quelle est la tension aux bornes de R_7 ?



Exercice 8 - Calcul de grandeurs électrique :

Pour les circuits représentés, on donne $E = 10$ V, $I_0 = 10$ mA, $R_1 = R_2 = 1,0$ kΩ, $R_3 = 3,0$ kΩ et $R_4 = 4,0$ kΩ.

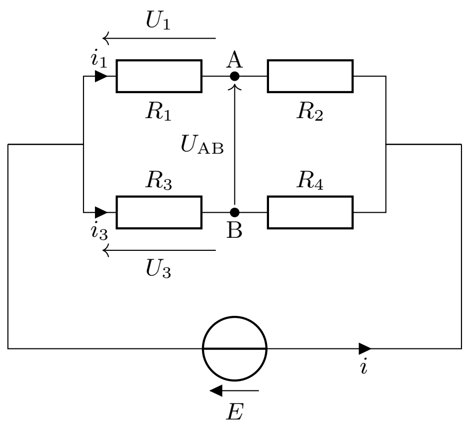
Déterminer les expressions littérales et les valeurs numériques des grandeurs représentées.

Réponses : (a) $U_1 = -5.0$ V ; $U_2 = 5.0$ V ; $I_1 = 5$ mA ; $I_2 = -5$ mA - (b) $U_1 = 4.3$ V ; $U_2 = 5.7$ V - (c) $I_1 = -7.5$ mA ; $U_2 = 10.0$ V - (d) $U_2 = 4.7$ V ; $U_4 = 2.7$ V

3 Exercices complets

Exercice 9 - Pont de Wheatstone :

Un pont de Wheatstone est constitué de quatre résistances selon le montage ci-contre. Il permet de mesurer avec précision des faibles variations de résistances, notamment celle des thermistances, jauges de contraintes ou photorésistances.

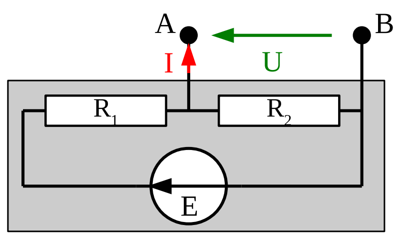


1. en utilisant la formule du diviseur de tension, déterminer les valeurs de U_1 et U_3.

   Le pont est dit équilibré lorsque $U_{AB} = 0$.
2. en décomposant les tensions, exprimer U_{AB} en fonction de U_1 et U_3.
3. Déterminer la relation entre les résistances pour équilibrer le pont.
4. On utilise ce montage pour mesurer une résistance inconnue R_1 avec R_2 et R_3 fixée et R_4 variable. Pour cela, on branche un ampèremètre entre A et B et on fait varier R_4 jusqu'à ce que l'ampèremètre indique 0 A. La résistance r interne de l'appareil de mesure est-elle à prendre en compte ?

Exercice 10 - Modèle de Thévenin (*) :

On note $U = U_{AB}$ et I le courant sortant du dipôle par la borne A. Exprimer U en fonction de I et des caractéristiques circuit (E, R_1 et R_2). En déduire que le dipôle AB est un générateur linéaire dont on déterminera les caractéristiques du modèle de Thévenin équivalent.



Réponses : $E_{th} = E\frac{R_2}{R_1+R_2}$; $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

TD 03-04 Circuits électriques dans l'ARQS

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

1 Lois de Kirchhoff, intensité, tension, puissance

Méthode en DS. Commencer un exercice d'électricité
Pour commencer un exercice d'électricité, je prends le temps de bien :
- ▷ faire un schéma où je représente **TOUTES** les tensions et intensité des différents dipôle
- ▷ j'écris **TOUTES** les lois de nœuds
- ▷ j'écris **TOUTES** les lois des mailles

Méthode en DS. Comportement d'un dipôle
Pour connaître le comportement d'un dipôle, on choisit une convention (**Attention !** elle peut être imposée par l'énoncé) pour l'orientation de la tension u et du courant i :
- ▷ **convention récepteur :** on calcule $ui = \mathcal{P}_r$ qui est la puissance reçue.
  $\mathcal{P}_r > 0$: comportement récepteur ; $\mathcal{P}_r < 0$: comportement générateur
- ▷ **convention générateur :** on calcule $ui = \mathcal{P}_f$ qui est la puissance fournie.
  $\mathcal{P}_f > 0$: comportement générateur ; $\mathcal{P}_f < 0$: comportement récepteur

Exercice 1 - Loi des mailles :

1. 3 mailles simples (on peut ensuite en créer 7 en tout).
2. On trouve seulement 3 équations indépendantes car les grosses mailles sont des CL des petites.

$$\begin{aligned} 8 + 3 + u_{\text{AC}} &= 6 \\ u_{\text{CD}} + 6 + u_{\text{DE}} &= 3 \\ u_{\text{AC}} + u_{\text{CD}} &= 4 \end{aligned}$$

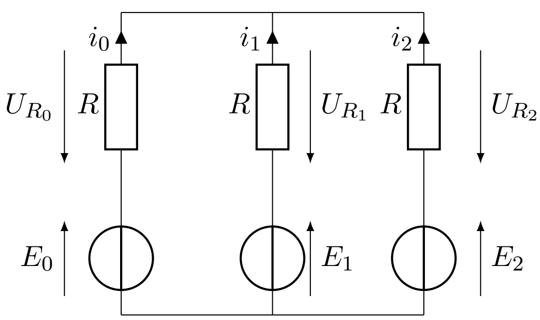
3. Au final $u_{\text{AC}} = -5\,\text{V}$, $u_{\text{CD}} = 9\,\text{V}$ et $u_{\text{DE}} = -12\,\text{V}$

Exercice 2 - Maîtriser les conventions : Courants, tensions et puissances :

1. Loi des nœuds : $i = 7.0\,\text{A}$, $i_3 = 2.0\,\text{A}$ et $i_4 = 5.0\,\text{A}$.
2. Loi des mailles : $u_1 = 15.0\,\text{V}$, $u_2 = 8.0\,\text{V}$ et $u_5 = -7.0\,\text{V}$.
3. Convention générateur $P_{\text{G}} = +ui = 140\,\text{W}$
4. Convention récepteur, puissance reçue $P = +ui = -7\,\text{W} < 0$: c'est un générateur.

Exercice 3 - Générateur ou récepteur :

On place tous les dipôle en convention générateur ($\sim$courant orienté "vers le haut) et on appelle i_0, i_1 et i_2 les différents courants.



Pour chaque dipôle, les puissances fournies sont alors $\mathcal{P}_k = E_k i_k$. Leur signe est celui de i_k car E_k est positif.

- ▷ **Lois des noeuds** : $i_0 + i_1 + i_2 = 0$
- ▷ **Lois des mailles** :
  1. $E_0 - U_{R_0} + U_{R_1} - E_1 = 0$
  2. $E_1 - U_{R_1} + U_{R_2} - E_2 = 0$
- ▷ **Loi d'Ohm** : $U_{R_1} = Ri_1$, $U_{R_2} = Ri_2$, $U_{R_3} = Ri_3$.

Avec calculs, on trouve :

$$i_0 = \frac{1}{3R}(2E_0 - E_1 - E_2) \ ; \ i_1 = \frac{1}{3R}(2E_1 - E_0 - E_2) \ ; \ i_2 = \frac{1}{3R}(2E_2 - E_0 - E_1)$$

- ▷ **Dipôle 2** : $E_2 > E_1$ et $E_2 > E_0$ alors $2E_2 - E_1 - E_0 > 0$: i_2 est positif et donc le dipôle 2 a une puissance fournie positive. Il est générateur.

- ▷ **Dipôle 0** : $E_0 < E_1$ et $E_0 < E_2$ alors $2E_0 - E_1 - E_2 < 0$: i_0 est négatif et donc le dipôle 0 a une puissance fournie négative. Il est récepteur.
- ▷ **Dipôle 1** : on a deux cas possible :
  1. **Comportement générateur** $i_1 > 0$ si $2E_1 - E_0 - E_2 > 0 \Rightarrow E_1 < \dfrac{E_0 + E_2}{2}$.
  2. **Comportement récepteur** $i_1 < 0$ si $2E_1 - E_0 - E_2 < 0 \Rightarrow E_1 < \dfrac{E_0 + E_2}{2}$.

2 Ponts diviseurs et association de résistances

Méthode en DS. Associer des résistances
- ▷ on cherche deux résistances en série ou en parallèle
- ▷ on les fusionne et calcule la résistance équivalente
- ▷ on refait le schéma avec la nouvelle résistance équivalente

A quoi ça sert ? A appliquer des ponts diviseurs (*cf après*) !

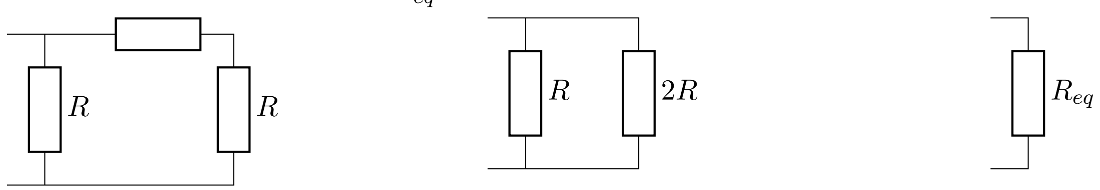
Exercice 4 - Résistances équivalentes :

1. Les deux résistances sont en série : $R_{eq} = 2R$.
2. ▷ deux résistances en série à droite : $R_{eq} = R + R = 2R$

   Attention ! il n'y a pas d'autres résistances en série ou en parallèle !

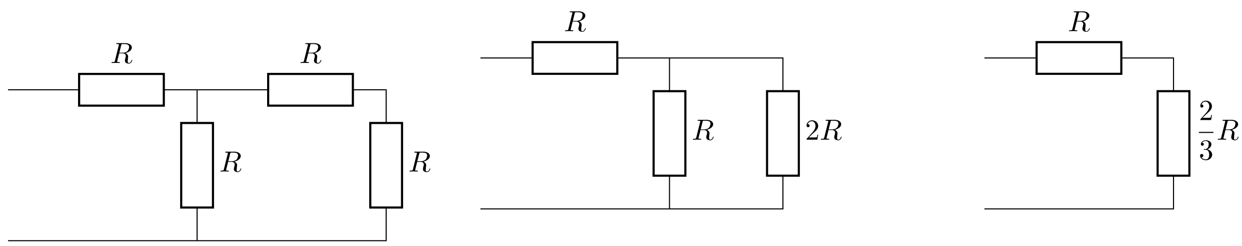
   ▷ on a alors deux résistances en parallèles

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{2}{3}R$$



3. ▷ on reprend à peu près la même configuration qu'avant

   ▷ à la fin on a deux résistance en série : $R_{eq} = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$

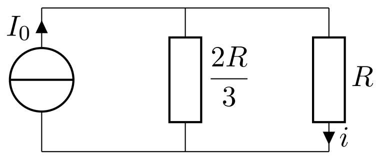


Méthode en DS. Appliquer un pont diviseur de tension
Pour appliquer un pont diviseur de tension :
- ▷ on associe des résistances jusqu'à faire apparaître la configuration du pont diviseur
  Attention ! à ne pas détruire La ou les tensions qu'on souhaite relier !
- ▷ on applique le pont diviseur de tension

Exercice 5 - Pont diviseur de courant :

En associant les deux résistances "du milieu" on obtient le circuit à gauche. Un pont diviseur de courant donne :

$$i = \frac{2/3R}{R + \frac{2}{3}R} I_0 = \frac{2}{5} I_0$$

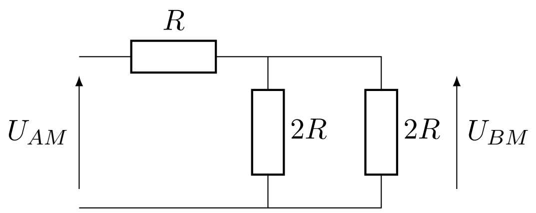


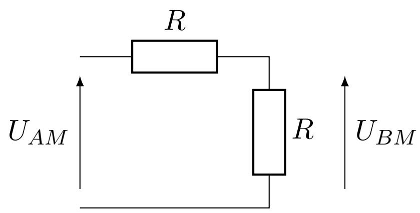
Exercice 6 - Double ponts diviseurs :

Attention ! Configuration importante à bien maîtriser !!

Dans cette configuration, l'objectif est de déterminer U_{BM} en fonction de E.

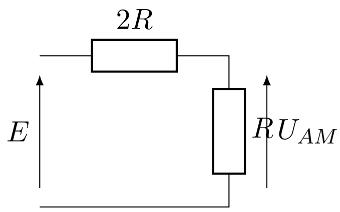
1. On ne peut pas utiliser un pont diviseur entre U_{BM} et E car nous ne sommes pas dans la configuration d'un pont diviseurs de tension. De plus en associant des résistances pour y parvenir on perdrait U_{BM}.
2. Sur la partie de droite du circuit on a :





On a alors un pont diviseur de tension : $U_{BM} = \frac{R}{R+R} U_{AM} = \frac{1}{2} U_{AM}$.

En associant toutes les résistances à droites de U_{AM} on obtient la configuration suivante d'un pont diviseur de tension :



Soit $U_{AM} = \frac{R}{R+2R} E = \frac{E}{R}$.
Finalement $U_{BM} = E/6$.

Exercice 7 - Loi d'Ohm :

Correction rapide et sans schéma : ***ce n'est pas une réponse de copie !!***

1. On prend bien le temps d'associer
   - ▷ $R_1 \leftrightarrow R_2$ en série ; $R_4 \leftrightarrow R_5$ en série ; $R_4 \leftrightarrow R_7$ en parallèle
   - ▷ $R_{12} \leftrightarrow R_3 \leftrightarrow R_{45}$ en parallèle pour obtenir une résitance équivalente au bloc de gauche R_{gauche}
   - ▷ $R_{gauche} \leftrightarrow R_{67}$ en série
2.
   - ▷ on associe R_{12} avec R_3 ainsi que R_4 avec R_5 pour réaliser un pont diviseur de courant
   - ▷ un pont diviseur de courant donne immédiatement i_6 et i_7 dans le bloc de gauche.
     Attention ! c'est bien le courant i qui aliment R_6 et R_7 !! Le courant ne "disparaît pas" à la traversée de résistances.

3. On fait un pont diviseur de tension entre R_{gauche} et R_{67}.

Exercice 8 - Calcul de grandeurs électrique :

Si on n'est propre, cela ne pose aucun problème. **Attention !** *au double pont diviseur en (d) !*

3 Exercices complets

Exercice 9 - Pont de Wheastone : 1. On remarque qu'on peut appliquer un pont diviseur de tension avec :

- les résistances R_1 et R_2 : $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}E$
- les résistances R_3 et R_4 : $U_3 = \frac{R_3}{R_3 + R_4}E$.

2. Par une loi des mailles : $U_{AB} + U_1 - U_3 = 0$.
3. On a alors, lorsque le pont est équilibré : $U_1 = U_3$ soit :

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

4. Notre calcul a été mené dans le cas où aucun courant ne circule entre A et B (ainsi R_1/R_2 et R_3/R_4 sont en série). En branchant un ampèremètre entre les deux, on introduit une résistance r et donc les dipôle ne sont plus en série. Notre calcule ne marche plus ... sauf si le courant dans l'ampèremètre est nul !
En effet dans ce cas là, les résistances sont de nouveaux parcourues par le,même courant : elles sont en série. La valeur de la résistance interne ne joue alors aucun rôle (*et c'est fait exprès, c'est une méthode très efficace de mesure de R !*).

Exercice 10 - Modèle de Thévenin :

Attention ! *ici le deux résistances R_1 et R_2 ne sont pas en série car il existe un noeud entre les deux ! On ne peut donc ni faire d'association de résistances ni pont diviseur. On repart à "l'ancienne" : loi des mailles/noeuds et loi d'Ohm !*

Le modèle de Thévenin c'est écrire la tension d'un générateur comme : $U = E_{th} - R_{eq}I$ avec I l'intensité débitée. On cherche ici E_{th} et R_{eq}.
On appelle U_1 la tension aux bornes de R_1 et i_1/i_2 les courants (convention récepteur) circulant dans R_1/R_2.

- **loi des mailles** : $E = U_1 + U$
- **Loi des noeuds** : $i_1 = I + i_2$
- **Loi d'Ohm** $U_1 = R_1 i_1$ et $U = R_2 i_2$

On a alors : $E = R_1 i_1 + U = R_1(I + i_2) + U = R_1 I + R_1 \frac{U}{R_2} + U$.

On a alors

$$E = R_1 I + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) U \quad \text{soit} \quad U = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}_{E_{th}} - \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}_{R_{eq}} U$$

Chap V

Les circuits linéaires du premier ordre

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ Propriété de continuité des tensions et intensités d'un condensateur et d'une bobine.
- ♡ Notion d'équation différentielle et vocabulaire associé (linéaire, ordre, coefficient constant, équation homogène, ...)
- ♡ Forme générale des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant

Savoir Faire

Obtenir l'équation différentielle d'un circuit électrique

Obtenir les valeurs des grandeurs électriques d'un circuit à l'instant initial

Définir le temps caractéristique d'une équation d'ordre 1

Trouver la fonction solution d'un problème défini par :
- *une équation différentielle d'ordre 1*
- *des conditions initiales*

- *A partir d'une équation électrique ⇒ obtenir un bilan de puissance*
- *A partir d'un bilan de puissance ⇒ réaliser un bilan d'énergie*
- *Analyser les pertes éventuelles par effet Joule*

Un système linéaire du premier ordre est un système physique décrit par **une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants**. Nous allons étudier en détail les systèmes électriques de type.
Leurs résultats et les méthodes de résolution se généralisent aisément à tous les systèmes décrits par des équations différentielles similaires.

1 Charge d'un condensateur

1.1 Mise en évidence expérimentale de la charge et la décharge d'un condensateur

Expérience 1 : *Charge et décharge d'un condensateur.*

On réalise le montage électrique ci-contre :
- ▷ la tension $E(t)$ est une fonction créneau périodique ;
- ▷ R est une résistance variable ;
- ▷ $U_C(t)$ est la tension aux bornes du condensateur ;
- ▷ le condensateur C est initialement déchargé.

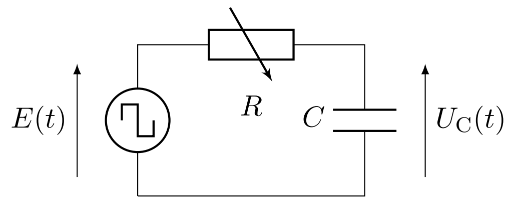


Fig. 1 – Schéma électrique du circuit RC.

On observe à l'oscilloscope simultanément la tension $E(t)$ et la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$. Les oscillogrammes observés sont reproduits qualitativement figure 2 pour deux valeurs de résistance.

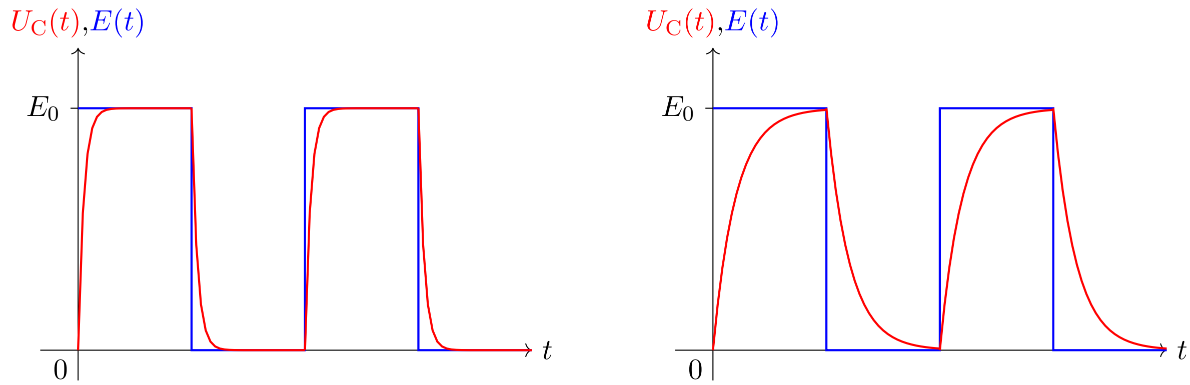


Fig. 2 – Représentation de deux oscillogrammes du circuit de la figure 1. Pour l'oscillogramme de gauche, la résistance R est plus faible que pour celui de droite.

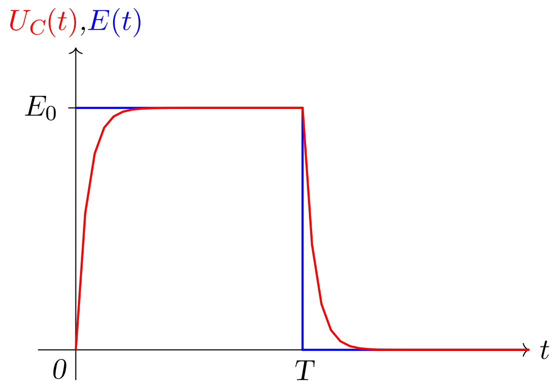
On observe :
- ▷ au bout d'un certain temps, la tension aux bornes du condensateur est identique à celle imposée par la tension d'entrée ;
- ▷ ce temps est plus faible lorsque la résistance diminue.

Lorsque la tension aux bornes du condensateur est constante, la charge électrique $q(t)$ sur ses armatures est constante grâce à la relation $q(t) = CU_C(t)$.
Ainsi, on dit que le condensateur est **chargé**.

Définition. Régime libre et réponse indicielle

- ▷ **Régime libre** : l'évolution d'un circuit électrique en l'absence de source.
- ▷ **Réponse indicielle ou à un échelon** : l'évolution d'un circuit lorsque on applique au circuit un échelon de tension.

Exemple 1 : *Dans notre exemple :*



- *Régime libre : cela correspond à l'évolution du circuit lorsque la tension du générateur passe de $E_0 \to 0$.*
- *Réponse indicielle : cela correspond à l'évolution du circuit lorsque la tension du générateur passe de $0 \to E_0$.*

1.2 Position du problème : Étude de la réponse indicielle

Pour étudier la situation expérimentale réalisée précédemment, on étudie théoriquement le montage électrique ci-contre :

- la tension E_0 est une fonction constante ;
- l'interrupteur, initialement ouvert, est fermé au temps $t = 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

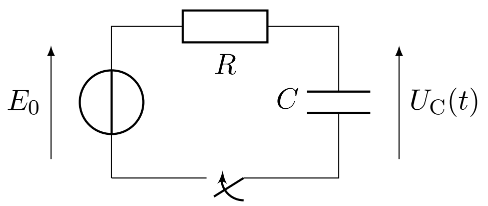


Fig. 3 – Schéma électrique de la charge du condensateur.

1.3 Mise en équation électrique

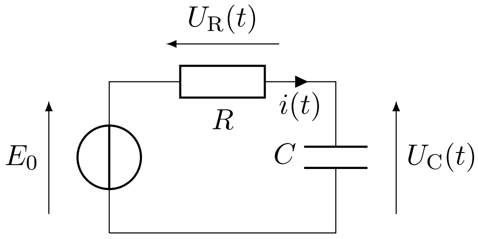
Dans ce paragraphe, et plus généralement pour tout problème électrique ayant des variations temporelles, on procédera en utilisant la méthode suivante.

Méthode pour obtenir une équation électrique :

1. **Définitions des grandeurs électriques**
   faire figurer et nommer toutes les tensions et tous les courants sur le schéma
   Attention ! aux conventions récepteurs ou générateurs
2. **Relation des dipôles**
   écrire toutes les relations constitutives des dipôles, numéroter les équations ;
   Attention ! on les écrit avec le nom des tensions/intensité introduits précédemment
3. **Equations électriques**
   écrire toutes les lois des mailles et lois des nœuds indépendantes du problème, numéroter les équations ;
4. **Initialisation**
   parmi les relations lois des mailles ou lois des nœuds, choisir celle qui contient le terme dont on cherche l'évolution ;
5. **Moulinage METHODIQUE**
   réutiliser chacune des équations précédentes pour modifier un des termes - si cette opération n'est pas possible, dériver les relations des dipôles ou la longue relation puis retenter l'opération ;

Appliquons cette méthode !

1. **Définitions des grandeurs électriques**
Sur le circuit de la figure 1, il manque la tension aux bornes de la résistance (en convention récepteur) et le courant électrique que l'on rajoute sur le schéma.
Attention ! On utilise des noms explicites ! !



2. **Relation des dipôles**
On écrit les relations des deux dipôles. D'abord la loi d'Ohm

$$U_R(t) = Ri(t) \ ; \tag{1.1}$$

puis la relation fondamentale du condensateur que l'on dérive immédiatement

$$q(t) = CU_C(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = i(t) = C\frac{\mathrm{d}U_C(t)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{1.2}$$

> ***Remarque :*** *Pour un condensateur, on utilise toujours la relation entre le courant et la dérivée de la tension. La relation entre la charge et la tension n'est jamais utile lors d'une mise en équation électrique.*

Attention ! Toutes ces relations sont vraies uniquement si les tension aux bornes de la résistance et du générateur sont en convention récepteurs ! !

3. **Equations électriques**
Le circuit est constitué d'une seule maille et d'aucun nœuds. On applique la loi des mailles et il vient

$$E_0 = U_C(t) + U_R(t) \ . \tag{1.3}$$

4. **Initialisation**
On repart de la loi des mailles :

$$E_0 = U_C(t) + U_R(t)$$

5. **Moulinage METHODIQUE**
on remplace la tension $U_R(t)$ en utilisant la relation (1.1), il vient

$$E_0 = U_C(t) + Ri(t) \ . \tag{1.4}$$

On remplace le courant à l'aide de la relation (1.2), il vient

$$E_0 = U_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}U_C(t)}{\mathrm{d}t} \ .$$

6. **Forme canonique**
On réécrit l'équation différentielle pour avoir un coefficient 1 devant le terme avec la dérivée la plus haute et il vient au final **l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** électrique de la charge d'un condensateur

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}U_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{E}{RC}} \ . \tag{1.5}$$

La fonction U_C est la fonction inconnue.

2 Equation différentielle linéaire à coefficient constant

2.1 Definition et vocabulaire

▶ Introduction

L'étude physique que nous avons mené à conduit à l'équation suivante :

$$E_0 = U_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}U_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

Cette relation fait intervenir la fonction U_C du temps et ses dérivées successives. Elle porte le nom d'**équation différentielle**. L'inconnue (*i.e.* ce qu'on cherche) est **une fonction** (ici du temps t), et non un simple nombre.

Attention ! Si on cherche la tension U_C la réponse n'est donc JAMAIS :

$$U_C(t) = E - RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$

comme dans le cas d'une équation algébrique du type : $ax + b = 0$.

Attention ! Il est courant de ne pas préciser la variable temporelle dans les équations. On note U_C plutôt que $U_C(t)$

▶ Un peu de vocabulaire

Cette équation est une équation :
- ▷ différentielle : elle fait intervenir une fonction et ses dérivée
- ▷ linéaire : la fonction inconnue ainsi que ses dérivée sont à la puissance 1
- ▷ à coefficient constant : les coefficient devant U_C et ses dérivées sont des nombres constants.
- ▷ d'ordre 1 : la dérivée la plus haute est $\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$.

  Il n'y a pas de $\dfrac{\mathrm{d}^2U_C}{_ddt^2}$, ...

On la notera EDLCC d'ordre 1.

Définition. Forme canonique
Une équation différentielle est dite sous forme canonique lorsque le coefficient devant la dérivée la plus haute est 1.

> *Exemple 2 :*
> - ▷ $\dfrac{dU_C}{dt}(t) + \dfrac{1}{RC}U_C(t) = \dfrac{E}{RC}$: *OUI*
> - ▷ $U_C(t) = E - RC\dfrac{dU_C}{dt}(t)$: *NON*

Convention d'écriture :
Par habitude, on écrit généralement tous les termes faisant intervenir la fonction inconnues et ses dérivées à gauche de l'égalité.
On appelle membre de droite, le ou les termes ne faisant intervenir ni la fonction recherchée ni ses dérivées.

Définition. Equation homogène
L'équation homogène, associée à une équation différentielle, est la même équation mais en prenant le membre de droite égal à zéro.

Exemple 3 : Ici : $\frac{dU_C}{dt}(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = 0$

2.2 Méthode de résolution

Propriété. Décomposition de la solution
La solution u d'une équation différentielle linéaire s'écrit toujours comme la somme de deux termes :

$$U = U_P + U_H$$

avec :
- ▷ U_P **UNE solution particulière**
- ▷ U_H **LA forme générale** des solution de **l'équation homogène**

▶ Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire

Attention ! Outil indispensable !

Méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants (EDLCC) :

1. **écrire l'équation différentielle sous forme canonique**
   On pensera à introduire des constante pertinente (τ, ω_0, Q, ...)

2. **décomposer la fonction solution de l'équation différentielle** en :
   - ▷ UNE solution particulière (indice P)
   - ▷ LA forme générale des solution de l'équation homogène, (indice H)

3. **trouver la solution particulière**
   On la cherchera le plus souvent sous forme d'une fonction constante qui est solution de l'équation différentielle.

4. **donner la forme générale des solutions de l'équation homogène.**
   Ces formes générales sont des résultats mathématiques qu'on admettra par coeur en physique.
   Elle devra faire apparaître une ou plusieurs constantes inconnues.
5. **écrire la solution du problème comme la somme des deux**
6. **Appliquer les conditions initiales** pour trouver les constantes inconnues.

2.3 Application à la charge du condensateur

Reprenons le problème de la charge du condensateur. L'étude physique nous avait fourni l'équation :

$$E_0 = U_\mathrm{C}(t) + RC\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} \,.$$

1. **Forme canonique et introduction des constantes**

$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U_\mathrm{C}(t) = \frac{E}{RC} \,.$$

Pour une EDLCC d'ordre 1, on définit la **constante de temps** τ du système comme l'inverse du coefficient devant la fonction dans l'équation différentielle.
Ici : $\tau = RC$ et l'équation différentielle donne :

$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U_\mathrm{C}(t) = \frac{E}{\tau} \,.$$

Intérêt pratique de τ :
- ▹ toutes les EDLCC d'ordre 1 auront la même équation homogène :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f = 0$$

et donc la même solution homogène.
La spécificité du problème est comprise dans le coefficient τ.
- ▹ le temps τ donne une échelle de temps pour le problème. On l'appelle aussi le **temps caractéristique**. Les variations de la fonction se fera sur un intervalle entre 0 et 5τ.

2. **Décomposition :**

$$U_\mathrm{C}(t) = U_{\mathrm{C},P}(t) + U_{\mathrm{C},H}(t)$$

Attention ! Cette étape peut paraître anodine mais elle permet de ne pas oublier l'une des deux partie de la solution.
De plus cela permet de ne pas faire d'erreur bête, ce qui arrive en DS.

3. **Solution particulière**
On va cherche la solution $U_{\mathrm{C},P}$ sous la forme d'une constante : $U_{\mathrm{C},P}(t) = K$.
L'intérêt est que $\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C},P}}{\mathrm{d}t} = 0$. L'équation se réduit alors à :

$$\frac{1}{\tau}K = \frac{E}{\tau} \text{ donc } K = E$$

Une solution particulière est donc : $U_{\mathrm{C},P}(t) = E$.

Attention ! à la distinction **inconnue** et **constante du problème**!!
- ▹ E est une constante du problème.
Elle est introduite dans l'énoncé et sa valeur c'est une donnée même si on se connaît pas sa valeur numérique.
- ▹ K est une inconnue. Elle n'est pas introduite dans l'énoncé et on a pu lui affecter une valeur.

Astuce pratique : si une grandeur est introduite par vos soin, c'est généralement une inconnue.
On peut donner à une inconnue n'importe quel nom alors que le nom d'une constante est donné dans l'énoncé.

4. **Solution homogène**
On écrit l'équation homogène associée :

$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U_\mathrm{C}(t) = 0$$

Propriété. Forme générale des solution homogène d'une EDLCC d'ordre 1
Les solutions de l'équation différentielles :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = 0$$

sont de la forme

$$f(t) = A\exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$$

avec A une constante inconnue.

On a ici : $U_{\mathrm{C},H} = A\exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] = A\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$

| ***Remarque :*** *On peut conserver la forme avec* τ.

5. **Solution du problème et conditions initiales**
La tension aux bornes du condensateur est donc :

$$U_{\mathrm{C}} = E + A\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$$

Attention ! Ce n'est pas fini : la constante A est une inconnue qu'il s'agit de trouver !!
On utilise pour cela les **conditions initiales** !

2.4 Condition initiale : valeurs des grandeurs électriques à $t = 0$

Pour résoudre le problème, il est nécessaire de connaître la valeur de la grandeur que l'on cherche à $t = 0$ pour résoudre le problème.
Attention ! La plupart des erreurs découlent de cette partie !

▶ Notion de deux états initiaux à $t = 0$

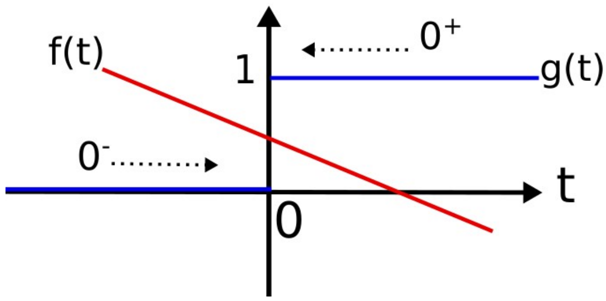
On se place à l'instant initial, à $t = 0$ et on ferme l'interrupteur. L'interrupteur est-il ouvert ou fermé à $t = 0$?
On ne peut pas répondre mais on peut dire que :
- ▷ juste **avant** $t = 0$, l'interrupteur est ouvert
- ▷ juste **après** $t = 0$, l'interrupteur est fermé

On note le premier instant $t = 0^-$ et le second $t = 0^+$.

Distinction $t = 0^-$ et $t = 0^-$

On trace la fonction g qui vaut 0 quand l'interrupteur est ouvert et 1 quand il est fermé.
On remarque que
- ▷ $g(0^-) = 0$
- ▷ $g(0^+) = 1$

la fonction g est discontinue en zéro.



A priori, toutes les grandeurs électriques peuvent être discontinues.

Quel est le problème ?

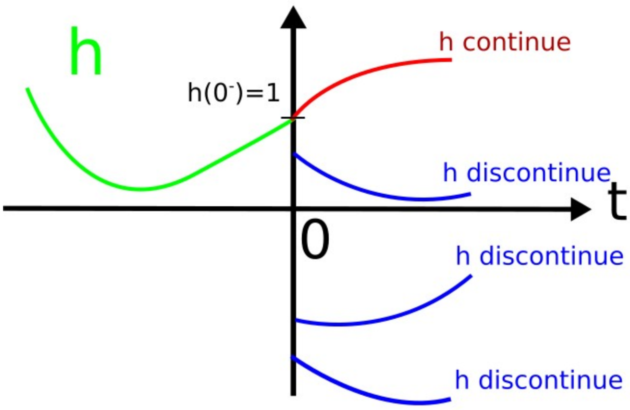
Prenons une fonction h quelconque. Je connais son tracé sur les temps négatifs et notamment $h(t = 0^-) = 1$. Que vaut h en $t = 0^+$?

▷ si h est continue, je peux trouver

$$h(0^+) = h(0^-) = 1$$

▷ si h est discontinue, c'est impossible

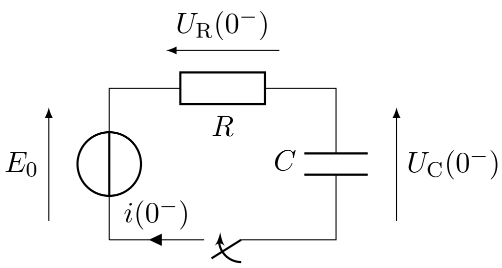
$$h(0^+) = ???$$



- ▷ pour une grandeur continue, je peux directement relié l'état juste avant et l'état juste après
- ▷ pour une grandeur discontinue, je ne peux rien dire sur sa valeur juste après même si je connais sa valeur juste avant

▶ Lien avec le circuit électrique

A $t = 0^-$ on a le circuit suivant :



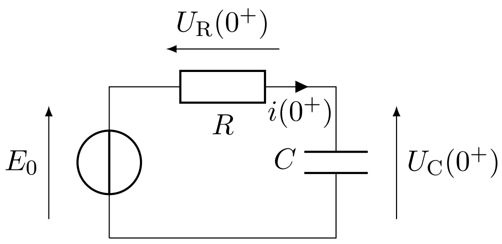
A cet instant, l'interrupteur est ouvert depuis longtemps. Le circuit n'a pas été modifié :

$$i(0^-) = 0$$

$$U_C(0^-) = 0$$

$$U_R(0^-) = 0$$

A $t = 0^+$, l'interrupteur est fermé, on a donc le circuit :



A $t = 0^+$ on a modifié le circuit de façon brutale. On ne peut *a priori* rien dire sur les valeurs des différents grandeurs électriques $i(0^+)$, $U_R(0^+)$ **car on ne saît pas si elles sont continues ou discontinues**.

MAIS on sait que la tension est continue aux bornes d'un condensateur. Donc :

$$U_C(0^+) = U_C(0^-) = 0$$

Attention ! C'est la seule dont on peut trouver ainsi la valeur ! !
Une fois $U_C(0^+)$, on peut utiliser les lois des noeuds et des dipôles pour trouver les autres si nécessaire.

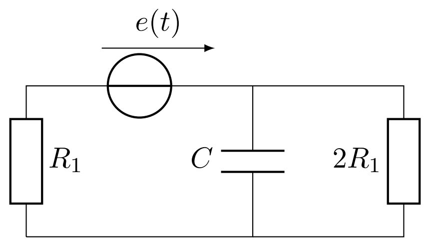
▶ Echelon de tension

Un générateur de tension génère un **échelon de tension** si la tension à ses bornes vaut :
- ▷ 0 pour $t < 0$
- ▷ E_0 pour $t > 0$

La tension aux bornes du générateur est une fonction discontinue si bien que toutes les autres grandeurs électriques du circuit sont a priori discontinue.
On doit alors refaire la même analyse que précédemment.

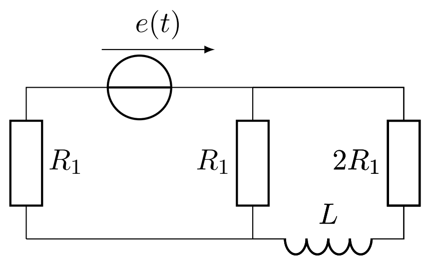
Application 1 : ***Attention ! TRES IMPORTANTE ! !***

Le générateur fournit un échelon de tension $e(t)$: la tension passe de 0 à E_0 à $t = 0$.
Donner toutes les grandeurs électriques du circuit aux instants ;
- ▷ $t = 0^-$
- ▷ $t = 0^+$



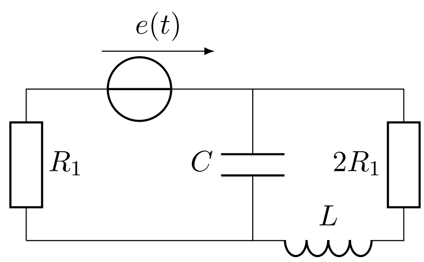
Application 2 : ***Attention ! TRES IMPORTANTE ! !***

Le générateur fournit un échelon de tension $e(t)$: la tension passe de 0 à E_0 à $t = 0$.
Donner toutes les grandeurs électriques du circuit aux instants ;
- ▷ $t = 0^-$
- ▷ $t = 0^+$



Application 3 : ***Attention ! TRES IMPORTANTE ! !***

Le générateur fournit un échelon de tension $e(t)$: la tension passe de 0 à E_0 à $t = 0$.
Donner toutes les grandeurs électriques du circuit aux instants ;
- ▷ $t = 0^-$
- ▷ $t = 0^+$



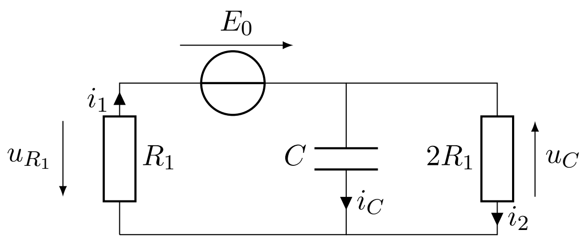
CORRECTION

Valeurs à $t = 0$
Initialement, le générateur est éteint : le circuit n'est pas alimenté, donc toutes les grandeurs électriques sont nulles.

Méthode en DS. Etude de l'état initial
On commence par faire un schéma propre avec **TOUTES** les grandeurs élecctriques apparentes puis on écrit les lois
- des noeuds et des mailles
- les lois d'Ohm
- les relations de continuité (tension d'un condensateur et intensité d'une bobine)

Application 1
On introduit toutes les grandeurs électriques à $t = 0^+$ (*on ne précise pas le temps mais* $i_1 = i_1(0^+)$, $u_C = u_C(0^+)$, *...*).
On remarque que le condensateur C et la résistance $2R_1$ sont en parallèles, on introduit une seule tension.

- **Loi des mailles :** $E_0 + u_C - U_{R_1} = 0$
- **Loi des nœuds :** $i_1 = i_C + i_2$
- **Loi d'Ohm** : $u_{R_1} = R_1 i_1$ et $u_C = 2R_1 i_2$.
- **Relation de continuité :** la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps : $u_C = u_C(0^-) = 0$.

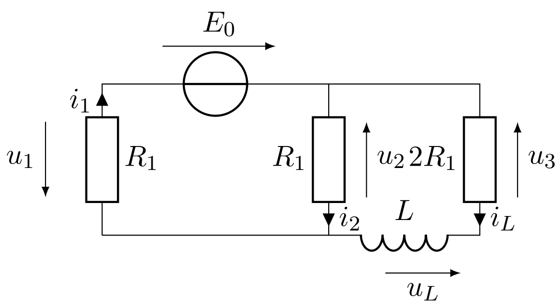


Méthode en DS. Trouver les valeurs initiales des grandeurs électriques
On part des grandeurs données par les relations de continuité (tension d'un condensateur et intensité d'une bobine), et on remonte à partir de ces dernières à toutes les autres grandeurs.

On trouve alors que :
- $u_{R_1} = E_0 + u_C = E_0$ (*loi des mailles*)
- $i_2 = u_C/2R_1 = 0$ (*loi d'Ohm*)
- $i_1 = u_{R_1}/R_1 = E_0/R_1$ (*loi d'Ohm*)
- $i_C = i_1 - i_2 = E_0/R_1$(*loi des nœuds*)

Application 2
On introduit toutes les grandeurs électriques à $t = 0^+$.

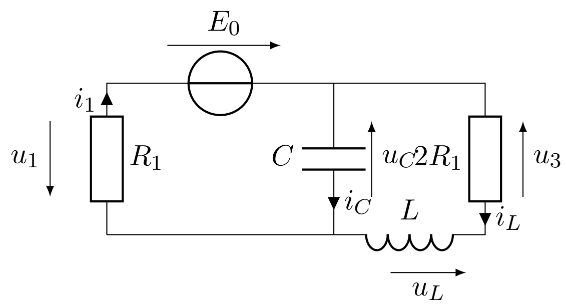
- **Loi des mailles :**
$E_0 - u_2 - u_1 = 0$ et $u_2 - u_3 - u_L = 0$
- **Loi des nœuds :** $i_1 = i_2 + i_L$
- **Loi d'Ohm** : $u_1 = R_1 i_1$; $u_2 = R_1 i_2$ et $u_3 = 2R_1 i_L$
- **Relation de continuité :** l'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps : $i_L = i_L(0^-) = 0$.



On trouve alors que :
- $u_3 = R_3 i_L = 0$ (*loi d'Ohm*)
- $i_1 = i_2$ (*loi des noeuds*)
- $E_0 = R_1 i_2 + R_1 i_1 = 2R_1 i_1$ donc $i_1 = E_0/2R_1$ (*loi d'Ohm+loi des mailles*)
- $u_1 = E_0/2$ et $u_2 = E_0/2$ (*loi d'Ohm*)
- $u_L = u_2 = E_0/2$ (*loi des mailles*)

Application 3

On introduit toutes les grandeurs électriques à $t = 0^+$.



- **Loi des mailles :**
  $E_0 - u_C - u_1 = 0$ et $u_C - u_3 - u_L = 0$
- **Loi des nœuds :** $i_1 = i_C + i_L$
- **Loi d'Ohm** : $u_1 = R_1 i_1$ et $u_3 = 2R_1 i_L$
- **Relation de continuité :**
  l'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps : $i_L = i_L(0^-) = 0$.
  La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps : $u_C = u_C(0^-) = 0$

On trouve alors que :

- $u_3 = R_3 i_L = 0$ *(loi d'Ohm)*
- $i_1 = i_C$ *(loi des noeuds)*
- $E_0 = R_1 i_2 + u_C = R_1 i_1$ donc $i_1 = E_0/R_1$ *(loi d'Ohm+loi des mailles)*
- $u_1 = R_1 E_0/R_1 = E_0$ *(loi d'Ohm)*
- $u_L = u_C - u_3 = 0$ *(loi des mailles)*

▶ Retour sur la charge du condensateur

On a trouvé :

$$\text{a t=0, } U_\mathrm{C}(t)0) = 0$$

Or on sait exprimer également $U_\mathrm{C}(t=0)$ grâce à la formule exprimée précédemment : $U_\mathrm{C}(t=0) = E + A$.

Les deux expressions doivent être vraies, donc $E + A = 0$ soit $A = -E$.

On conclut en encadrant la solution

$$\boxed{U_\mathrm{C}(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))}\,. \tag{2.1}$$

▶ Discussion sur la solution

Pour discuter d'une solution obtenue, quand celle-ci est une fonction, il est très utile de tracer son graphe :

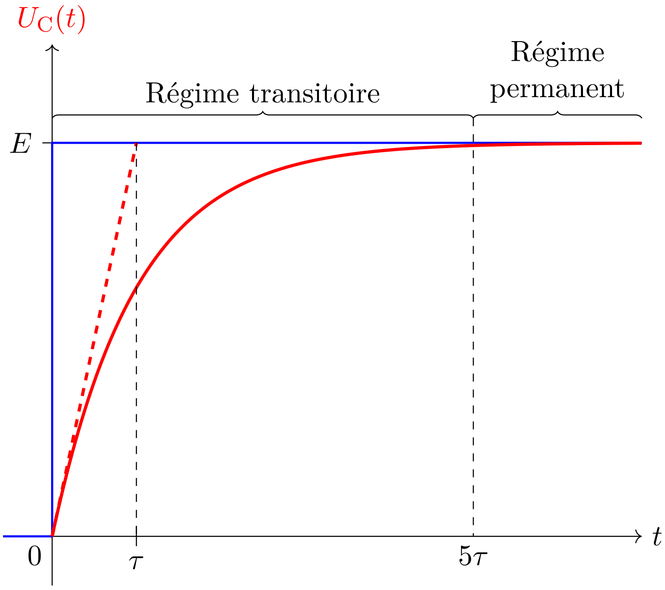


Fig. 4 – À $t = 0$, le générateur fournit une tension E. Le condensateur est initialement déchargé et il se charge au cours du régime transitoire. Pendant le régime permanent, la tension ne varie plus. Il s'agit de la **réponse du condensateur à un échelon de tension**.

Les trois remarques suivantes doivent toujours être tracées sur le graphe :

- ▷ la pente à l'origine croise la solution du régime permanent après un temps τ ;
- ▷ pour le temps $t = \tau$, la fonction a atteint 63 % de sa valeur finale ;
- ▷ après environ 5τ, on admet que la solution est égale à celle du régime permanent. En effet, $\exp(-5) \approx 0.006$ que l'on considère comme nul.

3 Bilans énergétiques

Comme nous l'avons vu, la grandeur que l'on paie à EDF n'est pas la tension mais la puissance électrique. On va s'intéresser ici à la répartition de la puissance électrique dans le circuit, aussi appelé **bilan de puissance**.

3.1 Bilan de puissance

▶ Approche qualitative

Le circuit est composé de trois dipôle : un générateur, une résistance et un condensateur. On peut *a priori* se dire que :

- ▷ le générateur va fournir de la puissance au circuit
- ▷ une partie de cette puissance va être transférée au condensateur
- ▷ le reste est dissipée par effet Joule dans la bobine

Objectif : quelle pourcentage de l'énergie du générateur sert réellement à charger le condensateur ?

▶ Méthode du bilan de puissance

Propriété. Bilan de puissance
Pour obtenir un bilan de puissance sur une mailler fermée, on multiplie une loi des mailles par l'intensité qui la traverse.

Appliquons cette méthode pour le système étudié. Reprenons la loi des mailles :

$$E(t) = U_{\mathrm{C}}(t) + Ri(t) \ .$$

Multiplions cette équation par $i(t)$, l'intensité qui la traverse, il vient

$$E_0 i(t) = U_{\mathrm{C}}(t) i(t) + Ri(t)^2 \ .$$

Attention ! Ici c'est facile mais on prendra garde à bien utiliser l'intensité qui circule dans la maille !

On reconnaît :

- ▷ à droite la puissance fournie par le générateur car il est en convention générateur
- ▷ à gauche les puissances reçues par la résistance et le condensateur

On remarque alors qu'il n'y a pas de perte : toute la puissance fournie par le générateur se retrouve dans les dipôle.

Or on sait que $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}$ d'où

$$E_0 i(t) = CU_{\mathrm{C}}(t)\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t)^2 \ .$$

♡*Instant math* ♡ : $f(t) \times f'(t) = (f^2(t)/2)'$

Il vient alors :

$$E_0 i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right) + Ri(t)^2 \ .$$

On reconnaît donc le **bilan de puissance**

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}}(t)} \ . \tag{3.1}$$

Propriété. Conservation de la puissance électrique
Dans un circuit électrique la puissance électrique se conserve.

► **Interprétation**

A chaque instant t :

▷ le générateur fournit une puissance $\mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t) = Ei(t) > 0$.
C'est cette puissance qu'on paie à EDF.

▷ le condensateur reçoit une partie de cette puissance électrique qu'il transforme en énergie électrostatique.

▷ le reste de la puissance est dissipée par effet Joule : le circuit chauffe.
C'est le terme de perte.

Propriété. Lors de la charge du condensateur, de l'énergie est stockée dans celui-ci. L'énergie électrostatique augmente : le condensateur a un caractère récepteur.

Le bilan de puissance nous indique ce qu'on doit payer à chaque instant. Pour savoir ce qu'on devra payer en tout, il faut réaliser un bilan d'énergie.

3.2 Bilan d'énergie

► **Analogie Energie-Facture**

A chaque instant t, on paie à EDF une quantité proportionnelle à la puissance fournie par le générateur. A la fin de la manipulation, ce qu'on va payer à EDF sera égale à :

▷ ce qu'on lui doit à $t = 0s$ $Ei(t = 0.1)$

▷ plus ce qu'on lui doit à $t = 0.1$s : $+Ei(t = 0.2)$

▷ plus ce qu'on lui doit à $t = 0.2$s : $+Ei(t = 0.3)$

▷ ...

Autrement dit, on doit à EDF à la fin de la charge du condensateur :

$$Ei(t = 0.1) + Ei(t = 0.2) + Ei(t = 0.3) + Ei(t = 0.4) + ... = \sum Ei(t)$$

En physique, une somme infini est une intégrale. On devra à EDF une quantité égale à :

$$\int_{t=0}^{\infty} Ei(t)\mathrm{d}t$$

Cette grandeur, argent mis à part, est ce qu'on appelle l'énergie.

Propriété. Puissance et énergie d'un dipôle
Un dipôle traversé par une intensité $i(t)$ et soumis à une tension $u(t)$ en convention récepteur reçoit une puissance électrique :

$$\mathcal{P}_{reçue} = u(t)i(t)$$

Entre deux instant t_1 et t_2, le dipôle reçoit une énergie :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\mathrm{d}t$$

On a donc le lien entre puissance et énergie électrique :

$$E = \int \mathcal{P}\mathrm{d}t \text{ ou } \mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Attention ! $\mathcal{P}$ est en Watt(W) et E est en Joule (J)

► Bilan d'énergie

On calcule les différentes énergies.

▷ **Énergie du condensateur**

L'énergie stockée dans le condensateur est la plus simple à calculer, en effet, on sait que la puissance vaut en chaque instant

$$\mathcal{P}_{\mathrm{C}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right]$$

Donc

$$E_C = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_C \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right]$$

On simplifiera les notations en mettant $\int_0^{+\infty}$.

$$E_C = \left[\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right]_0^{\infty}$$

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 - 0$$

L'énergie du condensateur est initialement nulle car il est déchargé.

On a une énergie finale stockée $\boxed{E_{\mathrm{C,finale}} = \frac{1}{2}CE^2}$.

▷ **Énergie fournie par le générateur**

L'énergie fournie par le générateur vaut

$$E_G = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t)$$

soit en calculant

$$E_G = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ E_0 i(t) = E_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ i(t)$$

Pour continuer le calcul, il faut connaître $i(t)$ l'intensité qui circule dans le circuit. On sait que : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$.

$$E_G = EC \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} = EC\left[U_{\mathrm{C}}(t)\right]_0^{+\infty}\ ;$$

$$E_{\text{fournie}} = CE(E - 0)$$

et donc

$$\boxed{E_{\text{fournie}} = CE^2}$$

▷ **Effet Joule**

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joule

$$E_{\mathrm{J}} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathcal{P}_{\mathrm{J}}(t)$$

En intégrant le bilan de puissance entre $t = 0$ et $t = +\infty$, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{\mathrm{J}}(t)$$

On reconnaît les différent terme précédents

$$E_{\mathrm{J}} = E_{\text{fournie}} - E_{\mathrm{C,finale}} = \frac{1}{2}CE_0^2$$

Propriété. Bilan d'énergie
Pour obtenir un bilan d'énergie, on intègre le bilan de puissance.

> ***Application 4 :*** *On peut retrouver l'énergie dissipée par effet Joule par un calcul direct. Pour cela :*
> 1. *exprimer l'intensité du courant électrique $i(t)$ qui circule dans la maille en fonction de E, R et C*
>   *Astuce : on se servira de $U_C(t)$ trouvée et de la relation du condensateur*
> 2. *calculer $E_J = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_J(t)dt$ à l'aide de l'expression de $i(t)$ trouvée précédemment.*

On remarque qu'exactement la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée sous forme de chaleur dans la résistance. Cette dissipation est intrinsèque à la charge du condensateur et ne dépend pas de la valeur de celui-ci. La valeur de C modifie juste la constante de temps du processus, donc sa vitesse.

Propriété. Charger un condensateur est un processus qui provoque irrémédiablement la perte de la moitié de l'énergie fournie.

4 Application

4.1 La décharge du condensateur : Réponse en régime libre

► Position du problème

On étudie cette fois théoriquement le montage électrique ci-contre :
- ▷ l'interrupteur est fermé au temps $t = 0$;
- ▷ le condensateur est initialement chargé à la tension E_0.

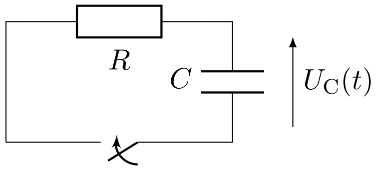


Fig. 5 – Schéma électrique de la décharge du condensateur.

► Mise en équation électrique et résolution de l'équation

Application 5 :

▷ *Sans aucun calcul, prévoir la valeur finale de la tension aux bornes du condensateur.*

▷ *Montrer que la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle*

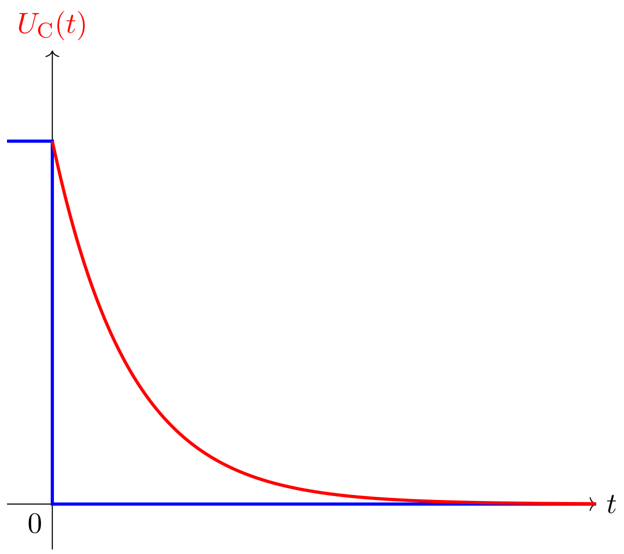
$$\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}U_C(t) = 0$$

avec la constante de temps $\tau = RC$.

▷ *Ensuite, en utilisant les conditions initiales et les propriétés du condensateur, montrez que*

$$U_C(t) = E_0 \exp(-t/\tau)\ .$$

▷*Cette fonction est tracée ce dessous. Préciser :*
- ▷ *Régime transitoire/Régime permanent*
- ▷ *Pente à l'origine*
- ▷ *sur l'axe des temps : τ et 5τ*



► Bilan énergétique

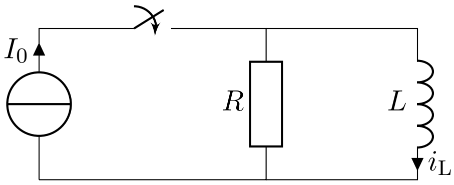
Application 6 : Réaliser un bilan de puissance et montrer que le condensateur a un caractère générateur. Calculer ensuite l'énergie dissipée dans la résistance.

4.2 Établissement d'un courant dans une inductance

En réutilisant les outils élaborés dans la première partie du chapitre, nous allons traiter un autre exemple impliquant une bobine.

▶ Présentation du problème

Étudions le circuit de la figure suivante. On s'intéresse à l'évolution du courant $i_{\mathrm{L}}(t)$ dans la bobine.



Un générateur de courant fournit le courant fixe I_0. Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert. On le ferme à $t = 0$.

▶ Conditions initiales

- ▷ Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et un régime permanent est atteint, la bobine se comporte donc comme un fil et : $i_{\mathrm{L}}(t < 0) = 0$. On a notamment :

$$i_{\mathrm{L}}(t = 0^-) = 0.$$

- ▷ A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
  A $t = 0^+$, l'interrupteur est fermé. On ne peut *a priori* rien dire sur les valeurs des différentes grandeurs électriques du circuit SAUF :

  L'intensité qui traverse une bobine est une fonction continue.

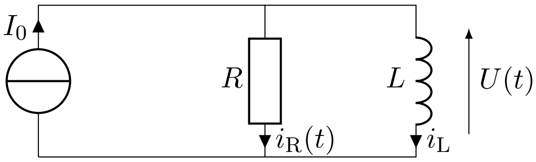
  Attention ! l'intensité pas la tension.
  - ▷ Bobine : intensité continue
  - ▷ Condensateur : tension continue

  Par conséquent : $i_{\mathrm{L}}(t = 0^+) = i_{\mathrm{L}}(t = 0^-) = 0$.

Le courant parcourant une bobine est une fonction continue, il va donc passer continument de 0 à sa valeur finale.

▶ Mise en équation électrique

Reproduisons d'abord la figure avec toutes les notations électriques nécessaires une fois l'interrupteur fermé.



La résistance vérifie la loi d'Ohm

$$U(t) = Ri_{\mathrm{R}}(t) \tag{4.1}$$

et la relation fondamentale de la bobine indique

$$U(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} . \tag{4.2}$$

La loi des nœuds implique

$$I_0 = i_{\mathrm{R}}(t) + i_{\mathrm{L}}(t) . \tag{4.3}$$

Dans cette équation, on remplace $i_{\mathrm{R}}(t)$ par $U(t)/R$ et il vient

$$I_0 = \frac{1}{R}U(t) + i_{\mathrm{L}}(t) .$$

Ensuite, on remplace la tension $U(t)$ par son expression et il vient

$$I_0 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + i_\mathrm{L}(t) \ .$$

La dernière étape consiste à mettre l'équation différentielle sous forme canonique et il vient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} i_\mathrm{L}(t) = \frac{R}{L} I_0} \ . \tag{4.4}$$

De cette équation, on constate que le portait de phase de l'établissement du courant dans la bobine est le même que celui de la charge du condensateur.

► **Résolution**

▷ **Définition de la constante de temps τ**

On pose la constante de temps $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ et l'équation différentielle (4.4) s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i_\mathrm{L}(t) = \frac{1}{\tau} I_0 \ .$$

▷ **Solution générale de l'équation homogène** :

$$i_1(t) = C \exp(-t/\tau)$$

avec C une constante.

▷ **Solution particulière :**

Cette équation est à second membre constant constant. On pose $i_2(t) = K$ cette constante. On injecte cette solution dans l'équation. La dérivée d'une constante est nulle et on a donc

$$i_2(t) = I_0 \ .$$

▷ **Solution de l'équation différentielle :**

$$i_\mathrm{L}(t) = i_1(t) + i_2(t) = C \exp(-t/\tau) + I_0 \ .$$

▷ **Conditions initiales :**

on utilise le fait que **le courant à travers une bobine est une fonction continue du temps**, et donc $0 = i_\mathrm{L}(0^-) = i_\mathrm{L}(0^+) = i_\mathrm{L}(0)$. On utilise cette condition dans la solution générale et $0 = C + I_0$ soit $C = -I_0$.

▷ **Solution et tracé de graphe**

La solution finale de cette équation est

$$\boxed{i_\mathrm{L}(t) = I_0(1 - \exp(-t/\tau))} \ . \tag{4.5}$$

On remarque que l'on retrouve bien les comportements qualitatifs du paragraphe **??**.

▷ On peut tracer la solution sur un graphique figure 6.

► **Aspects énergétiques**

À nouveau, reprenons la méthode.

Réécrivons donc la loi des nœuds :

$$I_0 = i_\mathrm{R}(t) + i_\mathrm{L}(t)$$

qu'il faut multiplier par la tension pour obtenir

$$I_0 U(t) = i_\mathrm{R}(t) U(t) + i_\mathrm{L}(t) U(t) \ .$$

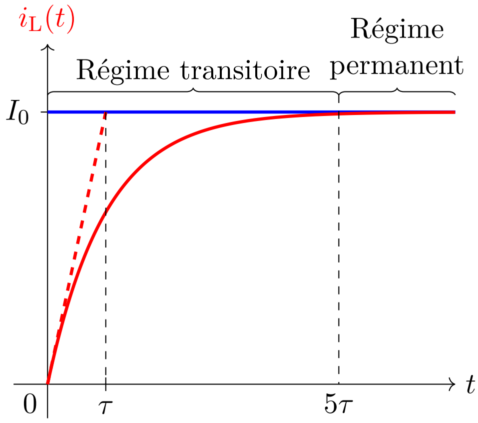


Fig. 6 – À $t = 0$, le générateur fournit le courant I_0. Le courant dans la bobine est initialement nul et il s'établit au cours du régime transitoire. Pendant le régime permanent, le courant ne varie plus.

Utilisons maintenant les liens entre tensions et courant données par les relations des dipôles. Il vient

$$I_0 U(t) = R i_\mathrm{R}(t)^2 + L i_\mathrm{L}(t) \frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} \, .$$

On reconnaît $L i_\mathrm{L}(t) \dfrac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2} L i_\mathrm{L}^2(t)\right)$.

On reconnaît donc au final

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{G}(t) = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}(t)} \tag{4.6}$$

avec $E_\mathrm{L}(t)$ l'énergie magnétique stockée dans la bobine et $\mathcal{P}_\mathrm{J}(t)$ la puissance stockée par effet Joule.

La puissance fournie par le générateur est donc en partie transférée sous forme énergie stockée dans la bobine et en partie dissipée par effet Joule dans la résistance du circuit.

On peut alors calculer les différents termes énergétiques.

▷ L'énergie stockée dans la bobine vaut

$$E_\mathrm{L,stockée} = E_\mathrm{L}(t = +\infty) - E_\mathrm{L}(0) = \frac{1}{2} L I_0^2 \, .$$

▷ L'énergie fournie par le générateur vaut

$$E_\mathrm{G} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \; I_0 U(t) = I_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \; L \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L I_0 \left[i_\mathrm{C}(t)\right]_0^{+\infty} = L I_0^2 \, .$$

▷ L'énergie dissipée par la résistance vaut, en utilisant le bilan de puissance,

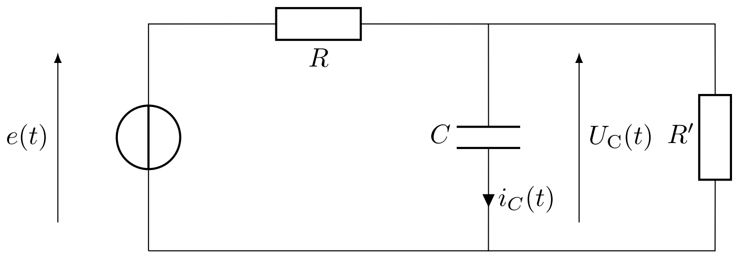
$$E_\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \; \mathcal{P}_\mathrm{J}(t) = E_\mathrm{G} - E_\mathrm{L,stockée} = \frac{1}{2} L I_0^2 \, .$$

À nouveau, de façon intrinsèque au phénomène de stockage de l'énergie, la moitié de l'énergie fournie est perdue par effet Joule.

Circuit à deux mailles

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

On étudie le circuit suivant :



Le générateur de tension fournit une tension $e(t)$ créneaux : $e(t<0)=0$ et $e(t>0)=E_0$. Le condensateur est initialement déchargé.

1. Montrer que la tension u_C aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle suivante :

$$E_0 = \left(1+\frac{R}{R'}\right)u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

2. Introduire la constante de temps τ.
3. Montrer, en le justifiant, que $u_C(t=0^+)=0$ et $i_C(t=0^+)=E_0/R$.
4. Montrer que l'expression de $u_C(t)$ pour tout temps t est :

$$u_C(t) = \frac{E_0}{1+R/R'}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

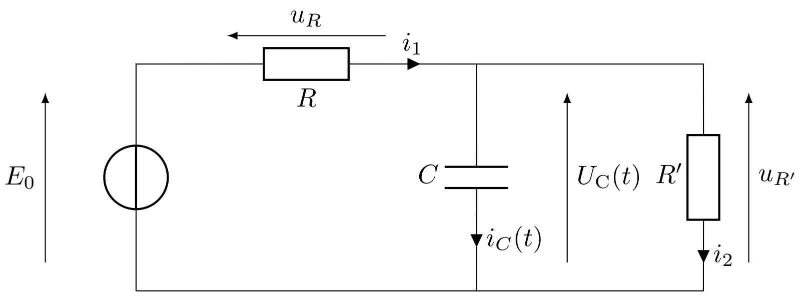
5. Justifier sans calcul que le condensateur a un comportement récepteur.
6. En déduire l'expression du courant $i_C(t)$.
7. Donner la charge totale Q_∞ sur le condensateur en fin de charge.
8. (*Option*) Reprendre la question 4 (**Attention !** le résultat de la Q3 n'est plus vrai) mais le condensateur est désormais chargé avec une tension U_0.
9. (*Option*) En faisant le minimum de calcul possible, donner le comportement du condensateur. On distinguera deux cas suivant le rapport de U_0/E_0.

Circuit à deux mailles

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

1. **Attention !** *on applique pas-à-pas la méthode pour trouver les équations différentielles des circuits!!!*

   ▷ **i) Définition des grandeurs électriques**
   Attention ! on met **tous les dipôles** en convention récepteur, sauf les générateurs!



   ▷ **ii) Lois $u - i$ des dipôles**
   - ▷ Résistance R : $u_R = Ri_1$
   - ▷ Condensateur C : $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$
   - ▷ Résistance R' : $u_{R'} = R'i_2$

   ▷ **iii) Équations électriques**
   - ▷ 2 lois des mailles : $E_0 - u_R - U_C = 0$ et $U_C - u_{R'} = 0$ (*on aurait pu dire que C et R' sont en parallèles*)
   - ▷ loi des nœuds : $i_1 = i_C + i_2$

   ▷ **iv) Initialisation et moulinage méthodique**
   on part de la loi des mailles et on remplace les grandeurs électriques qui varie à l'aide des lois écrites ...

$$e(t) - u_R - U_C = 0 \;\Rightarrow\; E_0 = Ri_1 + U_C \;\Rightarrow\; E_0 = R(i_C + i_2) + U_C$$

$$\Rightarrow\; E_0 = RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + R\frac{u_{R'}}{R'} + U_C \;\Rightarrow\; E_0 = RC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{R'}U_C + U_C$$

On retrouve bien

$$E_0 = \left(1 + \frac{R}{R'}\right)u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

2. *On écrira **toujours** l'équation sous forme canonique :* $1 \times \dfrac{d......}{dt}$.

$$\frac{E_0}{RC} = \frac{1 + R/R'}{RC}u_C(t) + \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

On identifie alors $\tau = \dfrac{RC}{1 + R/R'}$

3. La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps donc : $u_C(0^+) = U_C(0^-) = 0$, car le condensateur était initialement déchargé.
   On utilise alors les lois écrites précédemment en $t = 0^+$:
   - ▷ loi des mailles : $u'_R = 0$ et $u_R = e_0$
   - ▷ loi d'Ohm : $i_1 = E_0/R$ et $i_2 = 0$
   - ▷ loi des nœuds : $i_C = i_1 = E_0/R$

4. **Attention !** *on applique pas-à-pas la méthode pour trouver les équations différentielles des circuits!!!*

   ▷ **i) Equation sous forme canonique**

$$\frac{E_0}{RC} = \frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U_C$$

- **ii) Décomposition de la solution**
  $U_C = U_P + \widetilde{U_C}$ avec U_P une solution particulière et $\widetilde{U_C}$ la solution homogène.
- **iii) Solution particulière**
  on la cherche sous la forme d'une constante, $U_P = K$, et on injecte dans l'équation différentielle

$$\frac{E_0}{RC} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{1}{\tau}K \Rightarrow K = \frac{E_0}{RC}\tau = \frac{E_0}{1 + R/R'}$$

- **iv) Solution homogène**
  $\widetilde{U_C} = Ae^{-t/\tau}$
- **v) Solution complète et Condition Initiale**
  Donc $U_C = \dfrac{E_0}{1 + R/R'} + Ae^{-t/\tau}$ avec A une constante d'intégration.
  $\Rightarrow$ **CI :** $U_C(t = 0^+) = 0$ donc $\dfrac{E_0}{R + R'} + A = 0$ soit $A = -\dfrac{E_0}{1 + R/R'}$
  Finalement : $U_C(t) = \dfrac{E_0}{1 + R/R'}\left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)$

5. La tension au bornes du condensateur augmente (*en valeur absolue*) : il se charge, il a donc un comportement récepteur.

6. Pour un condensateur, lien $u - i$: $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{E_0}{1 + R/R'}\dfrac{e^{-t/\tau}}{\tau}$ soit

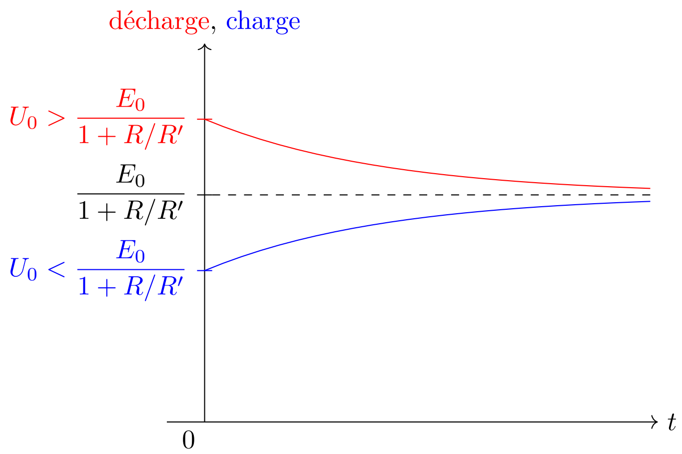
$$i_C(t) = -\frac{E_0}{RC}e^{-t/\tau}$$

7. *Lien charge-tension pour un condensateur : $q = Cu$!!*
   En fin de charge, pour $t = +\infty$, $U_C = \dfrac{E_0}{1 + R/R'}$ donc sa charge est $Q_\infty = C\dfrac{E_0}{1 + R/R'}$.

8. *L'équation différentielle reste vraie tout comme la solution particulière et homogène : seule change les **CI**.*

   CI : $U_C(t = 0^+) = U_0$ donc $\dfrac{E_0}{R + R'} + A = U_0$ soit $A = U_0 - \dfrac{E_0}{1 + R/R'}$
   On a alors : $u_C = \left(U_0 - \dfrac{E_0}{1 + R/R'}\right)e^{-t/\tau} + \dfrac{E_0}{1 + R/R'}$.

9. *Pour s'économiser des calculs, c'est toujours une bonne idée de tracer les graphes des fonctions ...*
   Suivant le signe de $U(t = 0) - U(t = +\infty)$ la fonction sera croissante ou décroissante : il y aura alors charge (comportement récepteur) ou décharge (comportement générateur).



TD05 Circuits linéaires du premier ordre

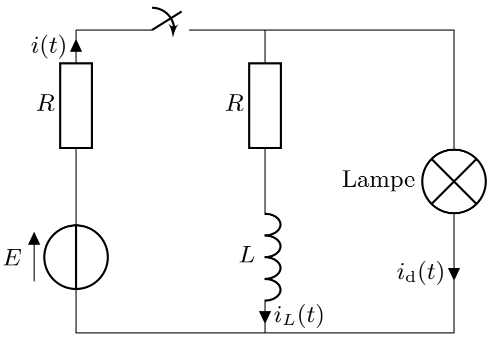
Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Exercice 1 - S'entrainer avec les conditions initiales et le régime permanent :

On considère le montage ci-dessous. Au temps $t = 0$ on ferme l'interrupteur. On note $i(t)$ le courant dans la branche du générateur, $i_L(t)$ celui dans la bobine et $i_d(t)$ celui dans la lampe. La lampe se comporte comme un dipôle ohmique de résistance $4R$.

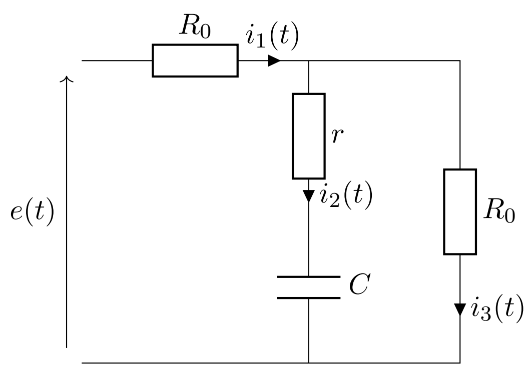
On répondra aux questions **sans écrire d'équation différentielle**.

1. Donner la valeur de $i_L(t)$ en $t = 0^+$. En déduire la valeur de $i(t)$ et $i_d(t)$ juste après la fermeture.
2. Quelle est la valeur des différents courants une fois le régime permanent atteint ?
3. Après un temps très long (régime permanent atteint), on ouvre l'interrupteur. Quelle est la valeur des différents courants juste après l'ouverture ?
4. La lampe ne s'allume que pour $|i_d| > E/8R$. À quoi sert-elle ?



Exercice 2 - Circuit à deux mailles :

On suppose que le signal d'entrée est un échelon de tension : $e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t > 0 \end{cases}$ et que le condensateur est initialement déchargé.



1. **En appliquant étape par étape la méthode de résolution d'un circuit électrique**, trouver l'équation différentielle dont $U_c(t)$, tension aux bornes du condensteur, est la solution.
2. Déterminer l'évolution au cours du temps :
   - ▷ de la tension $U_c(t)$
   - ▷ de la charge $q(t)$ du condensateur
   - ▷ de l'intensité i_2

Exercice 3 - Chute d'une balle dans un fluide :

On étudie la chute verticale d'une balle sphérique dans un fluide visqueux sous l'effet de la pesanteur. On mesure sa vitesse $v(t)$. L'application du principe fondamentale de la dynamique permet de montrer que la vitesse $v(t)$ de la balle est la solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = -\alpha v(t) + mg, \tag{0.1}$$

où α est une constante appelée coefficient de résistance du fluide. Il représente les frottements qu'exerce le fluide sur la balle quand cette derrière se déplace . g est l'accélération de la pesanteur.

1. Quelle est la dimension $[\alpha]$ du coefficient de résistance du fluide.
2. Ecrire l'équation différentielle sous forme canonique et en déduire la valeur de la constante de temps τ du système.
3. En considérant que la sphère possède initialement une vitesse v_0, donner l'expression de la vitesse de la sphère au cours du temps.
4. (*) Quelle est la vitesse maximale que va atteindre la balle au cours de sa chute ? On pourra distinguer deux cas de figures suivant la valeur de la vitesse initiale.

Exercice 4 - Etincelle de rupture :

On considère un circuit à une maille comportant une résistance R, une bobine d'inductance L, un générateur idéal de tension E et un interrupteur (K). On suppose que (K) est ouvert et qu'on le ferme à $t = 0$.

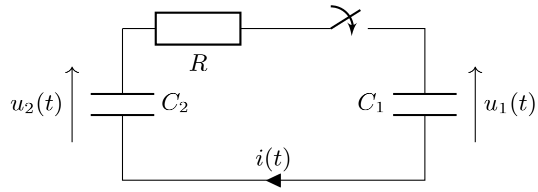
1. Déterminer le courant $i(t)$ qui circule dans la maille pour $t > 0$, tracer sa courbe représentative et interpréter le résultat obtenu.
2. Une fois le régime permanent établi, on ouvre brusquement l'interrupteur (K) et on y observe une étincelle. Expliquer pourquoi.

Exercice 5 - Transfert de charge entre condensateurs (*) :

On relie deux condensateurs de capacités C_1 et C_2, initialement chargés par une résistance R. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur. Pour $t < 0$, on a $u_1(t < 0) = U_{01}$ et $u_2(t < 0) = U_{02} < U_{01}$.

1. Déterminer et représenter pour $t > 0$ les grandeurs $i(t)$, $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
2. Faire un bilan d'énergie.

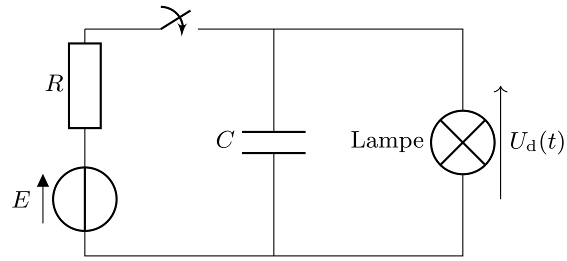
Données : $C_1 = 1\,\mu\text{F}$; $C_2 = 2\,\mu\text{F}$; $U_{01} = 50\,\text{V}$; $U_{02} = 30\,\text{V}$; $R = 1\,\text{k}\Omega$



Exercice 6 - La lampe à décharge(**) :

Une lampe à décharge, dont la tension entre ses bornes est notée $U_\text{d}(t)$, possède les caractéristiques suivantes :

- Si la lampe est éteinte, elle se comporte comme une résistance infinie et reste éteinte tant que $|U_\text{d}(t)| < U_\text{a}$. La tension U_a est la tension d'allumage.
- Si la lampe est allumée, elle se comporte comme une résistance de valeur R_d et reste allumée tant que $|U_\text{d}(t)| > U_\text{e}$. La tension U_e est la tension d'extinction et $U_\text{e} < U_\text{a}$.



1. Tracer la caractéristique $i = f(u)$ de la lampe à décharge lors d'une phase de charge allant de $U_\text{d} = 0$ à $U_\text{d} = U_\text{max}$ avec $U_\text{max} > U_\text{a}$. Tracer ensuite la même caractéristique pour une phase de décharge allant de $U_\text{d} = U_\text{max}$ à $U_\text{d} = 0$.
2. Pour $t < 0$ le condensateur est déchargé et l'interrupteur est ouvert. À $t = 0$ on ferme ce dernier. Établir l'équation différentielle vérifiée par $U_\text{d}(t)$.
3. Donner une condition sur la f.e.m. E pour que la lampe s'allume. Si cette condition est vérifiée, exprimer le temps d'allumage T_a.
4. Quelle équation différentielle vérifie $U_\text{d}(t)$ pour $t > T_\text{a}$? La résoudre.
5. Sous quelle condition la lampe s'éteint-elle spontanément ? Que se passe-t-il ensuite ?

TD05 Circuits linéaires du premier ordre

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

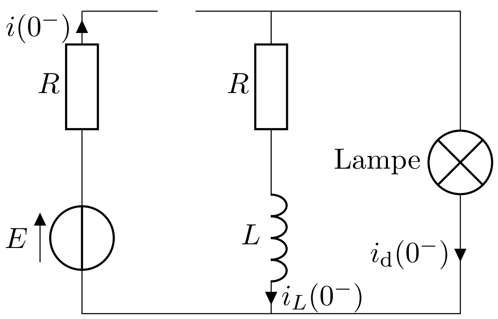
Exercice 1 - S'entrainer avec les conditions initiales et le régime permanent :

1. **Il est très important de bien distinguer $t = 0^-$ et $t = 0^+$! !**
   - ▷ $t = 0^-$: juste avant qu'on ferme l'interrupteur
   - ▷ $t = 0^+$: juste après qu'on ait fermé l'interrupteur

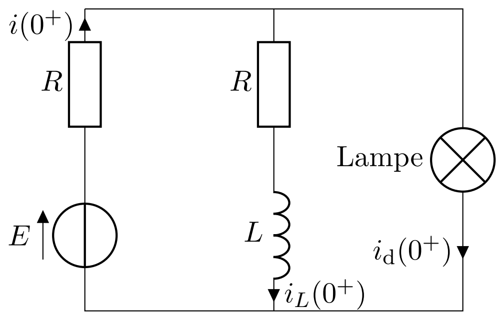
Méthode en DS. Trouver les conditions initiales
- ▷ on réalise deux **deux DEUX** schémas à $t = 0^-$ et $t = 0^+$ avec toutes les grandeurs électriques
- ▷ on trouve les différentes tensions/intensité en 0^- des **grandeurs continues** (les autres sont inutiles)
- ▷ pour $t = 0^+$, on écrit les lois des mailles/lois de noeuds/loi d'Ohm
- ▷ on donne les relations de continuité dans les condensateur et bobines
- ▷ **ET C EST TOUT**

$t = 0^-$

A $t = 0^-$, le circuit n'est pas connecté au générateur, toutes les intensités électriques sont nulles.



$t = 0^+$

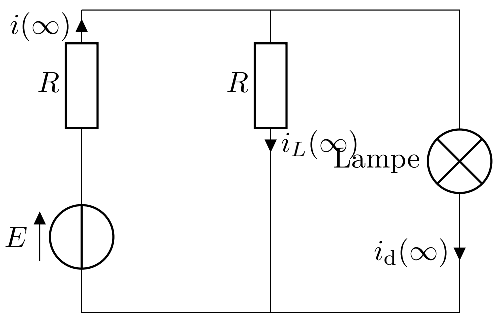


A $t = 0^+$, on a :
- ▷ 2 loi des mailles (en introduisant directement les loi d'Ohms) : $E - Ri(0^+) - Ri_L(0^+) + u_L(0^+) = 0$ et $Ri_L(0^+) + u_L(0^+) - 4Ri_{\mathrm{d}}(0^+) = 0$
- ▷ une loi des nœuds : $i(0^+) = i_L(0^+) + i_{\mathrm{d}}(0^+)$
- ▷ relation de continuité : le courant dans une bobine est une fonction continue du temps donc $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

On trouve alors que :
- ▷ $E = Ri(0^+) + u_L(0^+)$
- ▷ $i_{\mathrm{d}}(0^+) = i(0^+)$
- ▷ $u_L(0^+) = 4Ri_{\mathrm{d}}(0^+)$

Finalement $E = Ri(0^+) + 4Ri(0^+)$ donc $i(0^+) = E/5R$ et $i_{\mathrm{d}}(0^+)E/5R$.

2. Pour étudier le régime permanent, on représente le circuit pour $t = +\infty$ en remplaçant les bobines et condensateurs par leurs dipôles équivalent.

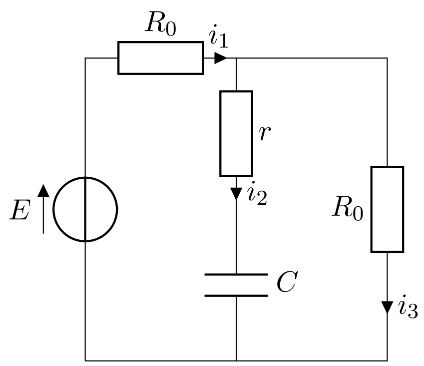


En associant les différentes résistances du circuit, on trouve un résistance totale équivalente de $R_{tot} = \frac{4}{5}R + R = \frac{9}{5}R$ donc un courant $i(\infty) = \frac{5}{9}\frac{E}{R}$.
Par un pont diviseur de courant on trouve : $i_L(\infty) = \frac{4}{5}i(\infty) = \frac{4E}{9R}$ et $i_{\rm d}(\infty) = \frac{1}{5}i(\infty) = \frac{E}{9R}$

3. On refait l'étude des conditions initiales comme avant mais désormais $i_L(0^-) = \frac{4}{9}\frac{E}{R}$. En refaisant tout l'étude on trouve : $i_L(0^+) = i_{\rm d}(0^+) = \frac{4}{9}\frac{E}{R}$ et $i(0^+) = 0$ interrupteur ouvert.
4. On remarque alors que les seules moment où le courant est suffisant dans la lampe pour permettre qu'elle s'allume est lorsque on ouvre on qu'on ferme l'interrupteur. La lampe est un indicateur visuelle : elle ne s'allume que lorsqu'on actionne l'interrupteur.

Exercice 2 - Circuit à deux mailles :

1. A $t > 0$, le circuit est équivalent à :



On appelle U_j la tension en convention récepteur aux bornes de la résistance R_j.
▷ **2 lois des mailles/loi d'Ohm** : $E = R_0 i_1 + r i_2 + U_C$ et $r i_2 + U_C = R_0 i_3$

▷ **1 loi des noeuds** : $i_1 = i_2 + i_3$

▷ **Relation des dipôles :** $i_2 = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$

$$r i_2 + U_C = R_0 i_3 \Rightarrow rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C = R_0 i_3 \Rightarrow rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C = R_0(i_1 - i_2)$$

On remplace i_1 avec la première loi des mailles et i_2 comme avant :

$$i_1 = \frac{1}{R_0}(E - r i_2 - U_C) = \frac{1}{R_0}\left(E - rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} - U_C\right)$$

On a alors :

$$rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C = R_0\frac{1}{R_0}\left(E - rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} - U_C\right) - R_0 C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$

On a plus qu'à tout assembler :

$$(2r+R_0)\,C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}+2U_C=E$$

2.(a) Pour résoudre l'équation, on l'écrit **sous forme canonique** :

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{(2r+R_0)C}U_C=\frac{E}{(2r+R_0)C}$$

On a alors un temps caractéristique $\tau=(2r+R_0)C/2$. On peut ensuite résoudre : $U_C=U_P+\widetilde{U}$ avec :

- ▷ $\widetilde{U}=Ae^{-t/\tau}$ et A une constante d'intégration
- ▷ $U_P=K$ avec K une constante qu'on trouve à l'aide de l'équation différentielle :

$$0+\frac{1}{\tau}K=\frac{E}{(2r+R_0)C}\ \Rightarrow\ K=E\frac{\tau}{(2r+R_0)C}=\frac{E}{2}$$

On a alors : $U_C(t)=Ae^{-t/\tau}+\dfrac{E}{2}$.

Condition initiale : $U_C(t=0)=0$, le condensateur est initialement déchargé et la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue.

Finalement : $U_C(t)=\dfrac{E}{2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

(b) On trouve la charge via $q(t)=CU_C(t)=\ldots$

(c) Pour i_2, pas besoin de repartir du début, on utilise la relation courant-tension d'un condensateur :

$$i_2=C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{E}{2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]=C\frac{E}{2}\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$$

Soit $i_2=\dfrac{E}{2r+R_0}e^{-t/\tau}$.

Exercice 3 - Chute d'une balle dans un fluide :

Attention ! *Pas besoin de savoir faire de la mécanique ici : on doit juste savoir résoudre l'équation différentielle !*

1. **Attention !** En dimension on n'écrit jamais des sommes !!

   Ça $[m]\left[\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right]=[-\alpha v(t)]+[m][g]$ **JAMAIS**

   On a :

$$[-\alpha v(t)]=[m][g]\ \text{ et }\ [m]\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right]=[-\alpha v(t)]$$

   On utilise le premier : $[\alpha]=\dfrac{[m][g]}{[v]}=\dfrac{MLT^{-2}}{LT^{-1}}=MT^{-1}$.

2. On met un×1 devant la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\alpha}{m}=g\ \text{ et donc }\tau=\frac{m}{\alpha}$$

3. On résout l'équation : $v(t)=v_P+\widetilde{v}$

   - ▷ $v_P=\dfrac{mg}{\alpha}$
   - ▷ $\widetilde{v}(t)=Ae^{-t/\tau}$

   Donc $v(t)=\dfrac{mg}{\alpha}+Ae^{-t/\tau}$.

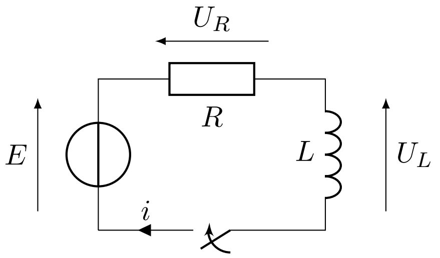
   Condition initiale : $v(t=0)=v_0$ donc $A=v_0-\dfrac{mg}{\tau}$.

   Finalement : $v(t)=\dfrac{mg}{\alpha}+\left(v_0-\dfrac{mg}{\alpha}\right)e^{-t/\tau}$.

4. Aux temps longs, la vitesse vaut $v_\infty = \dfrac{mg}{\alpha}$. Deux cas alors :
   - ▷ $v_0 > \dfrac{mg}{\alpha}$: la balle ralentit dans le fluide et la vitesse de la balle est donc maximale $t = 0$
   - ▷ $v_0 < \dfrac{mg}{\alpha}$: la balla accélère dans le fluide et la vitesse de la balle est donc maximale $t = \infty$

Exercice 4 - Etincelle de rupture :

1. **Attention !** *à bien mettre en place les différentes étapes !!*



▷ **Loi des mailles** : $E = U_R + U_L$

▷ **Loi des dipôles** : $U_R = Ri$ et $U_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Donc $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

et $\tau = \dfrac{L}{R}$.

On a alors $i(t) = i_P + \widetilde{i}$ avec $i_P = K = \dfrac{E}{R}$ et $\widetilde{i} = Ae^{-t/\tau}$.

Condition initiale : $i(t=0) = 0$ car aucun courant ne circule initialement dans la bobine ($i(0^-) = 0$) et l'intensité dans une bobine est continue $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Donc $i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

2. En régime permanent $i_\infty = \dfrac{E}{R}$. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur on force le courant à être nul. Or, l'intensité circulant dans une bobine est une fonction continue. Deux phénomènes s'oppose :
   - ▷ l'interrupteur qui force $i = 0$
   - ▷ la bobine qui force $i = E/R$

   Par conséquent, l'intensité reste continu mais décroit très rapidement. Il existe un court moment où l'interrupteur est ouvert mais un courant circule, formant un arc électrique.

Exercice 5 - Transfert de charge entre condensateurs (*) :

1. **Attention !** *L'énoncé est méchant : le condensateur C_2 est en convention récepteur, donc $i = -C_2\dfrac{du_2}{dt}$!!*

   En appliquant pas-à-pas la méthode on trouve :

$$u_2 = u_1 + Ri \text{ avec } i = C_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \text{ et } i = -C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

Problème : c'est $\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ qui apparaît dans nos relations courant-tension, et pas u_1. On veut la déricée de u_1, on a u_1 donc on dérive !

$\Rightarrow$ on dérive la loi des mailles : $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. On a alors :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + (1/C_1 + 1/C_2)i(t) \text{ et donc } \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}_{\dfrac{RC_1C_2}{C_1+C_2}} i = 0$$

soit $\tau = RC_1C_2/(C_1 + C_2)$.

CI : $i(t = 0^+) = (U_{0,2} - U_{0,1})/R$ (*loi des mailles en* $t = 0^+$).

On a alors : $i(t) = \dfrac{U_{0,2} - U_{0,1}}{R}\exp[-t/\tau]$.

Pour trouver les tensions, deux méthodes :

▷ on applique pas-à-pas la méthode pour trouver les équations différentielles dont elles sont solution

▷ comme $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, il suffit d'intégrer l'expression de i trouvée précédemment pour avoir u_C.

Dans tous les cas on trouve :

$$u_1(t) = U_{01} - (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_2}{C_1+C_2}(\exp[-t/\tau]-1) \text{ et } u_2(t) = U_{02} + (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_1}{C_1+C_2}(\exp[-t/\tau]-1)$$

2. **Bilan d'énergie**
   - Énergie du condensateur 1 :

$$\mathcal{E}_{C_1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, u_1(t)i(t) = C_1\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\, u_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = C_1\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{u_1^2}{2}\right] \Rightarrow \mathcal{E}_{C_1} = C_1\left(\frac{u_{1,\infty}^2}{2} - \frac{U_{1,0}^2}{2}\right)$$

   avec $u_{1,\infty} = u_1(\infty) = U_{0,1} + (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_2}{C_1+C_2}$.

   - Énergie du condensateur 2 :
   avec un raisonnement similaire on trouve :

$$\mathcal{E}_{C_2} = C_2\left(\frac{u_{2,\infty}^2}{2} - \frac{U_{0,2}^2}{2}\right)$$

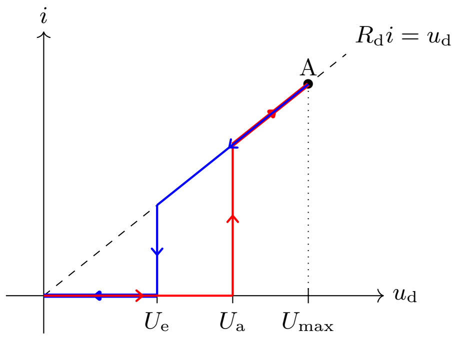
   avec $u_{2,\infty} = u_2(\infty) = U_{0,2} - (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_2}{C_1+C_2}$.

$$\frac{1}{C_1}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t}q_C(t) = \frac{1}{2C_1}\left[q_1^2(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{C_1}{2}\left[u_1^2(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{C_1}{2}(u_\mathrm{f}^2 - U_{01}^2) < 0$$

   - Énergie dissipée par effet joule dans la résistance

$$E_\mathrm{J} = R\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t i(t)^2 = Ri_0^2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\, e^{-2t/\tau} = -\frac{\tau R i_0^2}{2}\left[\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{\tau R i_0^2}{2}$$

Exercice 6 - La lampe à décharge(**) :



1. Voir figure ci-contre. En rouge on allume la lampe et en bleu on l'éteint.
2. Pendant la phase de charge et tant que $U_\mathrm{d}(t) < U_\mathrm{a}$ on est en présence d'un circuit RC classique car la lampe se comporte alors comme un interrupteur ouvert (résistance infinie). On prend une convention récepteur pour la résistance et la capacité et on note $i(t)$ le courant dans la maille. La tension U_d est ici la tension aux bornes du condensateur. Ainsi, il vient directement $E = RCU'_\mathrm{d} + U_\mathrm{d}$.
   Compte tenu de la condition initiale $U_\mathrm{d}(0) = 0$ et de la continuité de la tension aux bornes du condensateur, cette équation s'intègre en $U_\mathrm{d}(t) = E\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)\right]$.
3. Pour que la lampe s'allume on doit avoir $U_\mathrm{d} > U_\mathrm{a}$ et donc $E > U_\mathrm{a}$. Par définition $U_\mathrm{d}(T_\mathrm{a}) = U_\mathrm{a}$ soit $T_\mathrm{a} = RC\ln\left(\dfrac{E}{E - U_\mathrm{a}}\right)$.
4. Pour $t > T_\mathrm{a}$ la loi des mailles fournit encore $E = Ri + U_\mathrm{d}$; mais cette fois-ci on a $i(t) = CU'_\mathrm{d} + U_\mathrm{d}/R_\mathrm{d}$ (en prenant en compte le courant qui passe dans chaque partie d ela maille). On obtient donc $E = RCU'_\mathrm{d} + U_\mathrm{d}(R_\mathrm{d} + R)/R_\mathrm{d}$.
   Cette équation différentielle est du premier ordre à coefficient constant avec second membre et la solution est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène sans second membre. En posant $\tau_\mathrm{e} = (R_\mathrm{d}RC)/(R_\mathrm{d} + R)$, U_d est de la forme : $U_\mathrm{d}(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_\mathrm{e}}\right) + \dfrac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}+R}$ et au temps $t = T_\mathrm{a}$ on a $U_\mathrm{d}(T_\mathrm{a}) = U_\mathrm{a}$ d'où

$$U_\mathrm{d}(t) = \frac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}+R} + \left(U_\mathrm{a} - \frac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}+R}\right)\exp\left(-\frac{t - T_\mathrm{a}}{\tau_\mathrm{e}}\right).$$

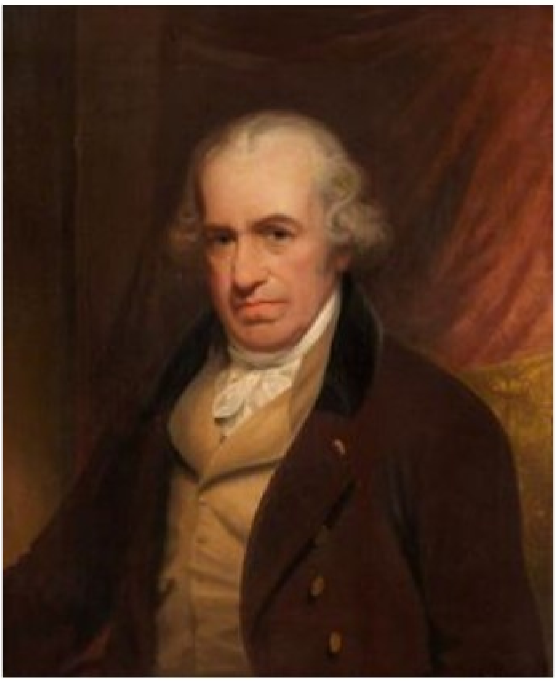
5. Pour que la lampe puisse s'éteindre il faut que $\dfrac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}+R} < U_\mathrm{e}$. Par définition $U_\mathrm{d}(T_\mathrm{e}) = U_\mathrm{e}$, d'où $T_\mathrm{e} = T_\mathrm{a} + \tau_\mathrm{e} \ln\left[\dfrac{RU_\mathrm{a} + R_\mathrm{d}(U_\mathrm{a} - E)}{RU_\mathrm{e} + R_\mathrm{d}(U_\mathrm{e} - E)}\right]$.
6. Au delà du temps T_e on recommence un cycle de charge du condensateur puis, une fois U_a atteinte, un cycle de décharge. Au final on a une alternance d'éclairage et d'extinction de la lampe. En remarquant que lors de la charge initiale on atteint la valeur U_e au temps $t_0 = RC \ln\left(\dfrac{E}{E - U_\mathrm{e}}\right)$, on en déduit que la période du mouvement d'oscillation est $\Delta T = T_\mathrm{e} - t_0$ soit, en revenant aux définitions des divers temps : $\Delta T = \dfrac{R_\mathrm{d}RC}{R_\mathrm{d}+R} \ln\left[\dfrac{RU_\mathrm{a} + R_d(U_\mathrm{a} - E)}{RU_\mathrm{e} + R_\mathrm{d}(U_\mathrm{e} - E)}\right] + RC \ln\left(\dfrac{E - U_\mathrm{e}}{E - U_\mathrm{a}}\right)$.

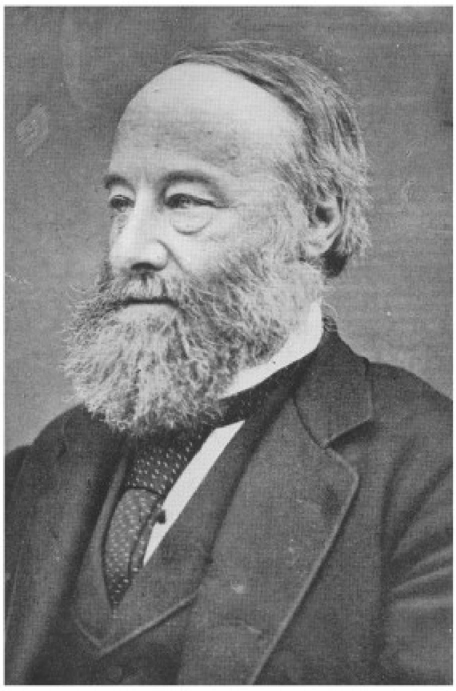
Chap VI

Oscillateur harmonique et signal sinusoïdal

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Table des matières





Savoirs ♡

- ♡ **Oscillateur harmonique**
  - Equation différentielle
  - pulsation propre ; fréquence ; période
  - Forme générale des solutions
- ♡ **Fonctions sinusoïdales**
  - 2 formes d'un signal sinusoïdal
  - Lien pulsation-fréquence-période
  - phase instantanée et phase à l'origine
- ♡ **Déphasage**
  - définition et cas particulier $\omega_1 = \omega_2$
  - lien avec le graphe
  - 3 déphasages particuliers et savoir les reconnaitre sur un graphe

Savoir Faire

Trouver les conditions initiales sur une grandeurs électriques ***ET ses dérivées***

Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ; utiliser les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration

A l'aide d'un graphe mesurer
1. *une amplitude*
2. *une période et une fréquence*
3. *une phase à l'origine et un déphasage*

Approche énergétique
- *discuter l'évolution des 2 énergies d'un oscillateur harmonique*
- *trouver la valeur de l'énergie totale grâce aux conditions initiales*
- *trouver les valeurs maximales des variables*

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux signaux **périodiques**, c'est-à-dire des signaux qui se reproduisent identiques à eux-mêmes au bout d'une durée fixée. Le plus fondamental/simple des signaux périodiques est le **signal sinusoïdal**.

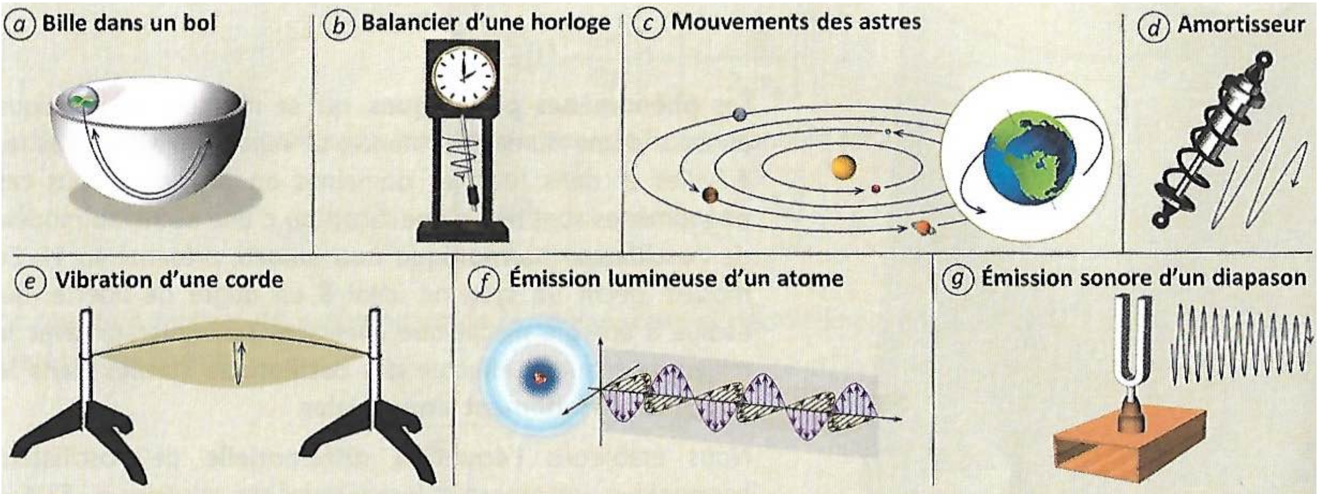


Fig. 1 – Phénomènes périodiques.

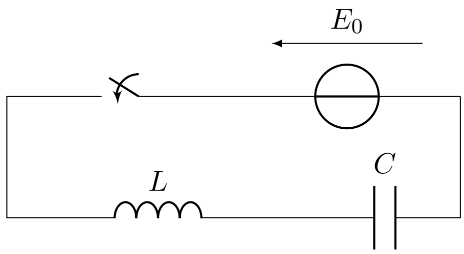
Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique qui produit une oscillation idéalisée : un **signal sinusoïdal**, parfaitement stable dans le temps, appelé l'oscillateur harmonique. Les adjectifs harmonique et sinusoïdal sont synonymes.

1 Le circuit LC : inductance-bobine

1.1 Mise en équation électrique

On étudie le courant électrique dans le circuit de la figure suivante.

Objectif : Déterminer l'évolution de $u_C(t)$, tension aux bornes du condensateur, pour le circuit suivant, avec le condensateur initialement déchargé.

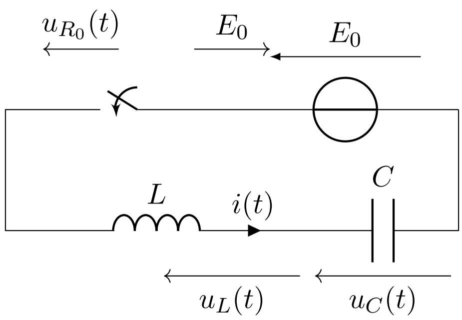


> ***Remarque :*** *Ce circuit ne comporte aucune résistance. Comme tout circuit électrique possède une résistance interne, ce circuit est purement théorique.*

▶ Mise en équation électrique

C'est un circuit électrique "classique" : on reprend la méthode de chapitre précédent.

On définit les tensions aux bornes des dipôles en convention récepteur



2) Relations des dipôles :

▷ bobine

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\ ; \tag{1.1}$$

▷ condensateur

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\ . \tag{1.2}$$

3) Equations électriques :

Ici on a une maille et pas de noeud. Donc 1 **Loi des mailles :**

$$E = u_C(t) + u_L(t)\ . \tag{1.3}$$

4-5) Obtention de l'équation électrique :

Utilisons l'équation précédente : comme on cherche u_C, on transforme u_L à l'aide de la relation de la bobine.

$$E = u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

On exprime ensuite l'intensité du courant électrique i à l'aide de la relation du condensateur : $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

Attention ! Quand on utilise deux équations de dipôle, **il convient de bien faire attention à quelle tension/intensité apparaît dedans.**

Ici c'est bien la même intensité qui circule dans le condensateur et la bobine, noté i.

On obtient :

$$u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = E_0$$

La capacité C est une constante et les dérivées se composent, on obtient :

$$u_C(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = E_0$$

C'est une équation différentielle linéaire à coefficient constant d'ordre 2.

1.2 L'oscillateur Harmonique

▶ Forme canonique

Définition. Oscillateur Harmonique (OH)

On appelle oscillateur harmonique tout système physique produisant un signal X dépendant du temps, $X(t)$, et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \tag{1.4}$$

où ω_0 est une constante réelle positive, appelée **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique. Elle s'exprime en rad.s^{-1}.

On introduit également la **période** T_0 (en secondes) telle que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

> *Exemple 1 :*
>
> $$u_C(t) + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = E_0$$

> *L'équation trouvée précédemment n'est pas un oscillateur harmonique : le membre de droite est non nul. Par contre son équation homogène est :*
>
> $$u_C(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{dt^2} = 0$$
>
> *Ce qui se écrit :*
>
> $$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C(t) = 0$$
>
> *qui est bien l'équation d'un oscillateur harmonique. On trouve la pulsation en remarquant que :*
>
> $$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ soit } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

▶ Solution générale de l'OH

Propriété. Solution de l'OH
Les solutions x de l'équation d'un OH s'écrivent comme :

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

avec x_P une solution particulière (cherchée sous la forme d'une constante et x_H la solution générale de l'équation homogène

$$x_H(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

où a et b sont des constantes d'intégration.

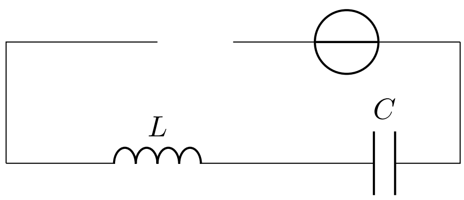
On cherche la solution u_C de l'équation différentielle : $u_C(t) + LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} = E_0$.
On va avoir besoin des **conditions initiales**. Comme il y a 2 constantes d'intégration a et b, il nous faut 2 conditions initiales : une sur la fonction en 0, l'autre sur sa dérivée en 0.

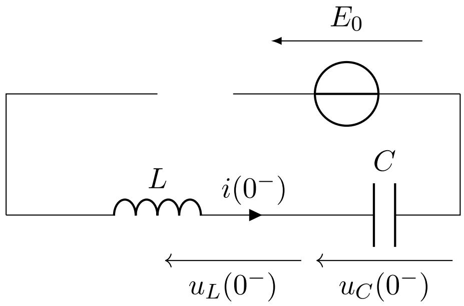
1.3 Conditions initiales :

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Il est donc nécessaire de distinguer deux instants initiaux : $t = 0^-$, juste avant qu'on ferme l'interrupteur et $t = 0^+$, juste après.

▶ Continuité des grandeurs électriques

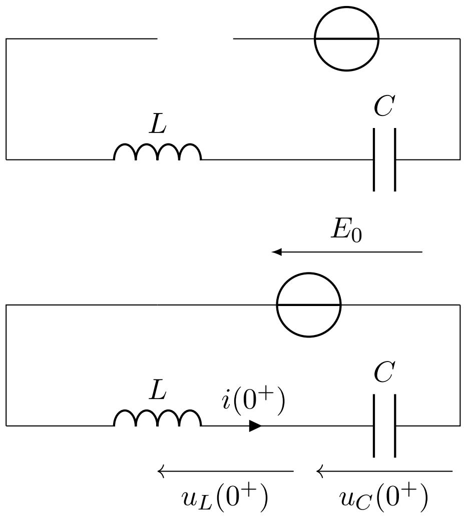
A $t = 0^-$:





- ▷ Le condensateur est initialement déchargé donc : $u_C(0^-) = 0$.
- ▷ L'interrupteur est ouvert depuis longtemps donc : $i_L(0^-) = 0$.

A $t = 0^+$:



On ne peut *a priori* rien dire sur les grandeurs électriques à $t = 0^+$, sauf :

- ▷ la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue donc :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$

- ▷ l'intensité qui circule dans une bobine est une fonction continue donc :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

▶ Comment trouver les dérivés ?

On cherche par exemple la dérivée de la tension aux bornes du condensateur $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

Attention ! Ce qui va suivre est la démarche **A NE JAMAIS FAIRE**. Si vous commencez à faire le raisonnement suivant vous êtes sûr de faire fausse route.

On cherche la dérivée de u_C en 0. Comme $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ la fonction est constante, donc sa dérivée est nulle

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}t} = 0$$

fastoche ...

Propriété.
Pour trouver la valeur d'une dérivée d'un signal électrique en O^+, on utilise **toujours** les relations constitutives des dipôles.

Ici, la dérivée de la tension d'un condensateur est relié à l'intensité qui le traverse via la relation : $i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.
Cette relation est vraie à $t = 0^+$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{i_C(t = 0^+)}{C}$$

Ici $i_C(t = 0^+) = 0$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.

1.4 Retour sur le circuit LC

> *Application 1 : Exprimer* $\dfrac{du_L}{dt}(t = 0^+)$.
> *Exprimer* $\dfrac{di}{dt}(t = 0^+)$ *en fonction de* E_0 *et* L.

Forme canonique :
On l'écrit sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{E_0}{LC}$$

Décomposition de la solution

On décompose la solution en :

- ▷ UNE solution particulière $u_{C,P}$
- ▷ LA forme générale des solutions de l'équations homogène $u_{C,H}$

$$u_C(t) = u_{C,P}(t) + u_{C,H}(t)$$

Solution particulière $u_{C,P}(t)$
On la cherche sous la forme d'une fonction constante. On a donc : $\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,P}}{\mathrm{d}t^2} = 0$

$$0 + \frac{1}{LC} u_{C,P}(t) = \frac{E_0}{LC}$$

donc : $u_{C,P}(t) = E_0$.

Forme générale des solutions de l'équation homogène $u_{C,H}(t)$
L'équation homogène de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,H}}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=\omega_0^2} u_{C,H}(t) = 0$$

C'est un oscillateur harmonique avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$u_{C,H}(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$$

$$u_{C,H}(t) = a \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + b \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Solution du problème et conditions initiales
La solution est donc : $u_C(t) = E_0 + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$.
Il faut trouver a et b.

$$\text{Deux inconnues} \quad \Rightarrow \quad \text{Deux conditions initiales} \quad \begin{cases} \text{une sur la fonction} \\ \text{une sur la dérivée} \end{cases}$$

On veut $u_C(t = 0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.

Attention ! Trouver les deux conditions initiales est **l'une des plus difficile** ! ! Nous l'avons traité en détails plus tôt, il s'agit de bien la maîtriser.

On a trouvé précédemment que $u_C(t = 0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$.

♡ *Instant math* ♡ : $\frac{\mathrm{d} \cos \omega_0 t}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 \sin \omega_0 t$ et $\frac{\mathrm{d} \sin \omega_0 t}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \cos \omega_0 t$

Donc :

$$u_C(t = 0) = E_0 + a \underbrace{\cos 0}_{=1} + b \underbrace{\sin 0}_{=0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0) = -a\omega_0 \underbrace{\sin 0}_{=0} + b\omega_0 \times \underbrace{\cos 0}_{=1}$$

Comme $u_C(t = 0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = 0$, on a donc : $a = -E_0$ et $b = 0$. Finalement :

$$u_C(t) = E_0(1 - \cos \omega_0 t)$$

2 Outils mathématiques : les fonctions sinusoïdales

2.1 Généralités

Définition. Signal sinusoïdal
Un signal sinusoïdal est un signal de la forme :

$$s(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

▷ω est la **pulsation** du signal (en $rad.s^{-1}$), ▷ϕ_0 sa **phase initiale** ou phase à l'origine.
▷A son **amplitude** (même unité que $s(t)$)

Attention ! A et ω sont constantes positives, ϕ_0 peut être négative. **Attention !** ϕ_0 est un angle, il s'exprime en radian !!!

Propriété. Autres formes
Un signal sinusoïdal peut aussi s'écrire sous la forme :
- ▷ $s(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) = A\sin(\omega t + \phi_0 + \pi/2$
- ▷ $s(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

♡ *Instant math* ♡ :
Le passage à la première forme à l'autre s'obtient en utilisant la formule de trigonométrie :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

> *Application 2 : Montrer, avec les notation précédente, que*
> - ▷ $a = A\cos\phi_0$, $b = -A\sin\phi_0$
> - ▷ $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
> - ▷ $B = A$ et $\varphi_0 = \phi_0 + \pi/2$

> *Exemple 2 :* **Attention !** *La tension aux bornes du condensateur n'est donc pas un signal sinusoïdal car elle s'écrit comme :* $E_0 - E_0\cos(\omega_0 t)$.
> *Néanmoins on qualifiera ce type de signal de signal quasi-sinusoïdal et on parlera quand même de phase et phase à l'origine.*

Astuce pratique :
- ▷ La forme $A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ permet de lire directement les caractéristiques du signal sur un graphe.
- ▷ La forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ permet d'utiliser plus facilement les C.I.

> *Application 3 : Dans l'exemple précédent (circuit LC) :*
> 1. *trouver la grandeur V pour que $y(t) = u_C(t) - V$ soit un signal sinusoïdal*
> 2. *donner l'amplitude, la phase initiale et la pulsation du signal $y(t)$*

2.2 Caractéristiques d'un signal sinusoïdal et lecture sur un graphe

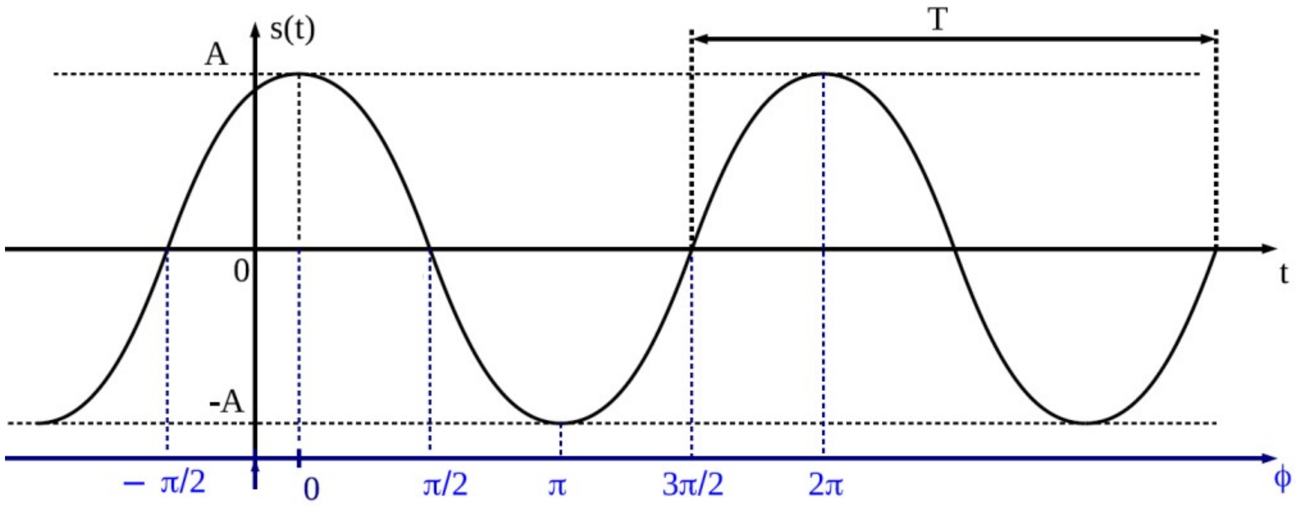
▶ Définition et lien entres les différentes grandeurs

Définition. Période et Fréquence
Un signal physique $s(t)$ est **périodique** s'il se répète dans le temps.
Sa **période** T est la plus petite durée telle que : $s(t + T) = s(t)$.
La période T se mesure en secondes (symbole s).

La **fréquence** du signal : $f = \frac{1}{T}$ est le nombre de répétitions du signal par unité de temps.
La fréquence f se mesure en hertz (symbole Hz).

Propriété. Lien fréquence-période-pulsation
Pour un signal sinusoïdal quelconque, on a les relations suivantes :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



Graphe :

Définition. Phase instantanée et phase à l'origine
Soit un signal :

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

▷ ϕ_0 est la phase à l'origine.

▷ L'argument de la fonction cosinus est appelée **phase instantanée** $\phi(t)$

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0$$

La phase à l'origine est la phase instantanée à $t = 0$: $\phi_0 = \phi(t = 0)$

Oscillation du signal :
Le signal oscille entre $-A$ et A, A étant l'**amplitude** du signal sinusoïdal.
▷ $A \to \varphi = \omega t_{\max} + \phi_0 = 2n\pi$
▷ $-A \to \varphi == \omega t_{\min} + \phi_0 = (2n+1)\pi$.
Un signal quasi-sinusoïdal $s(t) = C + A\cos\omega_0 t + \phi_0$ oscille de part et d'autre de C, entre $C + A$ et $C - A$.

Exemple 3 : On donne le signal $s(t) = S_0\cos(\omega t+\phi_0)$. Donner l'instant du premier maximum.

$$s(t_{max}) = +A \quad donc \quad \cos(\omega_0 t_{max} + \phi_0) = 1$$

Comme $\cos 2n\pi = 1$ avec n un entier, alors : $\omega_0 t_{max} + \phi_0 = n\pi$.
On choisit la solution la plus simple phase, $n = 0$, et donc : $t_{max} = -\phi_0\omega_0$. Cela donne le maximum le plus proche de l'origine des temps mais potentiellement dans les temps négatifs.

Application 4 : On donne le signal $s(t) = S_0\cos(\omega t + \phi_0)$. Donner l'instant du premier minimum.

▶ Mesure de l'amplitude et de la phase à l'origine

Sur un graphe d'un signal sinusoïdale, il faut savoir extraire (dans l'ordre) :

1. l'amplitude
2. la période
3. la fréquence et pulsation
4. la phase à l'origine

Avant d'analyser un graphe, on prend bien le temps de se familiariser avec les deux DEUX 2 échelles : celles des abscisses et celles des ordonnées.

1. Amplitude : on mesure l'écart entre un maximum et un minimum et on divise par deux

2. Période : on mesure l'écart en temps entre deux maxima successifs

3. Fréquence et pulsation : elle se déduit par $f = 1/T$ et $\omega = 2\pi f$.

4. **Phase à l'origine :** Graphiquement, la phase à l'origine ϕ_0 mesure le décalage temporel de la courbe. Elle se mesure à l'aide du maximum du signal.

   Propriété. Maximum du signal
   Le maximum le plus proche de l'origine est atteint à l'instant $t_{\max}$:
   $$t_{\max} = \frac{-\phi_0}{2\pi}T$$

   $\phi_0 = -2\pi\frac{t_{\max}}{T}$. On mesure $t_{\max}$ et on en déduit ϕ_0.

2.3 Notion de déphasage – Retard ou avance de phase

On s'intéresse le plus souvent non pas à la phase à l'origine d'un signal mais à l'écart de phase entre deux signaux : le déphasage.

▶ Définitions

On considère deux signaux sinusoïdaux :

$s_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ et $s_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$.

Définition. Déphasage
On appelle déphasage instantané du signal $s_2(t)$ par rapport au signal $s_1(t)$ la différence entre leurs phases instantanées, soit :
$$\Delta\phi(t) = (\omega_2 t + \phi_2) - (\omega_1 t + \phi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + \phi_2 - \phi_1$$

Attention ! ϕ_0 est un angle, il s'exprime en radian !!!

Cas où $\omega_1 = \omega_2$:
Avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, $\omega_1 = \omega_2$, leur déphasage est

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

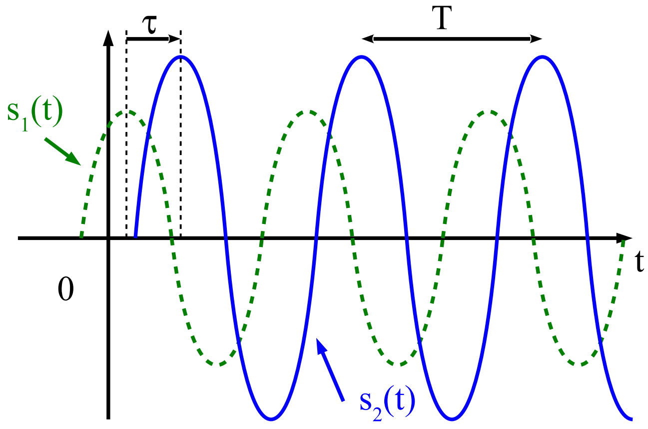
Propriété.
Deux signaux de même fréquence (ou de même pulsation) ont un déphasage constant égal à la différence des phases à l'origine.

Expression de s_2 à l'aide du déphasage :
On note $\omega_1 = \omega_2 = \omega$
$$s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \phi_2) = A_2\cos(\omega t + \phi_1 + \Delta\phi)$$

▶ Représentation temporelle et déphasage

$$\text{Déphasage} \iff \text{Décalage temporel}$$

Définition. Décalage temporel
Le décalage temporel τ entre deux signaux s_1 et s_2 est égal à l'écart temporelle entre un maximum de s_1 et un maximum de s_2 successifs.



Les signaux n'atteignent pas leur maxima en même temps : un signal est en avance (ou en retard) par rapport à l'autre.

Discuter un déphasage

- 1) Mesurer les deux phases à l'origine phi_1 et ϕ_2 et en déduire le déphasage en valeur absolu $|\Delta phi|$
- 1) Bis Mesurer l'écart temporelle τ

- 2) Trouver lequel des deux signaux est en avance ou en retard. Le signal en retard atteint son premier maximum après le signal en avance.
  Attention ! Le signal en retard à l'air "devant" sur une représentation graphique.

- 3) Conclure : Le signal s_2 est en retard par rapport à s_1 de *tatata* secondes ou *tatata* radian.

▶ Cas particuliers

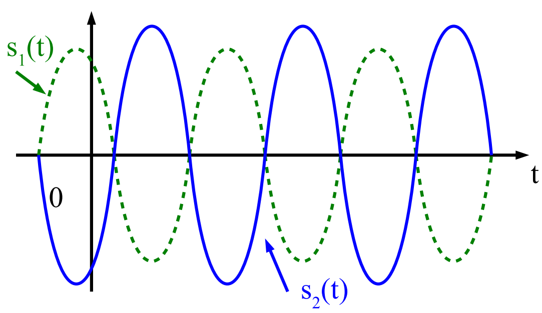
Il convient de bien connaître les 3 cas particuliers suivants :

Définition. Déphasages particuliers

- **Signaux en phase** :
  les valeurs maximales et minimales sont atteintes en même temps, les deux signaux se superposent.
  $\Delta\phi = 2n\pi$ typiquement $\Delta\phi = 0$ ou 2π
- **Signaux en opposition de phase :**

  L'un est maximal quand l'autre est minimal. Les signaux s'annulent en même temps.
  $\Delta\phi = (2n+1)\pi$, généralement :

$$\Delta\phi = \pi \text{ ou } -\pi$$

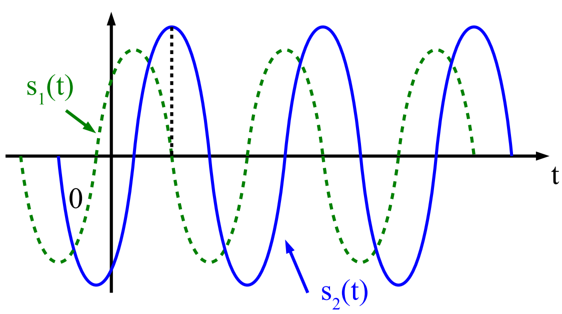


- **Signaux en quadrature :**

  L'un est maximal quand l'autre est nul. Les signaux ne s'annulent jamais en même temps.

  $\Delta\phi = \left(\frac{\pi}{2}+n\right)\pi$ généralement :

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$$

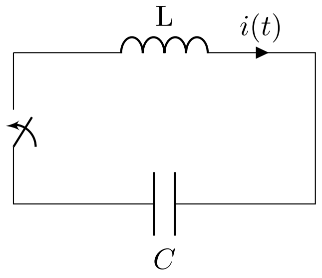


3 Approche énergétique

Comme vu en introduction, on peut dénombrer un nombre gigantesque de systèmes oscillant. Un système oscillant produit un signal périodique, *i.e.* qui se répète dans le temps, dont le plus simple est le signal sinusoïdal. Un système physique produisant un signal sinusoïdal est appelé "oscillateur harmonique" et il est caractérisé par son équation différentielle.
Une équation différentielle est la "traduction mathématiques" de la façon dont évolue le système. Régulièrement en physique, une façon commode de décrire l'évolution d'un système est un terme d'échange d'énergie.

3.1 Un peu de pratique ...

Partons du circuit électrique suivant. Initialement l'interrupteur est ouvert et le condensateur est chargé à la tension V_1.



A $t = 0$ on ferme l'interrupteur et le système évolue librement. On cherche l'équation différentielle du courant électrique $i(t)$.

- ▷ Loi des mailles $0 = u_C(t) + u_L(t)$
- ▷ Condensateur : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
- ▷ Bobine : $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

On a alors :

$$0 = u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Problème : la relation du condensateur fait le lien entre i et la dérivée de la tension u_C. On voudrait remplacer $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ par $\dfrac{i(t)}{C}$. Mais on a que $u_C(t)$ dans l'équation ...

♡ *Instant math* ♡ *:*
On a le droit de dériver une équation différentielle ! !

On dérive la loi des mailles :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right] + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Soit :

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

> ***Application 5 :***
> 1. *Exprimer* $i(t = 0^+)$ *et* $\dfrac{di}{dt}(t = 0^+)$.
> 2. *Montrer que l'intensité électrique* $i(t)$ *circulant dans la maille est un signal sinusoïdale :*
>
> $$i(t) = V_1\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

3.2 Echanges d'énergie

▶ Bilan de puissance

Pour obtenir un bilan de puissance on part de la loi des mailles

$$0 = u_C(t) + u_L(t)$$

et on multiplie par l'intensité $i(t)$ qui la traverse :

$$0 = u_C(t)i(t) + u_L(t)i(t)$$

En utilisant les deux relations constitutives des dipôles (bobine et condensateur) on obtient

$$0 = u_C(t)C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}i(t)$$

ce qui se réécrit en :

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}Li^2(t)\right]$$

On reconnaît l'énergie du condensateur $\mathcal{E}_C$ et celle de la bobine $\mathcal{E}_L$. Finalement :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

▶ Bilan d'énergie

En intégrant un bilan de puissance on obtient un bilan d'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L\right] = 0 \text{ soit } \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \text{Constante}$$

Analyse avec deux réservoirs d'énergie

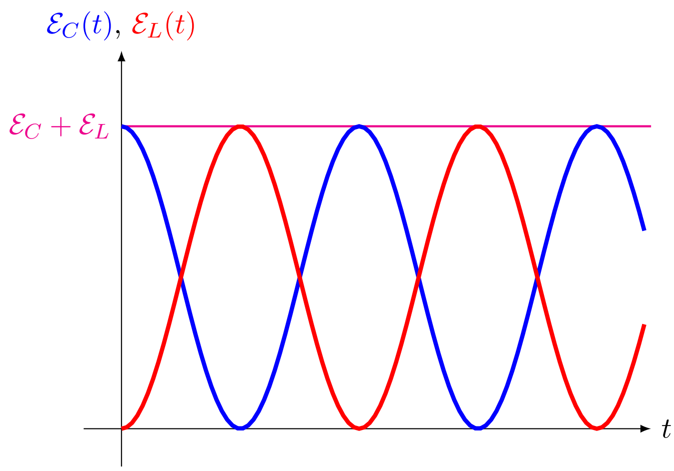
▷ l'énergie totale du système se distribue entre l'énergie magnétique de la bobine $\mathcal{E}_L$ et électrostatique du condensateur $\mathcal{E}_C$.
Ces deux systèmes s'échanges au cours du temps de l'énergie.

▷ **L'énergie du système est constante** :
La somme de ces deux énergie représente l'énergie totale du système qui est une constante. L'énergie totale se conserve : il n'y a pas de pertes.

> *Exemple 4* : ***Évaluer l'énergie du système***
> *Pour évaluer l'énergie total, on utilise l'instant initial :*
>
> $$\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \mathcal{E}_C(t=0) + \mathcal{E}_L(t=0)$$
>
> $$\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}u_C(t=0^+) + \frac{1}{2}Li(t=0^+)$$
>
> *Comme $i(t=0^+) = 0$ alors :*
>
> $$\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}CV_1^2$$
>
> *L'énergie du système tout au long de son évolution est égale à l'énergie qu'il possédait au début : ici c'est l'énergie qui était stocké dans le condensateur initialement chargé.*

Evolution temporelle :

- au début la tension du condensateur u_C est maximale et il n'y a pas d'intensité $i(t)$: $\mathcal{E}_C$ est maximale et $\mathcal{E}_L$ est nulle
- puis la tension u_C diminue et l'intensité $i(t)$ augmente : $\mathcal{E}_C$ décroit et $\mathcal{E}_L$ croit
- finalement la tension u_C est nulle et l'intensité est maximale : $\mathcal{E}_C$ est minimale et $\mathcal{E}_L$ est maximale.
- ainsi de suite



Propriété. Energies d'un circuit LC
Quand une des deux énergie est minimale, l'autre est maximale.

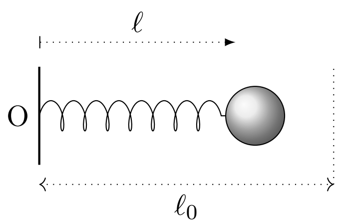
3.3 Généralisation à d'autres systèmes oscillants

Dans le système décrit précédemment, le système physique qu'est le circuit électrique possède deux moyens de stocker de l'énergie ; le condensateur et la bobine. Les oscillations peuvent être alors vues comme les échanges d'énergies entre ces deux "réservoirs d'énergies".
On généralise la notion à tous systèmes oscillants

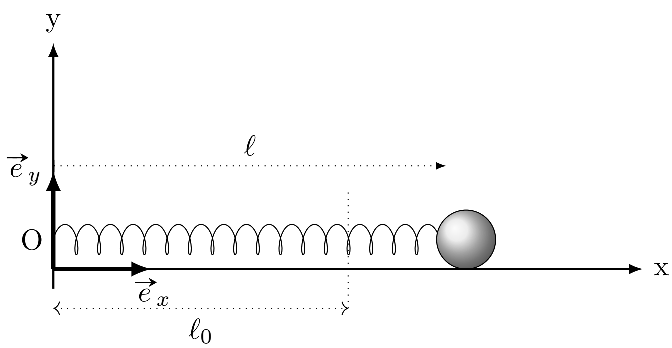
Propriété. Un système oscillant est caractéristique d'un échange d'énergie sans pertes entre deux "réservoirs énergétiques".

Exemple : une masse attachée au bout d'un ressort.

Le système {masse+ressort} peut stocker de l'énergie sous deux formes :
▷ dans le ressort, en l'étirant ou le comprimant : c'est l'énergie élastique.



Le ressort est plus comprimé que sa position "normale" : on a dépenser de l'énergie pour réussir à le comprimer.



Le ressort est plus étiré que sa position "normale" : tout comme avant, on a dépenser de l'énergie pour l'étirer.

▷ dans la masse en la mettant en mouvement : c'est l'énergie cinétique.

Lorsque ma masse s'arrête et fait demi-tour, le ressort est étiré à son maximum : E_c est minimale et E_p est maximale. On peut alors en déduire que l'énergie cinétique de la masse est maximale lorsque l'énergie élastique est minimale : la vitesse possède sa vitesse maximale lorsque le ressort n'est pas étiré.

► A faire à la maison

Application 6 : *On attache une bille de masse m au bout d'un ressort. Lorsqu'on étire le système et qu'on le laisse évoluer librement, on remarque que le ressort oscille de façon périodique.*

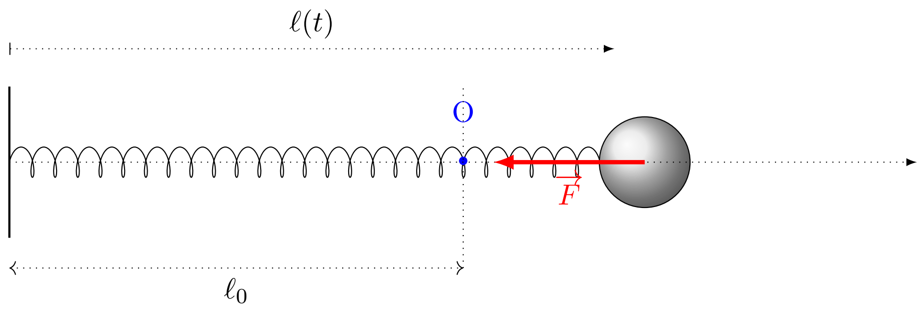


Fig. 2 – Schéma du problème du système masse-ressort horizontal.

On peut montrer que la longueur $l(t)$ du ressort est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{dt^2} = -\frac{k}{m}(l(t) - l_0)$$

avec $m =$ la masse de la bille, k la raideur du ressort et l_0 sa longueur lorsqu'il n'est pas étiré.
On donne : $m = 0.3 = kg$, $l_0 = 30cm$ et $k = 0.3SI$ (unité du système international).

▷ ***A)*** *Analyse dimensionnelle*

1. *A l'aide de l'équation différentielle donnée précédemment, donner la dimension du coefficient k*
2. *Par analyse dimensionnelle, donner une forme possible pour la force F qu'exerce un ressort de raideur k lorsqu'il est étiré d'une longueur $l(t)$.*

▷ ***B)*** *Oscillateur harmonique*

A $t = 0$, le ressort est étiré d'une longueur $l_1 = 0.7m$ et la bille n'a pas de vitesse initiale $\frac{dl}{dt}(t = 0) = 0$.

1. *A l'aide de l'équation différentielle, donner la pulsation propre du système.*
   En déduire la période d'oscillation de la masse. Faire l'application numérique.
2. *Donner l'expression de la longueur $l(t)$ au cours du temps.*
3. *Donner l'amplitude l_{max} des oscillations du ressort.*
4. *Donner la vitesse maximale v_{max} de la bille.*
   On admet que la vitesse $v(t)$ de la bille est donnée par $v(t) = \frac{dl}{dt}$.
5. *(*) Vérifier que lorsque $v(t_{max}) = v_{max}$ alors $l(t_{max}) = l_0$.*
   Astuce : on pourra d'abord chercher l'instant t_{max} où la vitesse est maximale.

▷ ***C)*** *Aspect énergétique*

Les deux énergies mises en jeux dans ce système sont :
i) l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2(t)$
ii) l'énergie élastique $E_p = \frac{1}{2}k\left(l(t) - l_0\right)^2$.

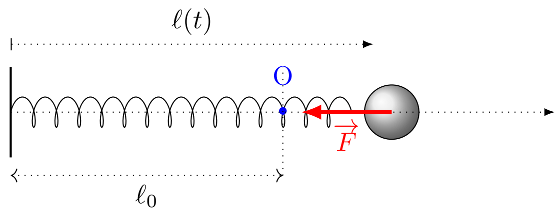
1. *Donner l'expression de $E_c(t)$ et $E_p(t)$ en fonction du temps t, de k, m, l_1 et l_0.*
2. *(*) Vérifier que $E_c + E_p$ est constante.*
   On appelle cette grandeur l'énergie mécanique.

μDm

Système masse ressort

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

On attache une bille de masse m au bout d'un ressort. Lorsqu'on étire le système et qu'on le laisse évoluer librement, on remarque que le ressort oscille de façon périodique.



On peut montrer que la longueur $l(t)$ du ressort est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}(l(t) - l_0)$$

avec $m =$ la masse de la bille, k la raideur du ressort et l_0 sa longueur lorsqu'il n'est pas étiré.
On donne : $m = 0.3 = kg$, $l_0 = 30$cm et $k = 0.3$SI (unité du système international).

Analyse dimensionnelle

1. A l'aide de l'équation différentielle donnée précédemment, donner la dimension du coefficient k
2. Par analyse dimensionnelle, donner une forme possible pour la force F qu'exerce un ressort de raideur k lorsqu'il est étiré d'une longueur $l(t)$.

Oscillateur harmonique

A $t = 0$, le ressort est étiré d'une longueur $l_1 = 0.7$m et la bille a une vitesse initiale $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}(t = 0) = v_0$.

1. A l'aide de l'équation différentielle, donner la pulsation propre du système. En déduire la période d'oscillation de la masse. Faire l'application numérique.
2. Donner l'expression de la longueur $l(t)$ au cours du temps. En déduire l'amplitude des oscillations du ressort.
3. Tracer le graphe représentant l'évolution de la longueur du ressort au cours du temps. On fera attention de bien faire apparaître :
   - ▷ la condition initiale $v(t = 0)$
   - ▷ l'amplitude
   - ▷ la valeur moyenne
   - ▷ la période
4. Donner la vitesse $v(t)$ de la bille. On admet que la vitesse $v(t)$ de la bille est donnée par $v(t) = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$.

Aspect énergétique

Les deux énergies mises en jeux dans ce système sont :

- ▷ l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2(t)$
- ▷ l'énergie élastique $E_p = \frac{1}{2}k\left(l(t) - l_0\right)^2$.

On admet par la suite le Théorème de l'Energie Mécanique : $E_c + E_p =$constante.

1. En évaluant l'énergie cinétiques et élastiques en $t = 0$ montrer que $E_c(t) + E_p(t) = \frac{k}{2}\left(l_1 - l_0)\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$.
2. Pour quelle valeur de E_c, l'étirement maximal est atteint ? En déduire la valeur de l_{max}.
3. Pour quelle valeur de E_p, la vitesse maximale est atteinte ? En déduire la valeur de v_{max}.

μDm

Système masse ressort

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Analyse dimensionnelle

1. Dans l'équation différentielle on $\left[\frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}t^2}\right] = \left[\frac{k}{m} l\right]$ donc

$$\frac{m}{t^2} = \frac{[k]}{kg} m \;\Rightarrow\; [k] = kg.s^{-2}$$

2. Pour obtenir une force (kg.ms^{-2}), il suffit de multiplier par une longueur, soit $F = kl(t)$.

Oscillateur harmonique

1. On écrit l'équation sous forme canonique : $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m} l(t) = \frac{k}{m} l_0$ soit une pulsation propre $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et donc $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

   Lien pulsation-fréquence-période : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$! !

   Donc $T_0 = 2\pi/\omega_0$ soit $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$.

2. On décompose $l(t)$ comme : $l(t) = l_P + \widetilde{l}(t)$ avec :
   - ▷ l_P : une solution particulière, cherchée sous la forme d'une constante K. On trouve $l_P = l_0$.
   - ▷ $\widetilde{l}(t)$: la solution homogène d'un oscillateur harmonique, $\widetilde{l}(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$.

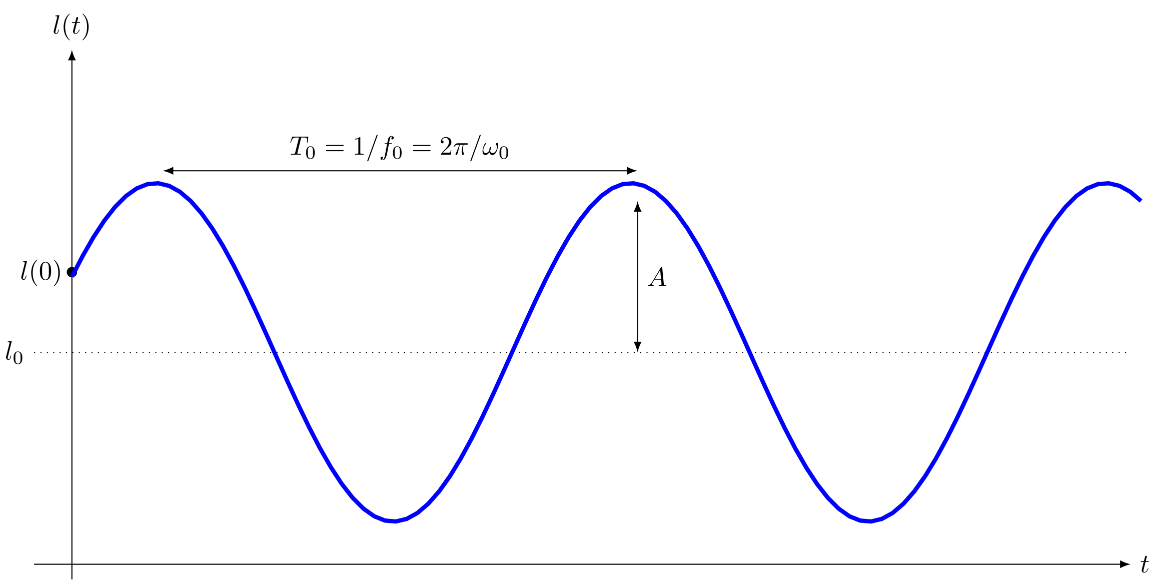
   CI : $l(t=0) = l_1$ et $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}(t=0) = v_0$ donc :

$$l_0 + A \times 1 + B \times 0 = l_1 \quad \text{et} \quad -\omega_0 A \times 0 + B\omega_0 \times 1 = v_0$$

   Finalement $l(t) = l_0 + (l_1 - l_0)\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + l_0$.

   L'amplitude des oscillations s'obtient alors $A = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(l_1 - l_0)^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$.

3. Avant de tracer le graphe, il est nécessaire de trouver l'amplitude : $A = \sqrt{l_1^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, la valeur moyenne : $\bar{l} = l_0$, la valeur initiale : $l(0) = l_1$, la période $T = 2\pi/\omega$.



4. En dériveant on obtient : $v(t) = -(l_1 - l_0)\omega_0 \sin\omega_0 t + v_0 \cos\omega_0 t$.

Aspect énergétique

1. A $t = 0$, $l(0) = l_1$ et $v(0) = v_0$ donc $E_k = \frac{k}{2}(l_1 - l_0)^2$ et $E_p = \frac{m}{2}v_0^2$.
   Comme l'énergie mécanique se conserve : $E_k(t) + E_c(t) = E_k(0) + E_c(0) = \frac{k}{2}\left(l_1 - l_0)\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$.

2. Lorsque E_k est maximale, E_c est minimale donc nulle. On a $E_{k,max} + 0 = \frac{k}{2}\left(l_1 - l_0\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$.
   Donc :
   $$\frac{1}{2}k\left(l_{max} - l_0\right)^2 = \frac{k}{2}\left(l_1 - l_0)\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \left(l_{max} - l_0\right)^2 = \left(l_1 - l_0)\right)^2 + \frac{m}{k}v_0^2$$
   On a alors :
   $$l_{max} = l_0 + \sqrt{\left(l_1 - l_0)\right)^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$$

3. Lorsque E_c est maximale, E_k est minimale donc nulle (pour $l = l_0$). On a $0 + E_{c,max} + 0 = \frac{k}{2}\left(l_1 - l_0)\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$.
   Donc :
   $$v_{max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}\left(l_1 - l_0\right)^2}$$

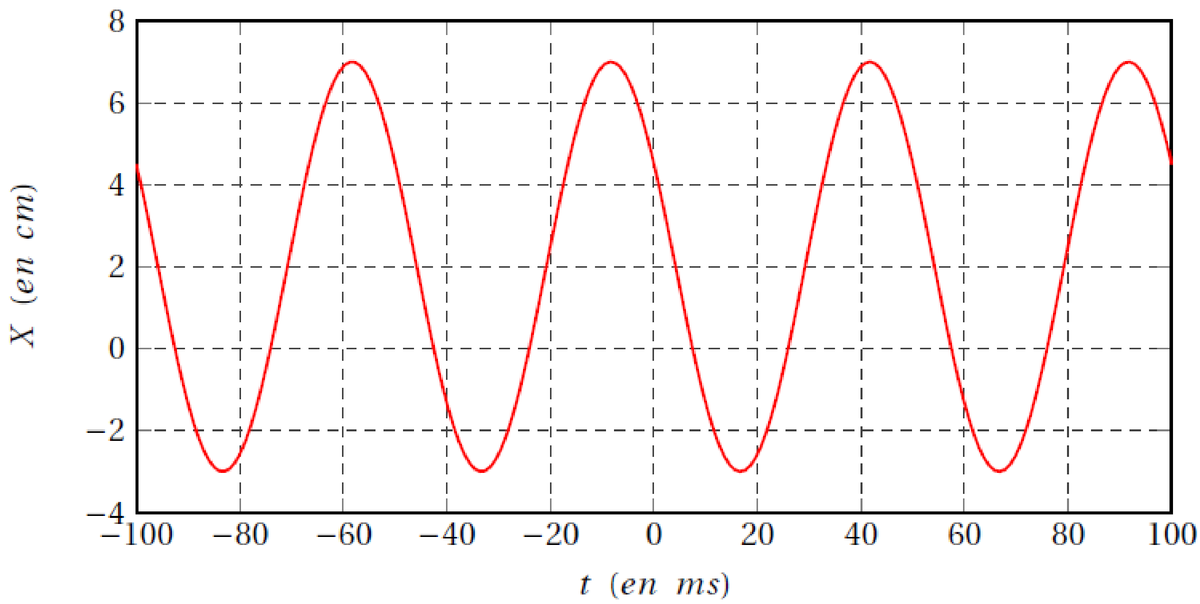
TD06 O.H. et signal sinusoïdal

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

1 L'oscillateur harmonique, qu'importe d'où il vienne ...

Exercice 1 - Manipulation du signal d'un OH :

1. Quelles équations correspondent à celles d'un oscillateur harmonique ?
a) $\ddot{X} + \omega X^2 = 0$. b) $\ddot{X} + \omega^2 X = Cste$. c) $\ddot{X} - \omega^2 X = 0$. d) $\ddot{X} - \omega^2 X = Cste$. e)$\omega^2 \ddot{X} + X = 0$.
2. Donner la solution $x(t)$ de l'équation différentielle $\dfrac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{eq}$ pour des conditions initiales quelconques $x(0) = x_0 > 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 > 0$.
3. Donner les expressions de la moyenne, l'amplitude et de la phase à l'origine.
4. On représente l'évolution temporelle du signal $X(t)$ (mesuré en cm). La position de la masse s'écrit sous la forme $X(t) = X_e + X_m \cos(\omega t + \phi)$. A l'aide de la figure, évaluer
   - ▷ X_e. A quoi correspond X_e ?
   - ▷ X_m. A quoi correspond X_m ?
   - ▷ ω et ϕ.
   - ▷ Calculer $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ en $t = 0$.



Exercice 2 - Oscillations harmoniques :

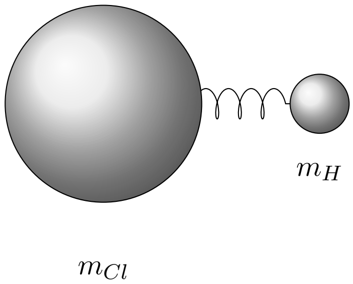
Un point matériel lié à un ressort élastique est en mouvement horizontal sans frottement. Sa position $x(t)$ est solution de l'équation de l'oscillateur harmonique. Au repos, la position de x est $x_{eq} = 2$cm.
On lance la masse depuis la position $x_0 = -3,0$cm, dans le sens des x croissants, avec une vitesse $v_0 =$ 50cm/s. La mesure de la période propre des oscillations donne $T_0 = 1,0$s.
1. Exprimer l'équation différentielle dont x est solution en fonction de T_0 et x_{eq}.
2. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_0, v_0, T_0 et t

3. Calculer l'amplitude A des oscillations.

Réponse : $x(t) = x_{eq} + x_0 \cos\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{v_0T_0}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{T_0}t)$; $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0T_0}{2\pi})^2} = 8.5$ *cm*

Exercice 3 - Vibration d'une molécule (∗) :

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8,5.10^{13}$ Hz. On donne les masses atomiques molaires : $M_H = 1$ $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{Cl} = 35,5$ $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ainsi que le nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}.



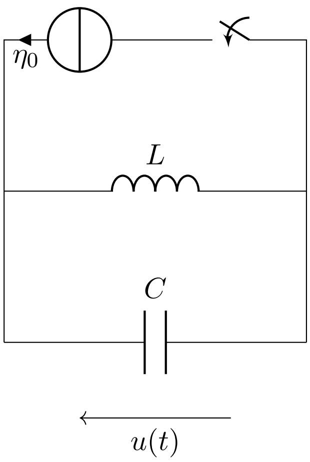
On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un "ressort" de raideur k

1. Calculer la masse d'un atome d'hydrogène m_H et d'un atome de chlore m_C
2. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe
3. A l'aide des données du problème, calculer la constante de raideur k.
4. On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6,63.10^{-34}$ $\text{J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène ainsi que sa vitesse maximale.

Réponse : $m_H = M_H/\mathcal{N}_A = 1.66\ 10^{-24} g$; $m_C = M_C/\mathcal{N}_A = 5.90\ 10^{-23} g$; $m_C >> m_H$; $k = (2\pi)^2 f^2 M_H = 4,7.10^2$ N/m ; $A = 0,1$ Å ; $v_{max} = 5,8.10^3$ $m.s^{-1}$

2 Circuit électrique

Exercice 4 - Etude d'un circuit LC parallèle :

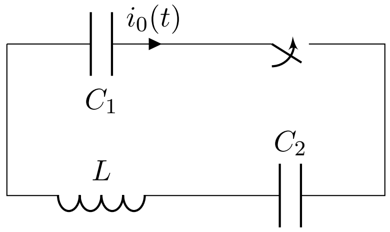


On considère le circuit ci-contre. Initialement :
- ▷ le condensateur n'est pas chargé
- ▷ la bobine n'est parcourue par aucun courant

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$
2. Exprimer $u(t = 0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.
3. En déduire la solution $u(t)$ à l'aide des conditions initiales.

Exercice 5 - Circuit à deux condensateurs :



On considère le circuit ci-contre. Initialement :

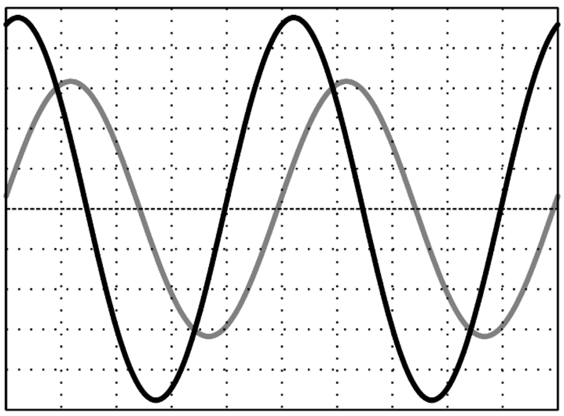
- ▷ le condensateur 1 est chargé à la tension V_0
- ▷ le condensateur 2 n'est pas chargé
- ▷ la bobine n'est parcourue par aucun courant

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la intensité $i_0(t)$
2. En déduire la solution $u(i_0(t)$ à l'aide des conditions initiales.
3. Exprimer les énergie électrostatique et magnétique dans les 3 dipôles.
4. Exprimer l'énergie totale du circuit.

3 Fonctions sinusoïdales

Exercice 6 - Déphasage :



La figure représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence $s_1(t)$ (en noir) et $s_2(t)$ (en gris). La ligne en tireté représente le niveau zéro pour les deux signaux. Une division de l'axe des temps correspond à 20 ms.

1. Déterminer la fréquence des signaux.
2. Calculer le déphasage entre les deux signaux et celui qui est en avance.
3. Quelle est la phase de s_1 au point le plus à gauche de l'écran ?

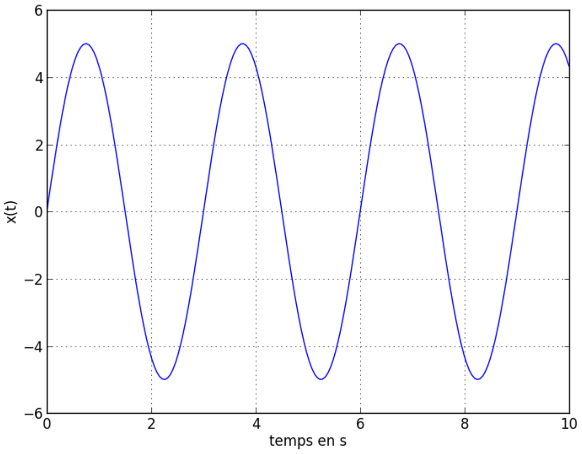
Réponses : $f = 10$ Hz; $s_2(t)$ est en retard de $\phi_0 = 72°$; $\phi_1(t_0) = -\frac{\pi}{10}$

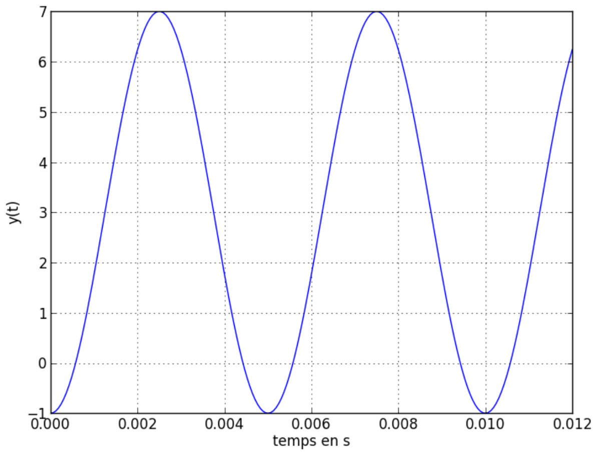
Exercice 7 - Sinusoïde :

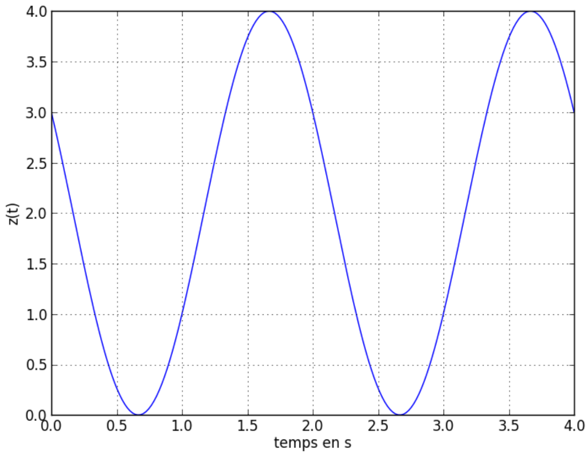
1. Représenter sur le même graphe $f(t) = -1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, $\frac{df}{dt}(t)$ et $g(t) = 2.\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Tracer sur le même graphe les fonctions : $x(t) = 1 - 2\sin(2\pi t)$ et $y(t) = 3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.
   On graduera les axes et on écrira toutes les informations utiles sur les graphes.

Exercice 8 - Sinusoïde :

Pour les trois courbes suivantes, donner l'expression numérique de la fonction, expliciter numériquement les deux paramètres de l'équation différentielle (ω_0 et la solution particulière) ainsi que les conditions initiales : valeur de la fonctione t de sa dérivée en $t = 0$.







TD06 O.H. et signal sinusoïdal

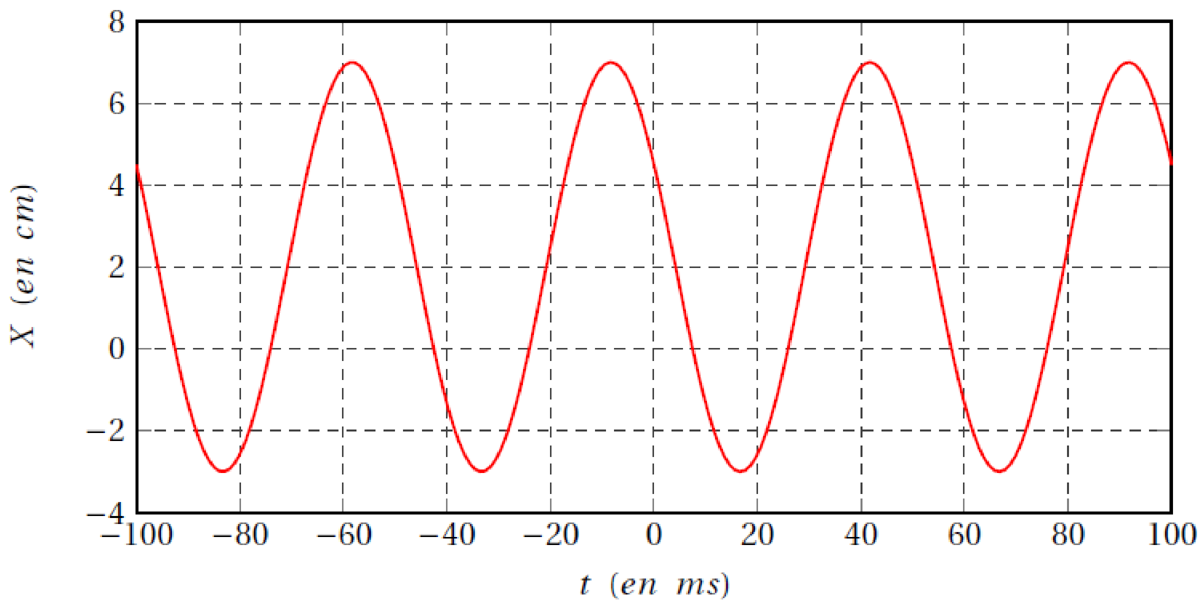
Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

1 L'oscillateur harmonique, qu'importe d'où il vienne ...

Exercice 1 - Manipulation du signal d'un OH :

1. a) NON b) OUI c) NON d) NON e) OUI avec $\omega = 1/\omega$.
2. On décompose en solution particulière et solution homogène : $X(t) = X_P + \widetilde{X}$ avec :
   - ▹ $X_P = X_{eq}$
   - ▹ $\widetilde{X} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, avec A et B des constantes d'intégration.

   Conditions initiales : $A + 0 + X_{eq} = x_0$ et $0 + \omega_0 B = v_0$ donc :
   $$X(t) = X_{eq} + (x_0 - X_{eq})\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$
3. X_{eq} est la valeur moyenne, l'amplitude $\sqrt{(x_0 - X_{eq})^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$ et $\tan\varphi_0 = \frac{v_0}{\omega_0(x_0 - X_{eq})}$.
4. On représente l'évolution temporelle du signal $X(t)$ (mesuré en cm). La position de la masse s'écrit sous la forme $X(t) = X_e + X_m\cos(\omega t + \phi)$. A l'aide de la figure, évaluer
   - ▹ X_e correspond à la valeur moyenne : c'est la valeur autour de laquelle oscille la courbe. Ici $X_e = 2$cm.
   - ▹ X_m est l'amplitude. C'est l'écart entre le maximum et la moyenne ou bien la moitié de l'amplitude crête à crête. Ici $X_m = 5$cm
   - ▹ On trouve ω avec la mesure de f elle même obtenu avec celle de T. Ici $2T = 100$ms donc $T = 50$ms, $f = 20$Hz et 126rad.s^{-1}
   - ▹ On mesure la pente de tangente en 0 (en remarquant qu'elle est négative) On trouve $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{-6.5\text{cm}}{10\text{ms}} = -6.5\text{m.s}^{-1}$.



Exercice 2 - Oscillations harmoniques :

1. x est solution d'une équation d'oscillateur harmonique : $\ddot{x}+\omega_0^2 x = K$ avec K une constante. On cherche ω_0 et K.
   - ▹ $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$
   - ▹ K s'obtient à l'aide de la solution particulière x_{eq} : $\omega_0^2 x_{eq} = K$.

   d'où : $\ddot{x} + \left(\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$.
2. On résout avec $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. On a :
$$x(t) = x_{eq} + x_0 \cos\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{v_0 T_0}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{T_0}t)$$
3. $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0 T_0}{2\pi})^2} = 8.5$ cm

Exercice 3 - Vibration d'une molécule ($*$) :

1. La masse molaire est la masse de $\mathcal{N}_A$ atomes. Donc $M_H = m_H \mathcal{N}_A \Rightarrow m_H = M_H/\mathcal{N}_A = 1.66\ 10^{-24}$g et $m_{Cl} = M_{Cl}/\mathcal{N}_A = 5.90\ 10^{-23}$g.
2. On remarque que le chlore est beaucoup plus lourd : comme un jokari, le chlore ne bouge pas.
3. L'équation du mouvement de la molécule d'hydrogène est : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}x_{eq}$.

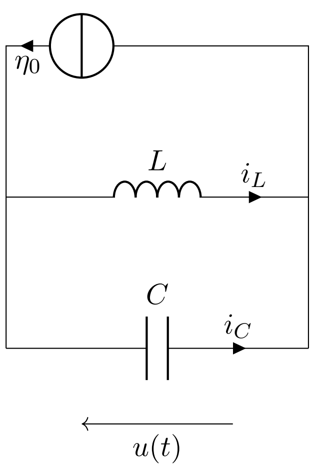
   La pulsation est alors $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et donc $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 4,7.10^2$ N/m.
4. Au maximum de son élongation, la vitesse de l'atome d'hydrogène est nul et donc, par conservation de l'énergie mécanique : $E_m = 0 + E_k$. L'énergie élastique du ressort est alors :
$$\frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}k\left(x_{max} - l_0\right)^2 \ ; \quad \text{avec } x_{max} = x_{eq} + A = l_0 + A \Rightarrow A = \sqrt{\frac{hf}{k}} = 0,1\text{Å}$$

   De la même façon, la vitesse est maximale quand l'énergie élastique est minimale donc :
$$\frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}m_H v_{max}^2 \ \Rightarrow \ v_{max} = \sqrt{\frac{hf}{m_H}}$$

   soit $v_{max} = 5,8.10^3$ m.s^{-1}

2 Circuit électrique

Exercice 4 - Etude d'un circuit LC parallèle :



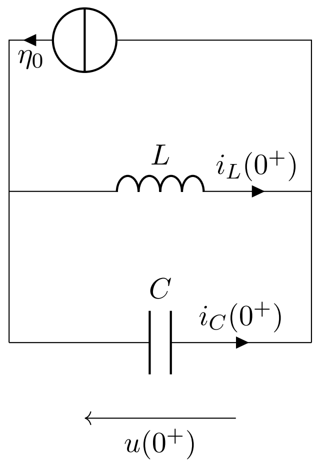
1.
   - ▹ **Loi des mailles** : tous les dipôles sont en parallèles, on introduit une seule tension u
   - ▹ **Loi des noeuds :** $\eta_0 = i_L + i_C$
   - ▹ **Loi des dipôles :** $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $u = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$.

   On part de la loi des mailles (*tant pis si il n'y a pas* u :$\eta_0 = i_L + i_C$.

   On remarque que pour remplacer i_L, il faut sa dérivée : on dérive donc la loi des nœuds : $0 = \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t}$

   On remplace : $0 = \dfrac{u}{L} + C\dfrac{\mathrm{d}^2 i_C}{\mathrm{d}t^2}$ et on met sous forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{LC}u = 0$.

2.



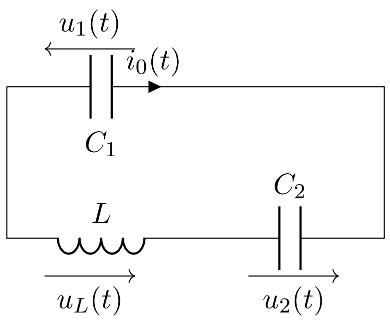
1.
- ▷ **Loi des noeuds :** $\eta_0 = i_L(0^+) + i_C(0^+)$
- ▷ **Relation de continuité :**
  la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé.
  l'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps : $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$ car l'interrupteur était ouvert

On obtient alors $\eta_0 = i_C(0^+)$.

Or $i_C(0)^+ = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+)$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{\eta_0}{C}$.

3. On résout et on a $u(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ avec comme condition initiale $u(0^+) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{\eta_0}{C}$.
Finalement $u(t) = \dfrac{\eta_0}{C\omega_0}\sin\omega_0 t$.

Exercice 5 - Circuit à deux condensateurs :



1.

- ▷ **Loi des mailles** : $u_1 + u_2 + u_L = 0$
- ▷ **Loi des dipôles** : $i_0 = C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$; $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}$; $i_0 = C_2\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$.

On part de la loi des mailles $u_1 + u_2 + u_L = 0$ et pour remplacer u_1 on a besoin de sa dérivée.

Donc on dérive l'équation et on met sous forme canonique

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{i_0}{C_1} + \frac{i_0}{C_2} + L\frac{\mathrm{d}^2 i_0 p}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_0}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_0 = 0$$

On identifie $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{L}\dfrac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}}$.

2. On décompose i_0 comme somme d'une solution particulière et une solution de l'équation homogène.
   - ▷ particulière : $i_P(t) = K$ et $K = 0$ (via l'équation différentielle)
   - ▷ homogène : $\widetilde{i}(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$

   Les **CI** sont : $i_0(0^+) = 0$ (continuité de l'intensité dans une bobine) et $\dfrac{\mathrm{d}i_0}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{u_L(0^+)}{L} = \dfrac{-V_0}{L}$.
   On trouve alors $a = 0$ et $b = -V_0/L\omega_0$ et finalement $i_0 = \dfrac{-V_0}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t$.

3. ▷ énergie d'une bobine : $\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li_0^2(t) = \dfrac{V_0^2}{2\omega_0^2 L}\sin^2\omega_0 t$.
   ▷ énergie du condensateur 1 : $\mathcal{E}_1 = \dfrac{1}{2}C_1 u_1^2(t)$.
   Pour trouver u_1 on utilise la relation du condensateur :

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \frac{i_0}{C_1} \quad \text{soit } u_1(t) = \frac{V_0}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t + C \text{ avec } C \text{ une constante d'intégration}$$

   CI : $u_1(0^+) = V_0$ donc $C = V_0\left(1 - \dfrac{1}{\omega_0^2}\right)$. Finalement $u_1(t) = \dfrac{V_0}{\omega_0^2}\cos\omega_0 t + V_0\left(1 - \dfrac{1}{\omega_0^2}\right)$.

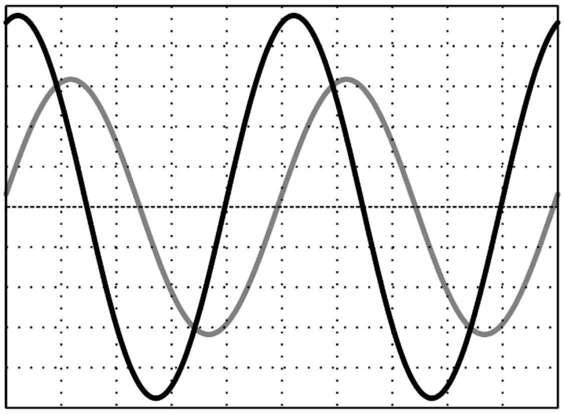
- énergie du condensateur 2 : $\mathcal{E}_2 = \dfrac{1}{2}C_1 u_1^2(t)$

  Pour trouver u_2 on fait comme avant et on a : $u_2 = \dfrac{V_0}{\omega_0^2}(\cos\omega_0 t - 1)$.

4. L'énergie totale du circuit est l'énergie à $t = 0$ soit $\mathcal{E}_{tot} = \dfrac{1}{2}C_1 V_0^2$.

3 Fonctions sinusoïdales

Exercice 6 - Déphasage :



1. $f = 10$ Hz (on fera bien attention à l'échelle horizontale pour la mesure de la épriode).
2. On mesure le retard temporelle τ de s_2 par rapport à s_1 et on en déduite le déphasage $\Delta\varphi = \omega\tau = 2\pi f\tau = 72°$
3. On mesure la valeur de s_1 en $t = 0$ et on en déduit la valeur absolue de la phase. Comme la fonction est croissante en $t = 0$, la phase est négative donc $\phi_1(t_0) = -\frac{\pi}{10}$.

Chap VII

Oscillateurs amortis et régimes transitoires

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ **Oscillateur amorti**
  - forme canonique
  - facteur de qualité Q, coefficient d'amortissement ξ
  - pulsation propre ω_0

- ♡ **Régime pseudo-périodique** $Q > 1/2$
  - Type de régime et conditions d'obtentions
  - Forme générale de la solution
  - Forme de la courbe, enveloppe exponentielle
  - régime transitoire : durée en fonction de Q, nombre d'oscillations, période des oscillations

- ♡ **Régime apériodique** $Q < 1/2$
  - Type de régime et conditions d'obtentions
  - Forme générale de la solution
  - Forme de la courbe
  - régime transitoire : durée en fonction de Q

- ♡ **Régime apériodique** $Q = 1/2$
  - Conditions d'obtentions
  - Forme générale de la solution
  - Forme de la courbe
  - Durée du régime transitoire : plus petit possible

Savoir Faire

Identifier ω_0 et Q à partir de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti

Résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur amorti :
- *identifier le régime suivant la valeur de Q*
- *trouver la forme de la solution*
- *utiliser les CI pour trouver les constantes d'intégration*

A l'aide d'un graphe estimer
- *le facteur de qualité*
- *le temps caractéristique de décroissance et la durée du régime transitoire*

Trouver la valeur des paramètres pour être en régime critique et avoir le régime transitoire le plus cours

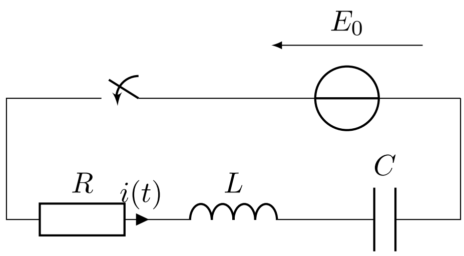
L'oscillateur harmonique, dont les oscillations ne s'arrêtent jamais. est un modèle, purement théorique, qui permet de modéliser en première approximation la réalité. Un OH se composent schématiquement de deux éléments qui échange de l'énergie indéfiniment.
Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de dissipation d'énergie qui stoppe les oscillations des système. Ce sera également l'occasion d'approfondir notre connaissance des régimes transitoires.

Les éléments de ce chapitre permettent par exemple de discuter les amortisseurs automobiles, qui ne peuvent être modélisés par se simples ressort sinon ils oscilleraient indéfiniment et n'amortiraient rien.
Dans un premier temps nous allons nous intéresser à un système électrocinétique : le circuit RLC série.

1 Le circuit RLC série

Comme discuté dans le chapitre précédent, un circuit LC n'existe pas : dans un circuit électrique, il y a toujours un effet joule, le circuit chauffe. On représente ce phénomène par l'ajout d'une résistance R. Nous étudions maintenant le courant dans le circuit électrique de la figure suivante.

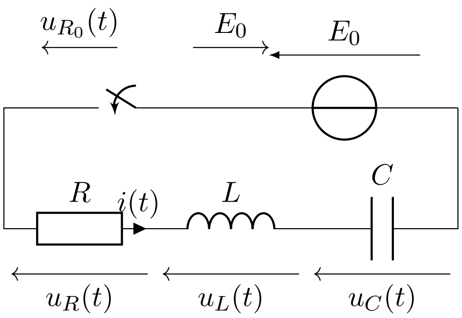
Objectif : Déterminer l'évolution de $u_C(t)$, tension aux bornes du condensateur, pour le circuit suivant, avec le condensateur initialement déchargé.



1.1 Mise en équation électrique

Reprenons pas à pas la méthode vue dans le chapitre précédent de mise en équation d'un circuit électrique.

▷ **1) Définition des grandeurs électriques :**
On définit les tensions aux bornes des dipôles en convention récepteur



▷ **2) Relations des dipôles :**

▷ loi d'Ohm

$$u_R(t) = Ri(t) \; ; \tag{1.1}$$

▷ bobine

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \; ; \tag{1.2}$$

▷ condensateur

$$q(t) = Cu_C(t) \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \; . \tag{1.3}$$

▷ **3) Equations électriques :**
Ici on a une maille et pas de noeud. Donc **Loi des mailles :**

$$E = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)\ . \tag{1.4}$$

▷ **4-5) Obtention de l'équation électrique :**
Utilisons (1.1) et (1.2) pour remplacer les tensions dans (1.4). Il vient

$$E = Ri(t) + u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\ .$$

On obtient donc l'équation du second ordre sur la tension au borne du condensateur :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2}\ .$$

On met ensuite l'équation sous forme canonique en divisant par LC pour avoir un coefficient 1 devant la dérivée d'ordre supérieure :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_c(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_c(t) = \frac{E}{LC}\ .$$

Cette relation est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. Mais contrairement à l'OH, le terme en dérivé première intervient.

| *Remarque :* *Si on prend $R = 0$, on retrouve bien l'oscillateur harmonique.*

1.2 Forme canonique, pulsation propre et facteur de qualité

Définition. Oscillateur amorti
Un oscillateur amorti est un système physique décrit par la fonction $x(t)$ vérifiant l'équation différentielle linéaire à coefficient constants du second ordre suivante

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \omega_0^2x_{\mathrm{eq}}} \tag{1.5}$$

avec
- ▷ ω_0 la **pulsation propre** du système,
- ▷ x_{eq} la valeur à l'équilibre de la fonction x
- ▷ Q le **facteur de qualité du système**, qui est un nombre sans dimension.

Comment trouver les coefficients ω_0 et Q ?
On procède par identification entre l'équation (1.5) connue par cœur et l'équation physique obtenue en commençant par ω_0.

▷ Pulsation propre ω_0
Par identification du coefficient devant la fonction, on trouve dans notre problème

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

▷ Facteur de qualité Q
Par identification du coefficient devant la dérivée première, on trouve dans notre problème

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}\ .$$

L'expression du facteur de qualité n'est pas à connaître par cœur par contre il faut savoir la retrouver rapidement à partir de la forme canonique de l'équation.

Interprétation physique.

▷ **Pulsation propre ω_0**
C'est la pulsation typique des oscillations. On définit grâce alors :
1. la fréquence propre des oscillations :$\omega_0 = 2\pi f_0$

2. la période propre des oscillations :
$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Attention ! Comme on le verra par la suite, ω_0, f_0, T_0 donnent des **ordres de grandeurs**. La véritable fréquence des oscillations ne sera âs f_0.

Vocabulaire : une grandeur "propre" désigne une grandeur caractéristique d'un système

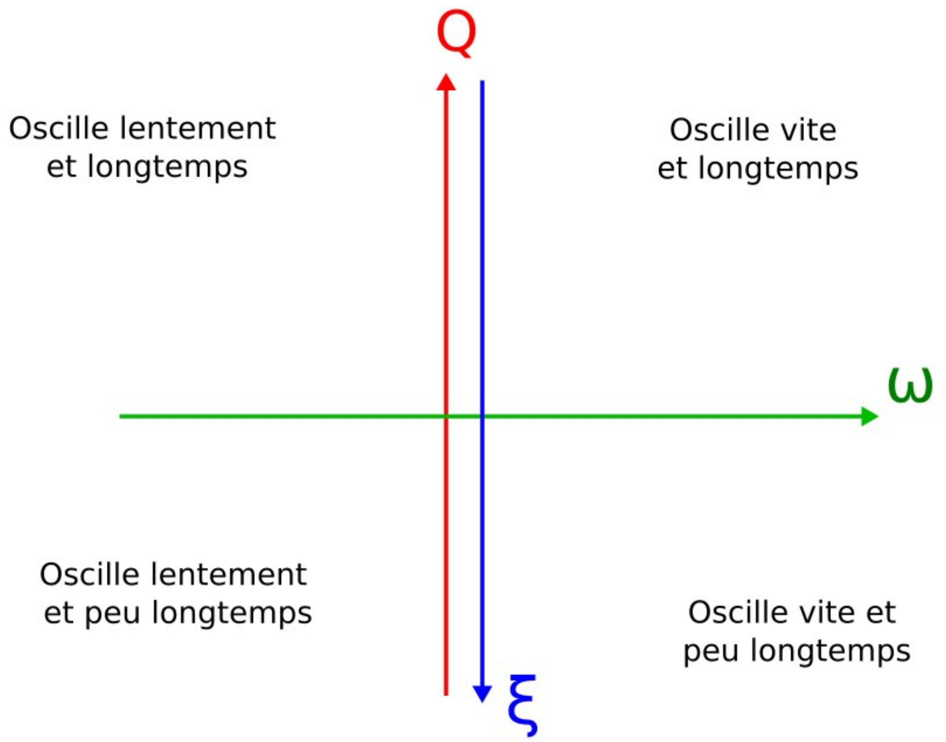
période propre des oscillations $\Longleftrightarrow$ période caractéristique des oscillations du système étudié

▷ **Facteur de qualité Q**
Il représente la "qualité" de l'oscillateur, *i.e.* le nombre de fois que le système va osciller. Plus Q est grand, plus il y aura d'oscillations avant que le système ne s'arrête.

Définition. Facteur d'amortissement
On définit le facteur d'amortissement ξ comme :
$$\xi = \frac{1}{2Q}.$$
Plus l'amortissement est grand, moins le système oscillera longtemps.

| *Application 1 : Vérifier que le facteur de qualité est bien sans dimension.*

Résumer en un schéma :



Propriété.
▷ équation du premier ordre ⇒ une condition initiale, $f(t=0)$
▷ équation du second ordre ⇒ deux conditions initiales, $f(t=0)$ et $f'(t=0)$

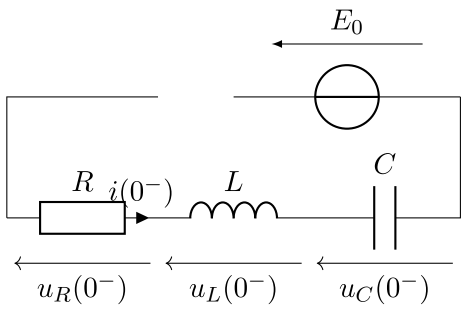
Ici, l'équation différentielle obtenue est d'ordre 2 : il faut deux conditions initiales, $u_C(0^+)$ et $u'_C(0^+)$.

> ***Exemple 1 : Recherche des conditions initiales***
> 1. *Représenter le circuit électrique aux instants initiaux $t = 0^-$ et $t = 0^+$.*
> 2. *A l'aide des propriétés de continuités des grandeurs électriques, donner la valeur de deux grandeurs électriques à $t = 0^+$.*
>   *En déduire $\frac{du_C}{dt}(0^+)$*
> 3. *Exprimer $u_R(0^+)$, $u_L(0^+)$, $i'(0^+)$ et $u'_L(0^+)$.*

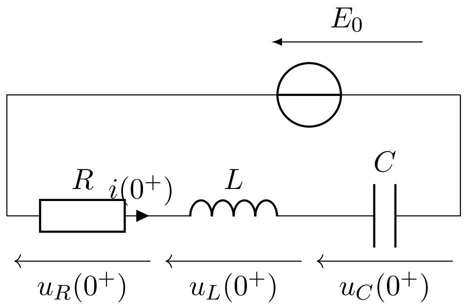
1) Etude du circuit à l'instant initial

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Il est donc nécessaire de distinguer deux instants initiaux : $t = 0^-$, juste avant qu'on ferme l'interrupteur et $t = 0^+$, juste après.

A $t = 0^-$, on a le circuit électrique suivant :
- Le condensateur est initialement déchargé donc : $u_C(0^-) = 0$.
- L'interrupteur est ouvert depuis longtemps donc : $i_L(0^-) = 0$.



A $t = 0^+$, on a le circuit électrique suivant :



On ne peut *a priori* rien dire sur les grandeurs électriques à $t = 0^+$, sauf :
- la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue donc :
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$$
- l'intensité qui circule dans une bobine est une fonction continue donc :
$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

2)Condition initiale de l'équation différentielle On veut $u_C(t = 0)$ et $u'_C(t = 0)$.

D'après la loi du condensateur $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Cette relation est vraie à tout instant, notamment à $t = 0^+$. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C} = 0$$

Autres grandeurs électriques
- ▷ Comme $i(0^+) = 0$ alors $u_R(0^+) = 0$
- ▷ Loi des mailles : $u_L(0^+) = E_0$
- ▷ Relation de la bobine : $i'(t) = u_L(t)/L$ donc $i'(0^+) = u_L(0^+)/L = E_0/L$
- ▷ Loi des mailles : $u_L(t) = E_0 - u_R(t) - u_C(t)$ donc

$$u'_L(t) = 0 - u'_R(t) - u'_C(t) = -Ri'(t) - i(t)/C$$

donc $u'_L(0^+) = -\frac{RE_0}{L} - 0$.

2 Différentes solutions de l'oscillateur harmonique

. Les résultats de ce paragraphe, bien que nous les étudions dans le cas d'un circuit électrique, sont des résultats généraux, applicables à tout système dont l'évolution est régie par ce type d'équation.

Notation des dérivées : On introduit une nouvelle notation pur les dérivées temporelles qui seront marquées d'un point :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \iff \dot{u}_C(t) \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{u}_C(t)$$

2.1 Décomposition de la solution

Équation différentielle linéaire : la solution est la somme
- ▷ une solution particulière de l'équation $u_{C,\mathrm{p}}(t)$
- ▷ une solution générale de l'équation homogène $u_{C,\mathrm{h}}(t)$

Solution particulière $u_P(t)$ On cherche ici la solution particulière sous la forme d'une constante. Dans ce cas là, les dérivées de $u_{C,\mathrm{p}}(t)$ s'annule. On obtient facilement que : $u_{C,\mathrm{p}}(t) = E_0$.

Forme générale des solutions de l'équation homogène
On cherche $u_{C,H}$, forme générale des solution de l'équation homogène :

$$\ddot{u}_{C,H}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_{C,H}(t) + \omega_0^2 u_{C,H}(t) = 0\ .$$

Problème : on a pu voir expérimentalement que le signal possédait deux régimes bien particuliers : un oscillant, l'autre non. Trouver la solution homogène risque d'être plus compliqué ...

2.2 Le polynôme caractéristique

On calcule le **polynôme caractéristique** de l'équation homogène en remplaçant chaque dérivée de la fonction $u_{C,H}$ par une variable r à la puissance n, où n est l'ordre de dérivation. On a :

$$\begin{cases} u_{C,H}(t) \Rightarrow r^0 = 1 \\ \dot{u}_{C,H}(t) \Rightarrow r \\ \ddot{u}_{C,H}(t) \Rightarrow r^2 \end{cases}$$

Propriété. Polynôme caractéristique d'un oscillateur amorti
L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$\ddot{u}_C(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$$

est l'équation du second degré, d'inconnue r :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0\ .$$

Discrimant Δ et signe
Selon le signe de ce discriminant, les racines de ce polynôme sont réelles ou complexes.

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)\ .$$

Signe de Δ :

$$\Delta < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{Q^2} < 4 \Rightarrow Q^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$$

- ▷ $\Delta < 0 : Q > 1/2$
- ▷ $\Delta = 0 : Q = 1/2$
- ▷ $\Delta > 0 : Q < 1/2$

2.3 Le régime pseudo-périodique Q>1/2

Sens physique :
Le facteur de qualité est grand, on s'attend à avoir des oscillations. Ce cas s'obtient pour un facteur d'amortissement $\xi < 1$: le système est faiblement amorti.

▶ Solution du polynôme

Dans ce cas, selon l'équation **??**, on a $\Delta < 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont alors sous la forme

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\underbrace{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}}_{\omega} .$$

▶ Solution de l'équation homogène

$$u_{C,\mathrm{h}}(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos\omega t + B\sin\omega t]$$

avec A et B des constantes inconnues, et $\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \frac{\omega_0}{2}\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}$. *Astuce :* partie réelle dans l'exponentielle, partie imaginaire dans le cos/sin

▶ Solution générale de l'équation

La somme de la solution particulière $u_{C,\mathrm{p}}$ et de la solution homogène $u_{C,\mathrm{h}}$. Il vient la **solution de l'équation différentielle**

$$u_C(t) = u_{C,\mathrm{h}}(t) + u_{C,\mathrm{p}}(t)$$

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos\omega t + B\sin\omega t] + E_0$$

avec A et B deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

▶ Condition initiales

On donne les condition initiales suivantes :

$$u_C(t=0) = 0 \ \text{ et } \ u'_C(t=0^+) = 0$$

Trouver les deux constantes d'intégration A et B.

Attention ! Bien maîtriser les calculs avec la dérivée : ce n'est pas évident mais ce sera tout le temps le même calcul ! On s'entraîne !!

On a :

$$u_C(t=0) = u_P + 1 \times (a \times 1 + b \times 0) = u_P + a$$

Pour la dérivée :

$$u'_C(t) = 0 + \frac{-\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t)$$

On évalue en zéro :

$$u'_C(t) = \frac{-\omega_0}{2Q}(a+0) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(0 + b\omega) = -\frac{\omega_0}{2Q}a + b\omega$$

Avec nos deux conditions initiales on trouve : $a = -E_0$ et $b = -\frac{\omega_0}{2Q\omega}E_0$.

Application 2 : *Même questions mais avec :*
- ▷ $u_C(t=0) = V_0$ et $u'_C(t=0) = 0$
- ▷ $u_C(t=0) = 0$ et $u'_C(t=0) = V_0/(RC)$
- ▷ $u_C(t=0) = V_0$ et $u'_C(t=0) = V_0/(RC)$

REGIME PSEUDO-PERIODIQUE

Type de régime :
Le régime pseudo périodique correspond à un régime oscillant et faiblement amorti.

Condition d'obtention :
Le régime pseudo-périodique s'observe pour un grand facteur de qualité

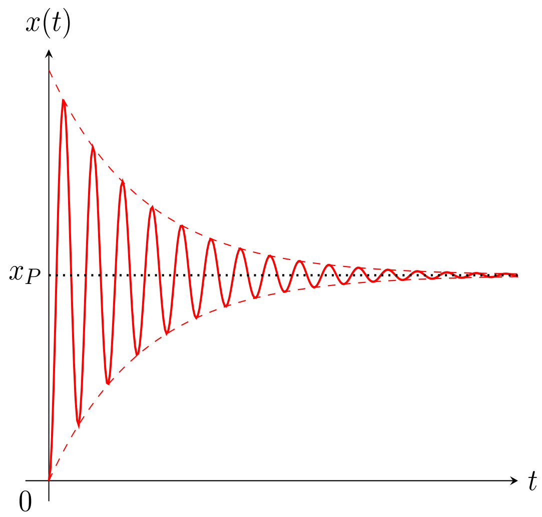
$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

ou un petit coefficient d'amortissement $\xi < 1$

Définition. Solution de l'équation différentielle
Dans ce cas, le régime transitoire est un régime oscillant à une pulsation différente de ω_0 dont l'amplitude décroît exponentiellement.
La solution $x(t)$ s'écrit comme :

$$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{enveloppe}} \times \underbrace{[A\cos\omega t + B\sin\omega t]}_{\text{Oscillateur Harmonique}} + \underbrace{x_P}_{\text{solution particulière}}$$

avec $\frac{\omega_0}{2}\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}$



Attention ! La pulsation ω des oscillations n'est pas égale à ω_0 !! En effet : $\omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - Q^{-2}} \neq \omega_0$
Elle dépend de Q.

Régime transitoire : des oscillations

- Durée : plus Q est grand, plus la durée régime transitoire $\mathcal{T}$ est longue

$$\mathcal{T} \sim \frac{Q}{\omega_0}$$

- Nombre d'oscillations : plus Q est grand, plus le nombre N d'oscillations est grand

$$\boxed{N \simeq 1.5Q}$$

- Période T des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ si Q est grand}$$

2.4 Le régime apériodique (ou sur-amorti) $Q < 1/2$

Sens physique :
Le facteur de qualité est faible, on s'attend à avoir peu voir pas oscillations. Ce cas s'obtient pour un facteur d'amortissement $\xi > 1$: le système est fortement amorti.

▶ Solution du polynôme

Dans ce cas, on a $\Delta > 0$. Les racines du polynôme caractéristique sont alors réelles

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2}\left(\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)$$

Attention ! $r_{1,2} < 0$ car $\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} < \frac{1}{Q}$.

▶ Solution de l'équation homogène

La **solution de l'équation homogène** s'exprime alors par

$$u_{C,\mathrm{h}}(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$$

avec A et B des constantes inconnues, et r_1 et r_2 les deux racines exprimées précédemment.

▶ Solution générale de l'équation

La solution générale de l'équation est sa somme de la solution particulière $u_{C,\mathrm{p}}$ et de la solution homogène $u_{C,\mathrm{h}}$.

$$u_C(t) = u_{C,\mathrm{h}}(t) + u_{C,\mathrm{p}}(t)$$
$$u_C(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) + E_0$$

avec A et B deux constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

REGIME APERIODIQUE

Type de régime :
Le régime pseudo périodique correspond à un régime sans oscillation et fortement amorti.

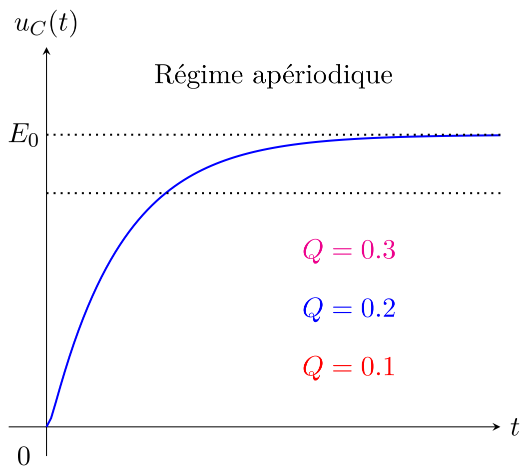
Condition d'obtention :
Le régime pseudo-périodique s'observe pour un petit facteur de qualité

$$\boxed{Q < \frac{1}{2}}$$

ou un grand coefficient d'amortissement $\xi > 1$

Définition. Solution de l'équation différentielle
Il n'y a pas d'oscillation, la solution est la somme de deux exponentielles.

$$u_C(t) = \underbrace{A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)}_{\text{exponentielles décroissantes}} + \underbrace{E_0}_{\text{solution particulière}}$$



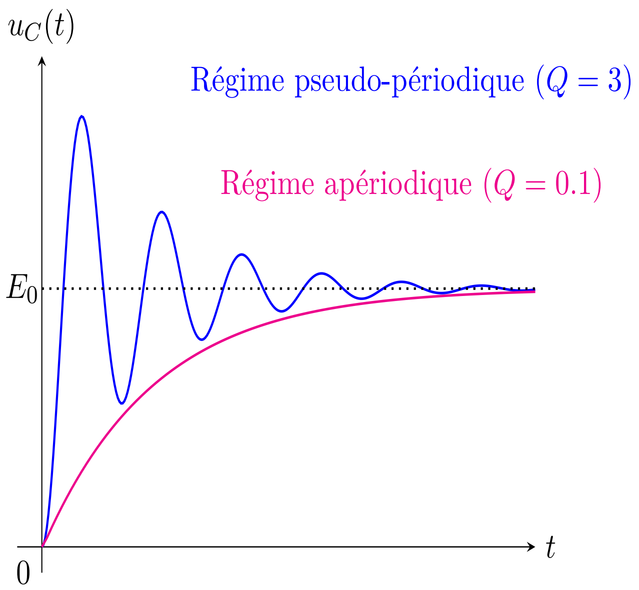
Régime transitoire : pas d'oscillations

▷ Durée : plus Q est petit, plus la durée régime transitoire $\mathcal{T}$ est longue

$$\mathcal{T} \sim \frac{1}{\omega_0 Q}$$

3 Classification des régimes transitoires et régime critique

3.1 Notion de régime transitoire



Les deux solutions décrites précédemment on un point commun : bien que différentes, elles tendent toutes deux aux temps longs vers la solution particulière.
Au bout d'un certain temps, quelle que soit le régime la tension est la même : elle est égale à E_0, la tension du générateur.

Définition. Régime transitoire
Le régime transitoire est la durée pendant laquelle le signal tend vers sa valeur finale.
On le caractérise par sa durée, notée $\mathcal{T}$

La connaissance de $\mathcal{T}$ est souvent cruciale :

- on veut observer le régime transitoire : par exemple, on veut observer des oscillations pour faire des mesures sur le système. Il faut observer ce qui se passe avant, soit pour $t < \mathcal{T}$.
  On cherche alors à avoir dans ce cas là $\mathcal{T}$ le plus grand possible
- le régime transitoire est souvent à éviter.
  On veut que le système tendent le plus rapidement possible vers sa valeur finale : on cherche alors à minimiser ce régime transitoire, et donc à minimiser $\mathcal{T}$.

3.2 Régime pseudo-périodique

▶ Durée du régime transitoire

C'est l'amplitude de l'enveloppe qui détermine le régime transitoire. Lorsque l'enveloppe devient très petite, les oscillations sont très faibles : le régime transitoire est terminé.
L'enveloppe est de la forme :

$$\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$.
Dans ce cas la fonction est quasi nulle pour $t > 5\tau$ soit :

$$t > \mathcal{T} = \frac{10Q}{\omega_0}$$

Propriété.
La durée $\mathcal{T}$ du régime transitoire en régime pseudo-périodique est d'autant plus long que Q est grand.

$$\mathcal{T} \sim \frac{Q}{\omega_0}$$

▶ Nombre N de pseudo-oscillations

Combien d'oscillations va-t-on observé ?

$$N = \frac{\text{durée du régime transitoire}}{\text{durée d'une oscillation}} = \frac{5\tau}{T}$$

avec T la période d'une oscillation. Cette dernière est donnée par la partie OH

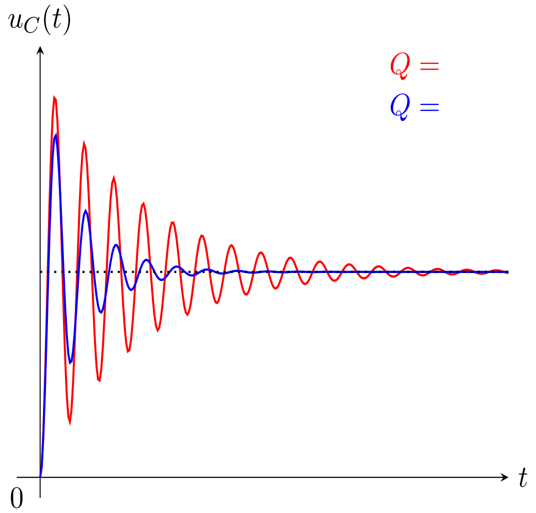
$$A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

donc $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, il vient

$$N = \underbrace{\frac{10}{4\pi}\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)^{1/2}}_{=\simeq 1.5} Q\,.$$

Propriété.

On retiendra que le nombre N de pseudo-oscillations observables est donné par $\boxed{N \approx 1.5\,Q}$.



3.3 Régime apériodique

La durée d'un régime transitoire d'un régime exponentiel est liée à la constante de temps dans l'exponentielle. Ici :

$$A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + B\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$$

avec $\tau_i = 1/|r_i|$

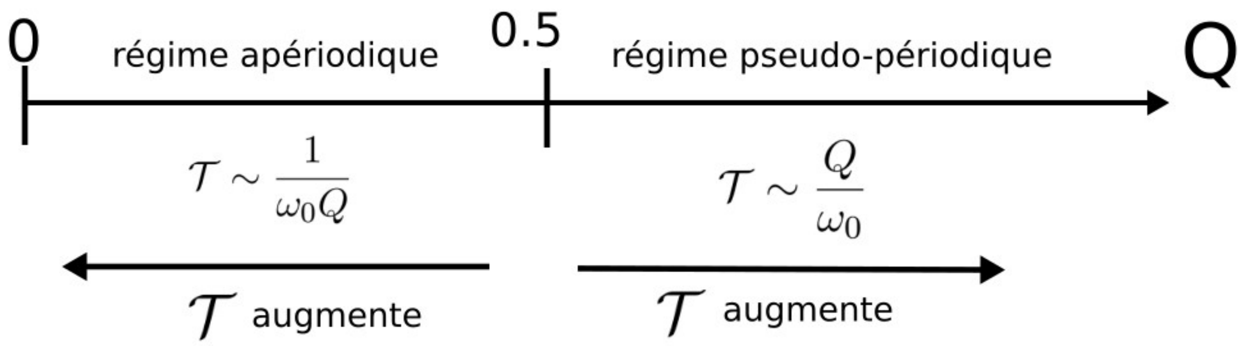
Attention ! $r_i < 0$ et $\tau > 0$.

Il y a deux exponentielles donc deux constantes de temps $1/|r_1|$ et $1/|r_2|$.
La durée du régime transitoire sera imposée par le temps le plus long. Comme $|r_1| > |r_2|$, le temps caractéristique le plus long est $1/|r_2|$ et le durée du régime transitoire est donnée par $5/|r_2|$.
On admettra l'ordre de grandeur de la durée $\mathcal{T}$.

Propriété.
La durée $\mathcal{T}$ du régime transitoire du régime apériodique est d'autant plus long que Q est petit.

$$\mathcal{T} \sim \frac{1}{\omega_0 Q}$$

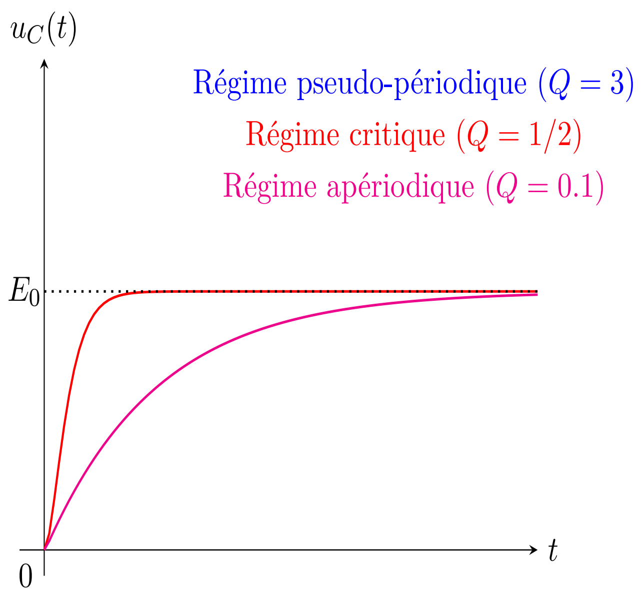
Durée des regimes transitoires :



On voit alors que le régime transitoire le plus court est atteint pour une valeur du facteur de qualité $Q = \frac{1}{2}$: c'est le régime critique.

3.4 Le régime critique $Q = 1/2$

Définition. Régime critique
Le régime critique est le régime intermédiaire entre le régime pseudo-périodique et le régime apériodique.
Il s'observe pour rigoureusement $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$.
Cela correspond à un facteur d'amortissement $\xi = 1$: on parle d'amortissement critique.



Propriété. Durée du régime transitoire
C'est le régime transitoire le plus court et qui se rapproche le plus rapidement possible du régime permanent.

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\omega_0}$$

C'est un régime idéal car, dû aux incertitudes expérimentales, il est impossible d'avoir rigoureusement la condition $Q = 1/2$ sur un système réel. On peut toutefois s'en rapprocher suffisamment pour ne plus voir les oscillations tout en restant le plus court possible.

D'un point de vue mathématique, on a dans ce cas le discriminant du polynôme caractéristique qui est nul, et donc l'unique racine du polynôme caractéristique est égale à :

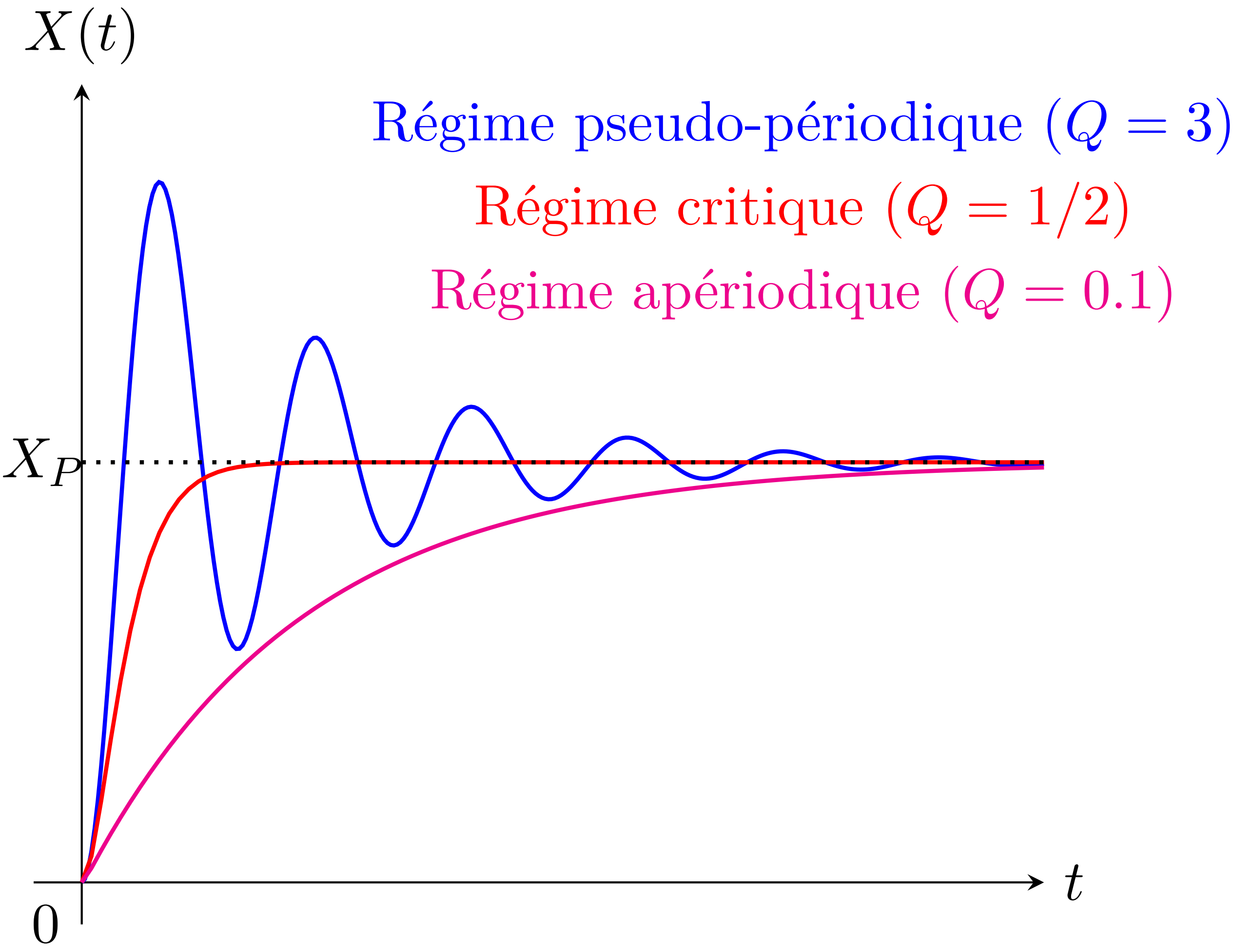
$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = \omega_0.$$

Il vient la solution de l'équation différentielle

$$u_C(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t) + E_0$$

avec A et B des constantes dépendant des conditions initiales.
Attention ! A et B n'ont pas la même dimension ! !

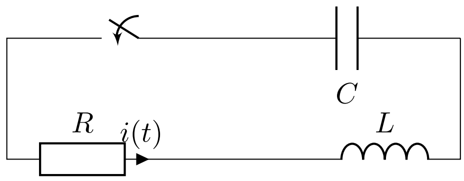
Les différentes solutions de l'oscillateur amorti



4 Circuit RLC libre et approche énergétique

On étudie le circuit suivant :

Le condensateur est initialement chargé à la tension $V_0 = 3$V et il n'y a pas de courant circulant dans la bobine.
A $t = 0$ on ferme l'interrupteur. On donne les valeurs de $C = 50$nF et $L = 10$mH.



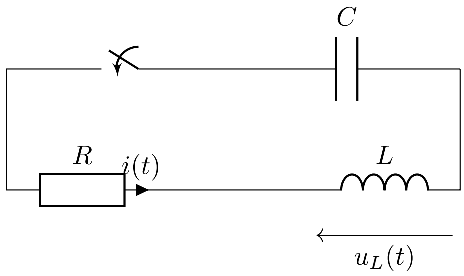
Application 3 :

1. *S'échauffer*
   - ▷ *Donner l'équation différentielle donc $u_L(t)$, tension aux bornes de la bobine est solution.*
   - ▷ *A quelle condition sur R peut-on obtenir des oscillations ? Faire l'application numérique.*
   - ▷ *Donner la valeur de R pour qu'on puisse visualiser environ 10 oscillations.*
   - ▷ *Pour quelle valeur de R le régime transitoire est-il le plus cours*
2. *S'entraîner*
   - ▷ *Donner la valeur de u_L et de sa dérivée à $t = 0^+$*
   - ▷ *On prend pour cette question $R = 10\Omega$.*
     Donner l'expression de $u_L(t)$ au cours du temps.

μDm Décroissance des oscillations

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

On considère un circuit RLC série sans générateur. Le condensateur est initialement chargé avec une tension U_0, aucun courant ne circulant dans la bobine.



Données : $C = 100\mu\text{F}$; $R = 100k\Omega$

1. Donner l'équation différentielle dont u_L est solution. On identifiera la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
2. Montrer que $u_L(0^+) = -U_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{RU_0}{L}$.
3. Montrer que pour une valeur critique, notée L_c, de l'inductance L, on observera des oscillations.
4. On observe une trentaine d'oscillations. Donner une valeur approchée de L et donner la forme générale des solutions de l'équations homogène. On précisera l'expression de ω en fonction de ω_0 et Q.
5. Montrer que
$$u_L(t) = -U_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos\omega t - \frac{R}{2L\omega}\sin\omega t\right)$$
6. Dans quel cas peut-on dire que $\omega \simeq \omega_0$? Est-ce le cas ici ?

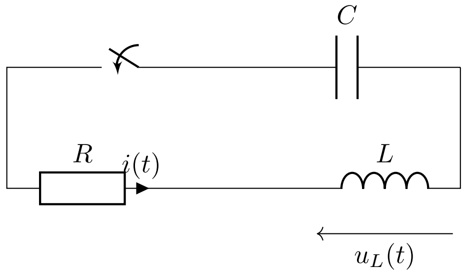
Amplitude et décrément logarithmique

7. Ecrire l'amplitude des oscillations sous la forme $A_0e^{-\alpha t}$. On précisera les valeurs de A_0 et α.
8. On appelle A_j l'amplitude de la $j$ième oscillations et t_j l'instant où elle se produit. Montre que
$$A_{j+1} = A_j e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}$$
9. En déduire alors que, dans l'hypothèse $\omega_0 \simeq \omega$ on a :
$$\frac{A_{j+1}}{A_j} = e^{-\pi/Q}$$

Décroissance des oscillations

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

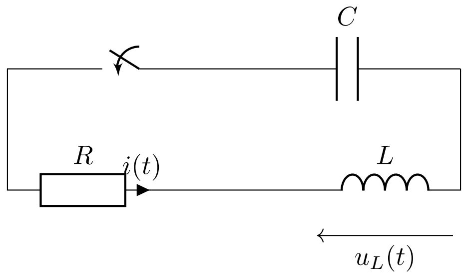
On considère un circuit RLC série sans générateur. Le condensateur est initialement chargé avec une tension U_0, aucun courant ne circulant dans la bobine.



Données : $C = 100\mu\text{F}$; $R = 100k\Omega$

1. *On applique la méthode ...*

   ▷ **Loi des mailles** : $u_L + u_C + u_R = 0$
   ▷ **Loi des dipôles :** $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$; $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$; $u_R = Ri$



$$u_L + u_C + Ri = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

Donc : $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{i}{C} + R\dfrac{u_L}{L} = 0$, on re-dérive :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_L + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

On identifie $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ donc

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2. Les grandeurs i et u_C sont continues. A $t = 0^-$, $u_C(0^-) = U_0$ et $i(0^-) = 0$ donc $u_C(0^+) = 0$ et $i(0^+) = 0$.
   ▷ **Loi des mailles** : $u_L + u_C + u_R = 0$ donc $u_L(0^-) + U_0 + Ri(0^-) = 0$ donc $u_L(0^-) = -U_0$
   ▷ la dérivée de u_L apparaît dans aucune loi des dipôles ⇒ on dérive la loi des maille

$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}_{=\frac{i}{C}=0} + R\underbrace{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}_{=\frac{u_L}{L}=-\frac{U_0}{L}} = 0$$

   On a alors $\dfrac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{RU_0}{L}$.

3. On observe des oscillations pour $Q > \dfrac{1}{2}$. On cherche la valeur critique :

$$Q = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ L = \frac{R^2}{4}C$$

4. Nombre d'oscillations $\simeq$ 1,5Q donc $Q \simeq 20$ soit $L = \dfrac{20^2}{R^2}C$.
   Dans le cas d'oscillations, la solution de l'oscillateur amorti pseudo-périodique et la solution homogène est :

$$\widetilde{u}_L = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right)$$

   avec $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}\underbrace{\sqrt{4 - 1/Q^2}}_{\simeq 1.999} \simeq \omega_0$

5. La solution est alors $u_L = u_P + \widetilde{u}_L$ avec u_P la solution particulière, $u_P = K = 0$. On trouve alors :

$$u_L = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right)$$

CI : $u_L(0) = -U_0$ et $\dot{u}_L(0) = U_0 R/L$ soit :

$$1 \times (A \times 1 + B \times 0) = -U_0 \quad \text{et} \quad -\frac{\omega_0}{2Q} \times 1\,(1 \times 1 + B \times 0) + 1 \times (-A\omega \times 0 + B\omega \times 1) = \frac{U_0 R}{L}$$

On trouve $A = -U_0$ et $B = \dfrac{U_0 R}{\omega L} - \dfrac{\omega_0 U_0}{2Q\omega} \simeq \dfrac{U_0 R}{\omega L} - \dfrac{U_0}{2Q}$ avec $\omega \simeq \omega_0$.
Donc :

$$A = -U_0 \text{ et } \ B = \frac{U_0 R\sqrt{LC}}{L} - \frac{U_0 R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}} = \frac{U_0 R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}} = \frac{U_0 R}{2\omega L}$$

Finalement :

$$u_L(t) = -U_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\cos\omega t - \frac{R}{2L\omega}\sin\omega t\right)$$

6. Pour $Q > 2$ ce qui est le cas ici.

Amplitude et décrément logarithmique

7. On passe de la forme $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ à la forme Amplitude$\times\cos(\omega t + \varphi)$ avec Amplitude=$\sqrt{A^2 + B^2}$.

$$u_L(t) = -U_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sqrt{1 + \frac{R^2}{4L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

L'amplitude est alors : $U_0\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{4L^2\omega^2}}e^{-\alpha t}$ avec $\alpha = \omega_0/2Q$.

8. Entre deux oscillations successives, il se déroule un temps T (la période). Donc :

$$A_j = A_0 e^{-\alpha t_j} \quad \text{et} \quad A_{j+1} = A_0 e^{-\alpha t_{j+1}} = A_0 e^{-\alpha(t_j + T)} = A_j e^{-alphaT}$$

On a bien $A_{j+1} = A_j e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}$.

9. Comme $\omega \simeq \omega_0$, $\dfrac{\omega_0}{2Q}T = \dfrac{\omega_0}{2Q}\dfrac{2\pi}{\omega} \simeq \dfrac{\omega_0}{2Q}\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{\pi}{Q}$.
Finalement :

$$\frac{A_{j+1}}{A_j} = e^{-\pi/Q}$$

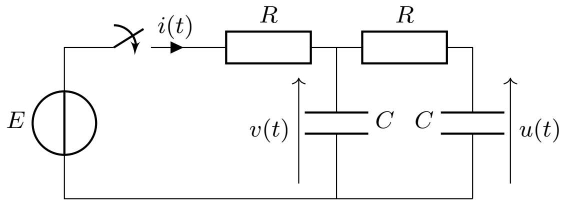
TD07 Oscillateurs amortis

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Circuit électrique

Exercice 1 - Deux condensateurs : :

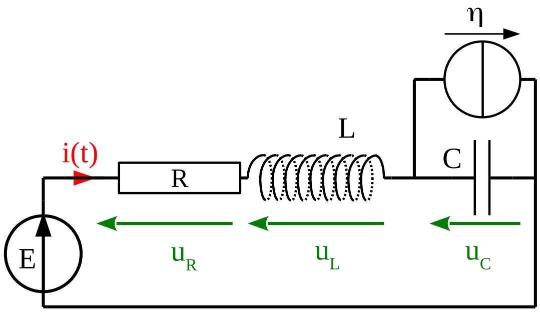
Le circuit schématisé ci-dessous comporte deux résistances R et deux condensateurs de capacité C, initialement déchargés. À l'instant $t = 0$ le branche sur un générateur de tension E.



1. On pose $\tau = RC$, montrer que la tension $u(t)$ vérifie l'équation différentielle
$$\frac{E}{\tau^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{\tau^2}\ .$$
2. Quel est le facteur de qualité Q du montage ?
3. Déterminer les conditions initiales
4. En déduire l'expression de $u(t)$.

Exercice 2 - Deux générateurs : :

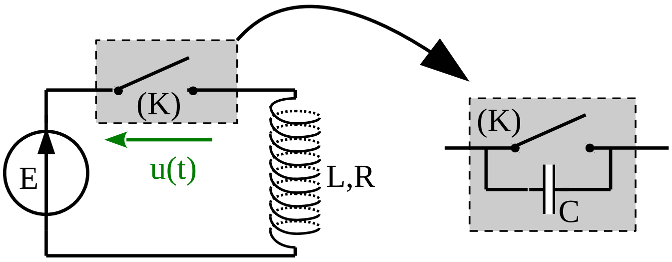
On considère le circuit ci-contre. Le générateur de tension continue a une FEM constante E et le générateur de courant idéal délivre un courant constant η. À l'instant $t = 0^-$, on suppose que le courant $i(t = 0^-) = i_0$ et la tension aux bornes du condensateur vaut $u_c(t = 0^-) = u_0$.



1. Déterminer par un minimum de calculs le courant i et les tensions aux bornes des différents éléments à l'instant $t = 0^+$. En déduire la valeur de $\frac{di}{dt}(t = 0^+)$
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée pas $i(t)$.
3. Quelle doit être la relation entre R, L et C pour avoir un régime transitoire pseudo-périodique ? Donner dans ce cas l'expression de $i(t)$ en fonction de la pseudo-pulsation ω.
4. Déterminer le courant i et les tensions aux bornes des différents éléments lorsque le régime permanent est atteint.
Comparé avec la valeur obtenue via l'expression de $i(t)$.

Réponses : 1. A $t = 0^+$, $i = i_0$, $u_c = u_0$, $u_R = Ri_0$ et $u_L = E - u_0 - Ri_0$; $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0^+} = \frac{E-u_0-Ri_0}{L}$
2. $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{LC}\eta$
3. Il faut que $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$; $i(t) = \eta + e^{-\frac{R}{2L}t}\left[(i_0 - \eta)\cos(\omega t) + \frac{2E-R\eta-2u_0-Ri_0}{2L\omega}\sin(\omega t)\right]$
4. A la fin du transitoire, $u_L = 0$, $i = \eta$, $u_R = R\eta$ et $u_c = E - R\eta$

Exercice 3 - Etincelle de rupture : :



On considère le montage de la figure ci-contre comprenant notamment une bobine réelle d'inductance $L = 10$ mH et de résistance $R = 10\ \Omega$. On donne $E = 1.0$ V.

1. Initialement, l'interrupteur (K) est fermé depuis longtemps. Quelle est la valeur du courant dans la bobine. A un instant $t = 0$ pris comme origine des temps, on ouvre (K). Que se passe-t-il ?

Afin de modéliser plus en détail le phénomène, on prend en compte qu'un interrupteur ouvert possède une certaine capacité C, très faible, mais non nulle. Un modèle plus réaliste est donc présenté sur la figure : l'interrupteur est équivalent à un interrupteur idéal en parallèle à une capacité $C = 10$ pF.

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ après l'ouverture de l'interrupteur. Calculer numériquement le facteur de qualité.
3. En faisant les approximations permises par la valeur de Q, donner une expression simplifiée de $u(t)$. Calculer numériquement la tension maximale atteinte aux bornes de l'interrupteur. Conclure.

Réponses : $Q = 3200$; $u_{max} \approx 3200$ V

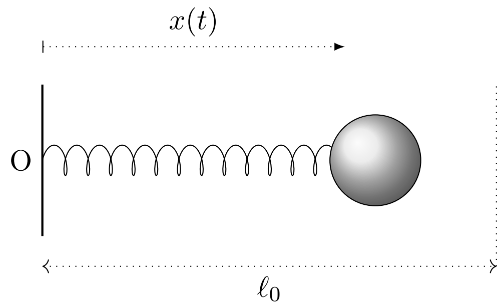
Oscillateur mécanique

Exercice 4 - Oscillation d'une masse ralenti par frottement fluide :
Une masse est attachée au bout d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Elle est libre de se déplacer horizontalement le long d'un axe (Ox) et l'autre extrémité du ressort est maintenu fixe en $x = 0$.

La masse oscille dans un fluide visqueux qui va exercer sur cette dernière une force F_α de **frottement fluide**. Cette force s'oppose au mouvement de la masse et on admettra son expression :

$$F_\alpha = -\alpha \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

avec v la vitesse de la mass et et α un coefficient de frottement fluide qui dépend de la forme de la masse et de la viscosité du fluide.



On appelle $x(t)$ la longueur du ressort à l'instant t. L'étude mécanique du système permet d'obtenir l'équation du mouvement de la masse :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - k(x(t) - l_0)$$

1. Identifier chacun des termes de l'équation : variation de la quantité de mouvement, force du fluide visqueux, force de rappel du ressort.
2. Donner la pulsation propre et le facteur de qualité du système.
   Discuter l'évolution de Q en fonction de α. Est-ce cohérent avec une analyse "intuitive" ?
3. On rappelle la valeur du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 pour un circuit RLC :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On remarque alors que L, l'inductance de la bobine, et m, la masse, joue des rôles symétriques. Compléter le tableau d'équivalence suivant :

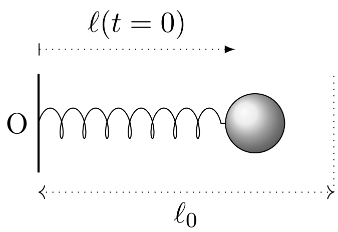
Électrique	**Mécanique**
L	m
R	
C	

4. On donne $m = 200$g et $\alpha = 10$kg.s^{-1}
   Donner la valeur minimal de k pour qu'on puisse observer des oscillations.

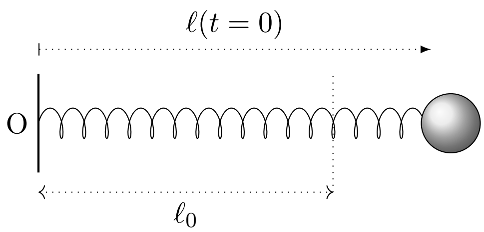
   On prendra par la suite $k = 10^5$N.m^{-1}.
5. Donner le nombre d'oscillations qu'on observera.
6. Initialement, on place à la masse à une distance $L > l_0$ du mur et on la lâche sans vitesse initiale.
   Donner l'expression de $x(t)$ au cours du temps en fonction de L, l_0, k, m, α.
7. Différence d'amplitude entre la première et la deuxième oscillation

Exercice 5 - Prévoir les comportements :
Pour chacun des cas suivant, on donne les conditions initiales et les valeurs de raideur du ressort k, de la masse m et du coefficient de frottement fluide α. A chaque fois
- ▷ donner la valeur du facteur de qualité et de la pulsation propre
- ▷ le régime transitoire qu'on observera
- ▷ la durée de ce régime et le nombre d'oscillations observées
- ▷ donner la solution $l(t)$ (on pourra se limiter aux cas 1 et 3)

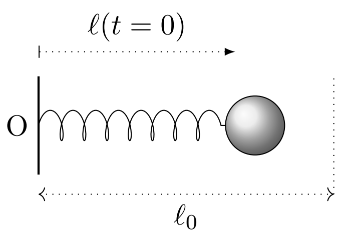
1)
- ▷ $l(t = 0) < l_0$ et $v(t = 0) = 0$
- ▷ $m = 10$ g
- ▷ $k = 100$ N.m^{-1} et $\alpha = 7$ kg.s^{-1}



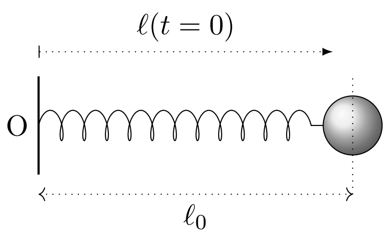
2)
- ▷ $l(t = 0) > l_0$ et $v(t = 0) = 0$
- ▷ $m = 100$ g
- ▷ $k = 50$ N.m^{-1} et $\alpha = 5.10^{-2}$ kg.s^{-1}



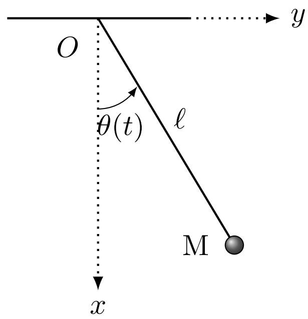
3)
- ▷ $l(t = 0) < l_0$ et $v(t = 0) = v_0$
- ▷ $m = 20$ g
- ▷ $k = 30$ N.m^{-1} et $\alpha = 4.9$ kg.s^{-1}



4)
- ▷ $l(t = 0) = l_0$ et $v(t = 0) = v_0$
- ▷ $m = 342$ g
- ▷ $k = 523$ N.m^{-1} et $\alpha = 0.2$ kg.s^{-1}



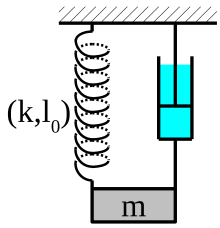
Exercice 6 - Pendule dans un fluide visqueux : Un pendule simple baigne dans un fluide visqueux
On écarte un pendule d'un angle θ_0 avec la verticale et on le lâche sans vitesse initiale.
On donne l'équation d'évolution de l'angle θ :



$$ml_0\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - mg\theta$$

1. Donner la dimension de α
2. On donne $l_0 = 50$cm, $m = 3$kg et $\alpha = 1.3$ SI
   Combien va-t-on observer d'oscillations environ ?
3. On lâche le pendule avec une vitesse initiale $\dot{\theta}_0$ depuis un angle θ_0
   Donner l'expression de $\theta(t)$ au cours du temps.
4. Exprimer la pseudo-période T des oscillations et le temps τ de décroissance de l'enveloppe.
5. En déduire la durée $\mathcal{T}$ du régime transitoire

Exercice 7 - Détermination des caractéristiques dynamiques d'un accéléromètre (*) : *Peu guidé* :



Nous nous proposons de déterminer expérimentalement les caractéristiques mécaniques (m, b, k) de l'accéléromètre schématisé par la figure **??** ci-contre.

m est la masse de la masselotte de l'accéléromètre, b le coefficient de frottement visqueux tel que la force de frottement que subit la masselotte s'écrit $\overrightarrow{F} = -b\overrightarrow{v}$ et k la raideur du ressort.

Pour cela, on suspend une masse $M = 200,0 \pm 0,1$ g à la masselotte de l'accéléromètre et on attend que le système soit à l'équilibre. On décroche alors la surcharge M et la masselotte est abandonnée sans vitesse initiale.

On observe un mouvement sinusoïdal amorti, avant un retour à une nouvelle position d'équilibre. Les mesures effectuées donnent une pseudo période $T = 20 \pm 2$ ms. L'écart initial à la nouvelle position d'équilibre est de $A_0 = 1,25 \pm 0,01$ mm et celui du premier maximum de même signe $A_1 = 0,05 \pm 0,01$ mm.

En prenant $g = 9.8\,\mathrm{m}.s^{-2}$, calculer les caractéristiques suivantes : la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, la masse m et la raideur k.

Réponses : $k = \dfrac{Mg}{A_0} = 1570 \pm 20$ N/m; Décrément logarithmique $\delta = 3.2 \pm 0.2$; donc $Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{\delta^2} + 1} = 1,10 \pm 0.05$; $\omega_0 = \dfrac{2Q\delta}{T} = 350 \pm 70$ rad/s; enfin $m = \dfrac{k}{\omega_0^2} = \dfrac{Mg}{A_0\omega_0^2} = 13 \pm 5$ g

TD07 Oscillateurs amortis

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Exercice 1 - Deux condensateurs : *Réviser la méthode générale, A savoir faire* :

1. On note i_u et i_v les courants dans les deux capacités.
   - **Loi des noeuds :**$i = i_u + i_v$
   - **Loi des mailles :** $E - Ri - v = 0$ et $-v + Ri_u + u = 0$
   - **Relations des dipôles :** $i_u = Cu'$ et $i_v = Cv'$

   - On commence avec :$-v + Ri_u + u = 0$ et on remplace v : $-(E - Ri) + Ri_u + u = 0$.

   - On remplace i : $-(E - R(i_u + i_v)) + Ri_u + u = 0$ et donc $2Ri_u + Ri_v + u = E$

   - On remplace $i_v = Cv' = C(u + Ri_u)'$ et donc $2Ri_u + RC(u + Ri_u)' + u = E$.
     On a finalement $2Ri_u + RCu' + R^2Ci_u' + u = E$

   - On remplace $i_u = Cu'$ et donc$2CRu' + RCu' + R^2C^2u'' + u = E$.
     On a finalement$3CRu' + R^2C^2u'' + u = E$.

   - On n'a plus que la tension u et ses dérivées : on écrit l'équation sous forme canonique :

     $$u'' + \frac{3}{RC}u + \frac{1}{(RC)^2}u = \frac{E}{(RC)^2}$$

     On pose $\tau = 1/(RC)$, et on retrouve bien l'équation demandée.
2. $\omega_0 = 1/\tau$ donc $\omega_0/Q = 3/\tau$ et $Q = 1/3 < 1/2$.
3. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur : $u(0^+) = u(0^-) = 0$ et $v(0^+) = v(0^-) = 0$ (les deux condensateur sont initialement déchargés).
   Loi des mailles : $-v(0^+) + Ri_c(0^+) + u(0^+) = 0$donc $i_c(0^+) = 0$. Comme $u' = Ci_c$, quelque soit le temps, à $t = t0^+$ on a :
   $$u'(0^+) = Ci_c(0^+) = 0$$

   Les conditions initiales sont :
   $$u(0^+) = 0 \text{ et } u'(0^+) = 0$$
4. La tension $u(t) = u_P + \tilde{u}$ avec :
   - u_P solution particulière de l'équation : $u_P = E_0$
   - $\tilde{u}$ forme générale des solutions de l'équation homogène : comme $Q < 1/2$ alors $\tilde{u}(t) = A\exp(-t/\tau_1) + B\exp(-t/\tau_2)$ avec $\tau_{1/2} = -1/r_{1/2}$ et $r_{1/2}$ les racines du polynôme caractéristique.

   $$r_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{\tau} + \frac{\sqrt{5}}{\tau}\right)$$

   $$r_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{\tau} - \frac{\sqrt{5}}{\tau}\right)$$

   Condition initiales :

   $$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow A + B + E_0 = 0 \\ u'(0) = 0 \Rightarrow r_1A + r_2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + E_0 = 0 \\ A = -\frac{r_2}{r_1}B \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{r_2}{r_1}B + B + E_0 = 0 \;\Rightarrow (1-\frac{r_2}{r_1})B + E_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r_2 - r_1}{r_1}B = E_0 \;\Rightarrow B = \frac{r_1}{r_2 - r_1}E_0$$

On a donc : $A = -\frac{r_2}{r_1}B = -\frac{r_2}{r_2 - r_1}E_0$

Exercice 2 - Deux générateurs : 1. On appelle i_C le courant dans le condensateur et i dans la résistance.

- ▷ **loi des mailles** : $E = Ri + u_C + u_L$
- ▷ **loi des noeuds** : $i = i_C + \eta$
- ▷ **Relation des dipôles :** $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
- ▷ **Relation de continuité :** $i(0^-) = i(0^+) = i_0$ car l'intensité dans une bobine est continue et $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ car la tension aux bornes d'un condensateur est continue

Finalement $i_C(0^+) = i_0 - \eta$ et $u_L = E - Ri_0 - u_0$.
Comme $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_L/L$ alors $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E - Ri_0 - u_0}{L}$.

2. On utilise les lois écrites précédemment pour $t > 0$.
   - ▷ loi des noeuds : $i(t) = \eta + i_C = \eta + C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
   - ▷ loi des mailles $i(t) = \eta + C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[E - Ri(t) - u_L\right]$
   - ▷ Finalement : $i(t) = \eta + C\left(R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}\right)$.
   - ▷ forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}i = \dfrac{\eta}{LC}$
3. On pose $\omega_0^2 = 1/LC$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$ donc $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

   Pour un régime transitoire pseudo-périodique il faut $Q > 1/2$ donc $\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} > 1/2$.

   On décompose la solution $i(t) = i_P + \widetilde{i}$
   - ▷ solution particulière : $i_P = \eta$
   - ▷ solution homogène : dans le cas d'un régime pseudo-périodique, les solution du polynôme caractéristique sont :

   $$r = \underbrace{\frac{-\omega_0}{2Q}}_{-1/\tau} \pm j\,\underbrace{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}_{\omega}$$

   et $\widetilde{i} = e^{t/\tau}\left(a\cos\omega t = b\sin\omega t\right)$.

   Conditions initiales : $i(0) = i_0$ et $i'(0) = \dfrac{E - Ri_0 - u_0}{L}$
   Donc $\eta + A = i_0$ et $-\dfrac{A}{\tau} + B\omega = \dfrac{E - Ri_0 - u_0}{L}$ et finalement :

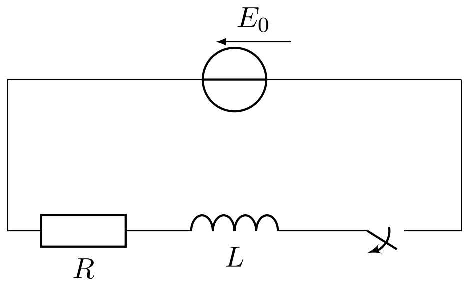
   $$A = i_0 - \eta \;\text{ et }\; B = \frac{E - Ri_0 - u_0}{L\omega} + \frac{i_0 - \eta}{\omega\tau}$$

4. En régime permanent :
   - ▷ une bobine se comporte comme un fil $u_L(\infty) = 0$
   - ▷ une condensateur comme un interrupteur ouvert $i_C(\infty) = 0$

   Dans le nouveau circuit on a alors $i(\infty) = \eta$ et $u_C(\infty) = E - R\eta$.
   On retrouve bien la solution particulière de l'équation différentielle pour i.

Exercice 3 - Etincelle de rupture :

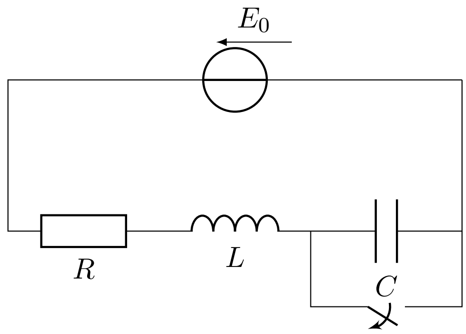
1. A $t < 0$, l'interrupteur est fermé depuis longtemps : la bobine se comporte comme un fil. Par conséquent $i(0^-) = E_0/R$ ($\sim$loi des mailles).



Lorsqu'on ouvre le circuit, deux dipôle s'opposent :
▷ la bobine force le courant à être continu $i(0^+) = i(0^-) = E_0/R$
▷ l'interrupteur ouvert force le courant à être nul $i(0^+) = 0$
La bobine "gagne" et, pendant un bref instant, un courant électrique passe dans l'interrupteur ouvert : c'est l'étincelle !

2. A $t < 0$, l'interrupteur est fermé depuis longtemps : la bobine se comporte comme un fil. Par conséquent $i(0^-) = E_0/R$ ($\sim$loi des mailles) et $u_C(0^-) = 0$ (tension aux bornes d'un fil).

Lorsque le circuit est ouvert, c'est un circuit RLC série "classique".



En travaillant proprement et rapidement on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E_0}{LC}$$

Le facteur de qualité $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Avec les valeurs on trouve $Q \simeq 3200$.

3. On a $Q > 1/2$ donc le régime transitoire sera pseudo-périodique.

$$u_C(t) = E_0 + e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

Comme $Q >> 1$ on peut approximer ω à ω_0.
Avec les conditions initiales ($u_C(0^+) = 0$ et $u'_C(0^+) = i(0^+)/C = E_0/RC$) on a :

$$a = -E_0 \text{ et } b = E_0\underbrace{\left(\frac{1}{RC\omega_0} - \frac{R}{2L\omega_0}\right)}_{Q-\frac{1}{2Q}} \simeq Q$$

Finalement : $u_C(t) = E_0 + E_0e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(-\cos\omega_0 t + Q\sin\omega_0 t)$.
On calcule l'amplitude :

$$\underbrace{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}_{\simeq e^{-0} \text{ car Q est grand}} \times E_0\sqrt{1+Q^2} \simeq E_0Q$$

On trouve alors $U_{max} = QE_0 = 3200\text{V}$: c'est beaucoup ! L'air est ionisé, on a un mouvement de charge : c'est l'étincelle ($\sim$ un éclair) de rupture.

Exercice 4 - Système masse ressort avec frottements fluides :

Exercice traité en classe, ce n'est qu'une correction rapide !

1. $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$: variation de la quantité de mouvement ; $-\alpha\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$: force de frottement visqueux ; $-k(x-x_0)$: force de rappel du ressort
2. On met sous forme canonique et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $Q = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{km}$.
   On remarque que plus α augmente ($\sim$ plus le fluide est visqueux et frotte), plus Q est petit et donc moins le système aura tendance à osciller : c'est logique !
3. Par identification dans les expression de ω_0 et Q on trouve : $\alpha \leftrightarrow R$ et $1/k \leftrightarrow C$.
4. Pour avoir des oscillations $Q > 1/2$ et donc $k > \dfrac{\alpha^2}{2m}$
   Attention ! aux unités de k : on les trouve par analyse dimensionnelle : kg.s^{-2} !
5. $N \simeq 1.5Q$
6. **Condition initiale** : $x(0) = L$ et $\dot{x}(0) = 0$
   On trouve $x(t) = l_0 + -\dfrac{\omega_0}{2Q}t(L-l_0)\left(\cos\omega t + \dfrac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$.
7. Pour discuter les amplitudes, on met sous forme "graphique" la partie oscillante :

$$e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(L-l_0)\left(\cos\omega t + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(L-l_0)\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{2Q\omega}\right)^2}$$

   Entre deux oscillations l'écart de temps est $t_{i+1} - t_i = T$, une période des oscillations. Le rapport des amplitudes est donc :

$$\frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t_{i+1}}}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t_i}} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t_{i+1}-t_i)} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}$$

Exercice 5 - Prévoir les comportements :

- Avec l'équation de l'exercice précédent on a : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$; $Q = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{km}$.
- Il suffit alors pour chacun des cas de calculer la valeur de Q pour connaître le comportement du régime transitoire (apériodique ou pseudo-périodique).
- Pour les régimes oscillants la solution est :

$$x_P + \underbrace{e^{\frac{\omega_0}{2Q}t}}_{e^{-t/\tau}}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

  La durée du régime transitoire est donc $\mathcal{T} = 5\tau = \dfrac{10Q}{\omega_0}$. Pour les régimes apériodiques la solution est :

$$x_P + ae^{-t/\tau_1} + be^{-t/\tau_2} \quad \text{avec} \quad \tau_{1/2} = 1/|r_{1/2}|$$

  où $r_{1/2}$ sont les solutions réelles du polynôme caractéristique : $r_{1/2} = \dfrac{-\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$.

  La durée du régime transitoire est alors $\mathcal{T} = 5max(\tau_1, \tau_2)$.
- On applique les conditions initiales. Dans **tous les cas** on a
  - régime pseudo-périodique : $x_P + a = x(0)$ et $-\dfrac{\omega_0}{2Q}a + b\omega = \dot{x}(0)$
  - régime apériodique : $x_P + a + b = 0$ et $-\dfrac{a}{\tau_1} - \dfrac{b}{\tau_2} = \dot{x}(0)$.

  On peut alors trouver a et b avec un peu de calculs.

Exercice 6 - Pendule dans un fluide visqueux :

1. Par analyse dimensionnelle : $[\alpha][\dot{\theta}] = [m][g][\theta]$ avec $[\dot{\theta}] = [\theta]/T$ et $[g]$ =accélération= LT^{-2}.
   Finalement $[\alpha] = MLT^{-1}$
2. On écrit l'équation différentielle sous forme canonique : $\ddot{\theta} + \dfrac{\alpha}{ml_0}\dot{\theta} + \dfrac{g}{l_0}\theta = 0$ pour toruver les deux constantes :
   - ▷ pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l_0}}$
   - ▷ facteur de qualité $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{ml_0}$ donc $Q = \dfrac{\omega_0 m l_0}{\alpha} = \dfrac{m}{\alpha}\sqrt{gl_0}$

   Si $Q > 1/2$ (c'est le cas), on observe $N = 1.5Q$ oscillations.
3. Comme $Q > 1/2$, on est dans un régime pseudo-périodique. Donc :

$$\theta(t) = \theta_P + \widetilde{\theta} = 0 + e^{\frac{\omega_0}{2Q}t}\,(a\cos\omega t + b\sin\omega t) \quad \text{avec} \;\; \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

   CI : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0)\dot{\theta}_0$ donc $a = \theta_0$ et $b = \dfrac{a\omega_0}{2Q\omega} = \dfrac{\theta_0\omega_0}{2Q\omega}$

   Finalement $\theta(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\theta_0\left(\cos\omega t + \dfrac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)$.
4. Pseudopériode $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}\dfrac{1}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$.
   Temps de décroissance de l'enveloppe : $\exp\left[-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right] = \exp\left[-\dfrac{t}{\tau}\right]$ avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$.
5. La fin du régime transitoire est pour $\mathcal{T} = 5\tau = \dfrac{10Q}{\omega_0}$.