

Le Soulard

PCSI

Tome 3 : Electricité II

- *Régime Sinusoïdal Forcé*
- *Représentation Complexe des Signaux*
- *Filtrage linéaire et ALI*
- *Phénomènes de Résonances*

***Cours de Physique
de première année
de classe préparatoire***

Lycée Louis Thuillier

Table des matières

1	Le régime sinusoïdal forcé	3
1.1	Exemple du circuit RC série	3
1.2	Définition du Régime Sinusoïdal Forcé (RSF).	4
2	La notation complexe pour l'étude des signaux	5
2.1	Rappel mathématique sur les nombres complexes	5
2.2	L'amplitude complexe d'un signal	6
2.3	Dérivations et intégrations en notations complexes.	7
3	Comportement des dipôles en RSF, notion d'impédance électrique	8
3.1	Définition	8
3.2	Impédance des dipôles usuels	8
3.3	Comportement fréquentiel :	9
3.4	Déphasage tension-courant	9
4	Lois de l'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé	11
4.1	Association d'impédances	11
4.2	Ponts diviseurs	13
5	Étude du régime forcé d'un circuit	15
5.1	Etude en RSF d'une tension.	15
5.2	Obtenir une équation différentielle	16



Savoirs 

- ▷  Régime transitoire et définition du RSF
 - ▷ lien solution homogène et le régime transitoire
 - ▷ Forme des signaux en RSF
 - ▷ Amplitude et déphasage par rapport au signal excitateur
- ▷  **Signaux complexes :**
 - ▷ écriture complexe d'un signal
 - ▷ propriété de dérivation et d'intégration
- ▷  **Impédances complexes :**
 - ▷ définition d'un impédance électrique
 - ▷ Impédance d'une résistance, d'un fil, d'un interrupteur ouvert
 - ▷ Condensateur : impédance complexe, comportement à haute et basse fréquence
 - ▷ Bobine : impédance complexe, comportement à haute et basse fréquence
- ▷  **Lois électriques en RSF :**
 - ▷ loi d'Ohm en RSF
 - ▷ Association d'impédances complexes
 - ▷ Pont diviseur de tension et courant

Savoir Faire

-  *A partir d'une amplitude complexe savoir retrouver*
 - ▷ l'amplitude réelle
 - ▷ le déphasage
 - ▷ le signal réel
-  *Associer des impédances complexes en série et en parallèle pour écrire l'impédance équivalente d'une portion de circuit*
-  *Retrouver l'équation différentielle d'un circuit par la RSF*
-  *Appliquer pont diviseur de tension et courant pour obtenir les grandeurs électriques en d'un signal de référence*
-  *Etude d'un circuit électrique en RSF*
 - ▷ Ecrire les signaux en complexe
 - ▷ Associer des dipôles pour simplifier le circuit
 - ▷ appliquer un pont diviseur pour obtenir la grandeur électrique recherchée

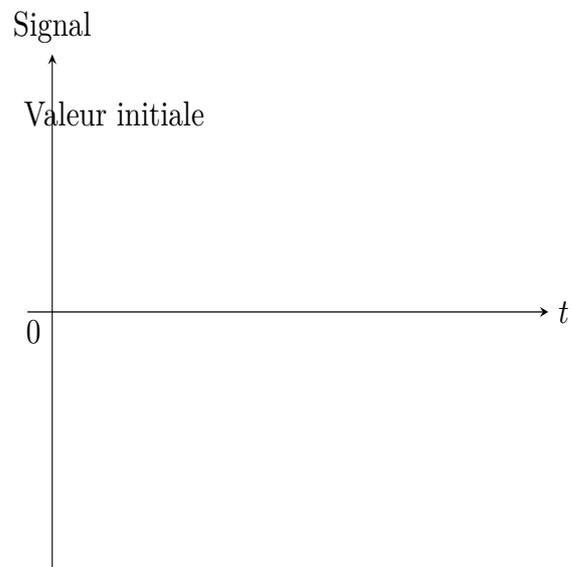
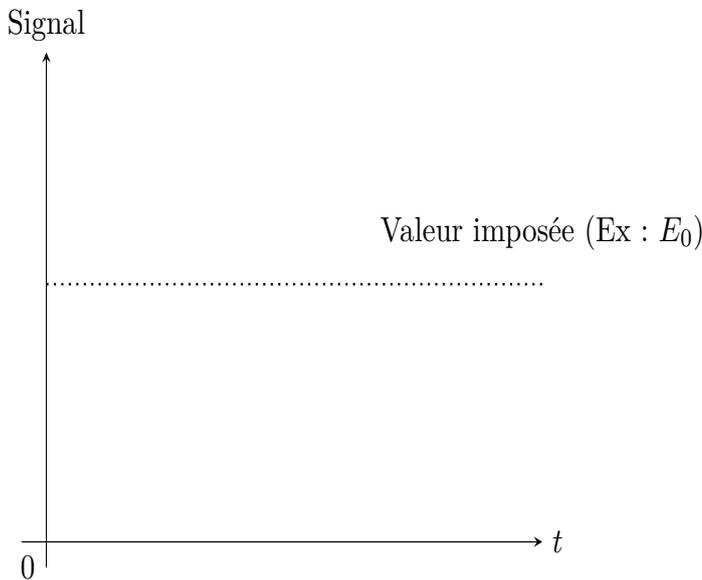
Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la réponse d'un système, qu'il soit électrique (circuit RC, circuit RLC, ...) ou mécanique (système masse ressort, balançoire, ...)

en réponse indicielle :
on force le système à prendre une certaine valeur.

en régime libre :
retour à la position d'équilibre

Ex : Oscillateur amorti

Ex : Oscillateur amorti



Mais il existe un troisième régime : lorsqu'on fait de la balançoire, on donne, à un rythme régulier, une impulsion au système. L'élément excitateur (nos bras) produit un signal périodique : dans l'exemple du circuit *RLC* c'est comme si la tension du générateur était dépendante du temps

$$E_0 \rightarrow E_0(t)$$

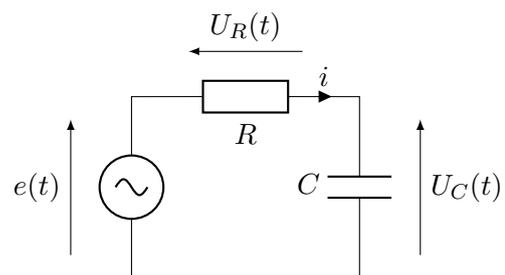
1 Le régime sinusoïdal forcé

1.1 Exemple du circuit RC série

Prenons le cas d'un circuit *RC* série. Le générateur qui l'alimente fournit désormais non plus une tension E_0 constante mais une tension $e(t)$ qui varie dans le temps.

On trouve facilement l'équation différentielle :

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C(t) = e(t)$$



► Décomposition de la solution :

Elle est similaire à celle qu'on a déjà rencontré sauf que désormais le membre de droite, via $e(t)$, dépend du temps. Néanmoins, la décomposition en deux de la solution reste vraie :

$$U_C(t) = U_{C,H}(t) + U_{C,P}(t)$$

- ▷ $U_{C,P}(t)$ une solution particulière.
- ▷ $U_{C,H}(t)$ est la forme générale de l'équation homogène

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C(t) = 0$$

Elle est donc la même que celle rencontrée avant. On retiendra la propriété générale suivante

► Comportement aux temps longs

Propriété. Solution homogène

Au bout d'une durée \mathcal{T} (durée du régime transitoire), la solution homogène tend vers zéro.

On a :

$$U_C(t) = U_{C,H}(t) + U_{C,P}(t) \rightarrow_{t \gg \mathcal{T}} U_C(t) \simeq U_{C,P}(t)$$

Propriété. Solution particulière

La solution homogène représente le **régime permanent**, au sens où cette fonction ne diminue pas d'amplitude en fonction du temps.

Problème :

Comme $e(t)$ dépend du temps, prendre une constante ne fonctionne plus. Lorsque le signal excitateur dépend du temps, la solution particulière dépend également du temps.

1.2 Définition du Régime Sinusoïdal Forcé (RSF)

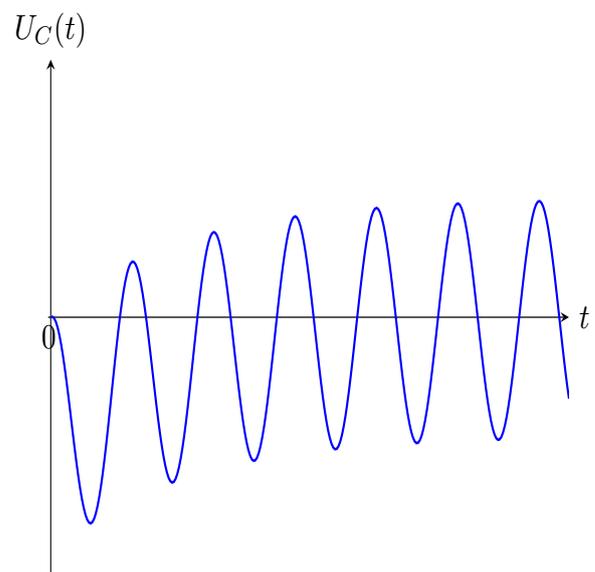
On choisit désormais une tension $e(t)$ sinusoïdal :

$$e(t) = e_0 \cos \omega t$$

avec $\omega = 3\text{kHz}$. On trace ci-contre la solution de l'équation différentielle du circuit précédent.

On remarque qu'au bout d'une durée \mathcal{T} l'amplitude du signal est bien constante et il semble être un signal lui aussi sinusoïdal.

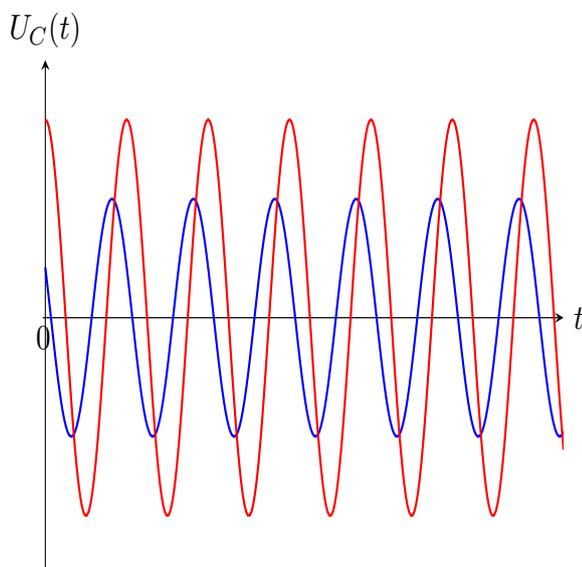
C'est ce qu'on appelle le Régime Sinusoïdal Forcé, ou RSF.



Définition. RSF (régime sinusoïdal forcé)

Le **régime sinusoïdal forcé** correspond au régime permanent (aux temps longs) d'un système physique lorsque l'élément excitateur est de forme sinusoïdale.

Vocabulaire : "on se place en RSF" : "on se place aux temps long $t > \mathcal{T}$, durée du régime transitoire, et on cherche la solution particulière.



On remarque que si on mesure le signal $e(t)$ (en rouge) et le signal $U_C(t)$ (en bleu) :

- ▷ ils n'ont pas la même amplitude
- ▷ ils ont la même fréquence
- ▷ il existe un décalage entre les deux courbes \Rightarrow il existe un déphasage entre les deux signaux

Propriété. Forme du signal en RSF

En RSF, les différents signaux mesurables en sortie seront tous des signaux sinusoïdaux de même pulsation que le signal excitateur.

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- ▷ X_0 l'amplitude du signal de sortie
- ▷ φ le déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée.

🔴🔴🔴 **Attention !** La pulsation ω est la même que celui du générateur !

Exemple 1 : Circuit RC :

On aura donc une tension $U_C(t)$ qui s'écrit comme :

$$U_C(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$$

avec $\omega = 3\text{kHz}$.

🔴🔴🔴 **Attention !** Les deux constantes X_0 et φ dépendent de la pulsation ω .

But du jeu :

trouver la solution particulière, c'est-à-dire trouver l'amplitude X_0 et la phase φ du signal de sortie aux temps longs.

Astuce : on utilise les complexe !!

2 La notation complexe pour l'étude des signaux

2.1 Rappel mathématique sur les nombres complexes

Définition. Nombre complexe j

Lors de l'étude des signaux, on note j le nombre complexe tel que

$$j^2 = -1$$

🔴🔴🔴 **Attention !** On utilise cette notation pour ne pas confondre ce nombre complexe avec le courant électrique, noté généralement i .

♡ *Instant math* ♡

Un nombre complexe z peut s'écrire de deux façons différentes :

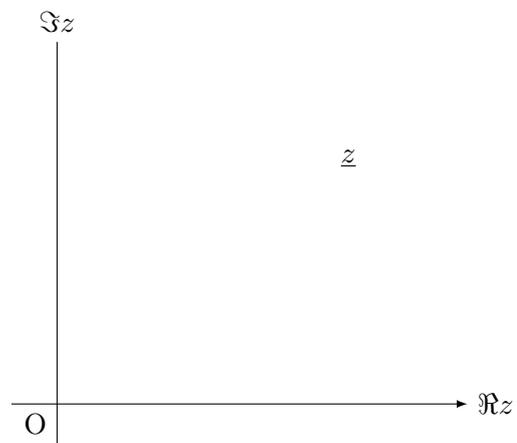
$$z = a + ib \text{ ou } z = Z_0 e^{j\phi}$$

- ▷ a : partie réelle
- ▷ b partie imaginaire
- ▷ Z_0 module
- ▷ ϕ argument

On a :

$$Z_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \tan \phi = \frac{b}{a}$$

On utilise aussi : $\cos \phi = \frac{a}{Z_0}$ et $\sin \phi = \frac{b}{Z_0}$.



| **Application 1 :** Quelle est la notation exponentielle du nombre j ? Et celle de $1/j$?

2.2 L'amplitude complexe d'un signal

Propriété. Formule d'Euler

Prenons la fonction réelle $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$. $x(t)$ est la partie réelle d'une exponentielle complexe :

$$X_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re \left(X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \right).$$

On peut faire le lien entre un signal sinusoïdal et un signal complexe. Toute équation vraie en réel est vraie en notation complexe.

Exemple 2 : L'équation différentielle du circuit RC en réelle

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC} U_C(t) = e(t)$$

se réécrit en complexe :

$$\frac{d\underline{U}_C}{dt} + \frac{1}{RC} \underline{U}_C(t) = \underline{e}(t)$$

*** **Attention !** on pense bien à écrire e en complexe \underline{e} !

Définition. Signal et amplitude complexe

Soit le signal physique $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

▷ Sa notation complexe est $\underline{x}(t) = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$.

▷ On note l'**amplitude complexe** du signal $x(t)$

$$\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}.$$

Propriété. Retour au réel

A partir de l'amplitude complexe, on déduit

▷ l'**amplitude réelle** du signal $X_0 = |\underline{X}_0|$; ▷ la **phase** du signal $\varphi = \arg \underline{X}_0$.

*** **Attention !** Le soulignement permet de ne pas oublier que l'on manipule des grandeurs complexes.

Exemple 3 : On donne le signal complexe $\underline{u}(t) = \frac{e_0}{jRC\omega} e^{j\omega t}$. Donner le signal réel $u(t)$ associé.

L'amplitude complexe est : $\underline{U}_0 = \frac{e_0}{jRC\omega}$.

▷ On calcule le module :

$$|\underline{U}_0| = \frac{e_0}{|jRC\omega|} = \frac{e_0}{RC\omega}$$

▷ On calcule l'argument :

$$\arg \underline{U}_0 = \arg \frac{e_0}{jRC\omega} = \arg[e_0] - \arg[jRC\omega] = 0 - \pi/2$$

Finalemment :

$$u_c(t) = |\underline{U}_0| \cos(\omega t + \arg \underline{U}_0) = \frac{e_0}{RC\omega} \cos(\omega t - \pi/2)$$

Objectif RSF

Trouver l'amplitude X_0 et la phase φ du signal \Rightarrow trouver l'amplitude complexe \underline{X}_0 .

$$\underline{X}_0 \rightarrow \begin{cases} X_0 = |\underline{X}_0| \\ \varphi = \arg(\underline{X}_0) \end{cases}$$

2.3 Dérivations et intégrations en notations complexes

Plutôt que manipuler $x(t) = X_0 \cos \omega t$ on manipule $\underline{x}(t) = \underline{X_0} e^{j\omega t}$. Voyons les deux opérations de base : dérivation et intégration.

► Dérivation

Calculons la dérivée du signal complexe $\underline{x}(t) = \underline{X_0} e^{j\omega t}$. On a :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\underline{X_0} e^{j\omega t}) = \underline{X_0} \frac{de^{j\omega t}}{dt} = \underline{X_0} j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{x}(t).$$

Propriété. Dérivation

La dérivation du signal complexe $\underline{x}(t)$ correspond à une multiplication par $j\omega$.

Exemple 4 : Comment manipuler une dérivée d'ordre 2 ?

$$\frac{d^2 \underline{x}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\underline{x}(t)}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [j\omega \underline{x}(t)] = j\omega \frac{d}{dt} [\underline{x}] = j\omega \times j\omega \underline{x}(t)$$

Dérivée d'ordre 2 équivaut à multiplier par $-\omega^2$

► Intégration

Calculons l'intégrale du signal complexe $\underline{x}(t) = \underline{X_0} e^{j\omega t}$. On a :

$$\int \underline{x}(t) dt = \int \underline{X_0} e^{j\omega t} dt = \underline{X_0} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}.$$

Propriété. Intégration

L'intégration du signal complexe $\underline{x}(t)$ correspond à une division par $j\omega$.

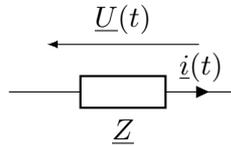
3 Comportement des dipôles en RSF, notion d'impédance électrique

3.1 Définition

Définition. Impédance électrique

En **électricité**, on définit l'**impédance** \underline{Z} d'un dipôle comme le rapport entre la tension $\underline{U}(t)$ et le courant $\underline{i}(t)$ en convention récepteur.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{i}(t)}$$



Vocabulaire : L'**admittance complexe** se définit par : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

Propriété. Loi d'Ohm en RSF

En RSF tous les dipôles sont soumis à la loi d'Ohm en régime sinusoïdal forcé

$$\underline{U}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t) .$$

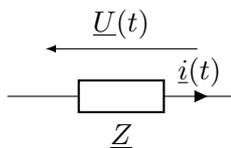
3.2 Impédance des dipôles usuels

► Les résistances

On a en régime réel la loi d'Ohm $U(t) = Ri(t)$, soit en régime complexe, on a donc $\underline{U}(t) = R\underline{i}(t)$.

Propriété. Impédance complexe d'une résistance

Fil et interrupteur



L'impédance \underline{Z}_R d'une résistance R vaut $\underline{Z}_R = R$.

▷ Fil : $\underline{Z} = 0$

▷ Interrupteur ouvert : $\underline{Z} = +\infty$

► Les condensateurs

On a en régime réel la loi $i(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$, soit en régime complexe

$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{U}(t)}{dt} = jC\omega \underline{U}(t)$$

Propriété. Impédance complexe d'un condensateur

L'impédance \underline{Z}_C d'un condensateur C vaut $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$.

► Les inductances

On a en régime réel la loi $U(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, soit en régime complexe $\underline{U}(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = jL\omega \underline{i}(t)$.

Propriété. Impédance complexe d'une bobine

L'impédance \underline{Z}_L d'une bobine L vaut $\underline{Z}_L = jL\omega$.

3.3 Comportement fréquentiel :

► Notion de comportement fréquentiel

Propriété.

Le comportement d'un circuit électrique en RSF dépend de la pulsation ω qu'impose le générateur au circuit.

Comportements limites :

- ▷ à haute fréquence : $\omega \rightarrow \infty$, la tension du générateur oscille très vite.
- ▷ à basse fréquence : $\omega \rightarrow 0$, la tension du générateur oscille très lentement.

Cas limite $\omega = 0$ correspond à une tension $e(t)$ constante.

Vocabulaire : Etudier le comportement du circuit à $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega \rightarrow 0$ est faire l'étude fréquentielle asymptotique du circuit.

► Comportement fréquentiel des dipôles usuels

Fil, interrupteur ouvert, résistance :

L'impédance d'un fil, d'un interrupteur ouvert et d'une résistance ne dépendent pas de la pulsation ω : leur comportement est invariant quelque soit la fréquence du signal $e(t)$.

Condensateur

Pour un condensateur d'impédance $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

- ▷ basses fréquences : $\omega \rightarrow 0$

$$\underline{Z}_C \rightarrow +\infty$$

- ▷ hautes fréquences $\omega \rightarrow +\infty$

$$\underline{Z}_C \rightarrow 0$$

Propriété. Comportement asymptotique d'un condensateur

- ▷ à basse fréquence, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert
- ▷ à haute fréquence, un condensateur est équivalent à un fil

Inductance

Pour une bobine d'impédance $\underline{Z}_L = jL\omega$

- ▷ basses fréquences : $\omega \rightarrow 0$

$$\underline{Z}_L \rightarrow 0$$

- ▷ hautes fréquences $\omega \rightarrow +\infty$

$$\underline{Z}_L \rightarrow \infty$$

Propriété. Comportement asymptotique d'une bobine

- ▷ à basse fréquence, une bobine est équivalent à un fil
- ▷ à haute fréquence, une est équivalent à un interrupteur ouvert

3.4 Déphasage tension-courant

► Comparaison de signaux électroniques en RSF

Soient deux signaux électriques (tension ou intensité) $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Pour comparer ces deux signaux, on étudie :

- ▷ le rapport des amplitudes réelles X_1/X_2
- ▷ le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

On passe alors par l'étude des signaux complexes $\underline{x}_1(t)$ et $\underline{x}_2(t)$:

- ▷ Rapport des amplitudes réelles :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{|\underline{X}_1|}{|\underline{X}_2|} = \left| \frac{\underline{X}_1}{\underline{X}_2} \right|$$

▷ Déphasage :

$$\Delta\varphi = \arg \underline{x_1} - \arg \underline{x_2} = \arg \left[\frac{\underline{x_1}}{\underline{x_2}} \right] = \arg \left[\frac{\underline{X_1}}{\underline{X_2}} \right]$$

Propriété. Rapport d'amplitude et déphasage en RSF

Soient deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

▷ Rapport des amplitudes réelles :

$$\frac{X_1}{X_2} = \left| \frac{\underline{X_1}}{\underline{X_2}} \right|$$

▷ Déphasage :

$$\Delta\varphi = \arg \left[\frac{\underline{X_1}}{\underline{X_2}} \right]$$

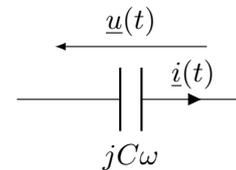
► **Application aux condensateurs et bobines**

Exemple 5 : En RSF, montrer qu'aux bornes d'un condensateur :

1. l'amplitude du courant est celle de la tension multiplié par $C\omega$
2. le courant et la tension sont en quadrature de phase

On adopte une représentation complexe des signaux :

- ▷ tension : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \underline{u}(t) = \underline{U_0} e^{j\omega t}$
 ▷ courant : $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \underline{i}(t) = \underline{I_0} e^{j\omega t}$



La loi d'Ohm en RSF : $\underline{U_0} = \frac{\underline{I_0}}{jC\omega}$.

On s'intéresse alors au :

1. rapport des amplitudes réels $I_0/U_0 = \left| \frac{\underline{I_0}}{\underline{U_0}} \right| = \left| \frac{\underline{I_0}}{\underline{I_0}/jC\omega} \right| = |jC\omega| = C\omega$
2. déphasage $\Delta\varphi = \arg \left[\frac{\underline{I_0}}{\underline{U_0}} \right] = \arg[jC\omega] = +\pi/2$

Application 2 : Donner le rapport des amplitudes courant-tension et le déphasage courant-tension aux bornes d'une bobines et d'une résistance.

4 Lois de l'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé

Les lois de l'électrocinétique restent vrai tant que le système reste dans le cadre de l'ARQS. En RSF, on peut appliquer la loi des mailles et la loi des noeuds.

Généralisation de la loi d'Ohm

Loi d'Ohm

$$u = Ri$$

Impédance complexe en RSF

$$\underline{u} = \underline{Z}i$$

En RSF tous les dipôles se comportent comme des résistance, d'impédance complexe \underline{Z} variant d'un dipôle à l'autre.

Les propriétés des résistances peuvent donc être appliquées à tous les dipôles en RSF.

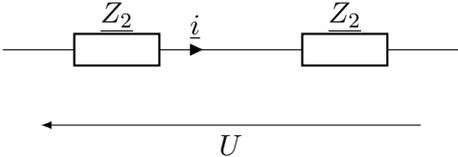
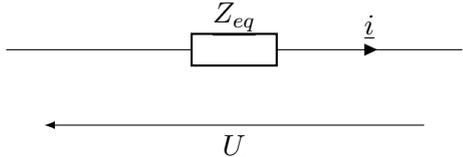
🚫🚫🚫 Attention ! UNIQUEMENT EN RSF !!

4.1 Association d'impédances

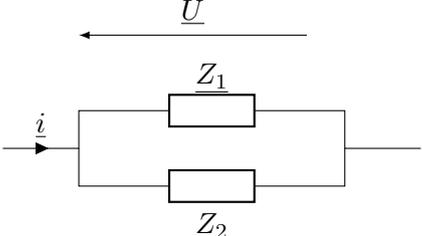
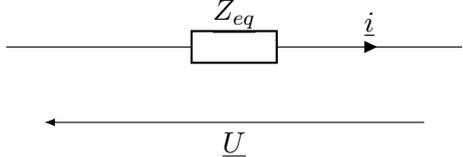
Les lois d'associations des impédances sont donc directement transposées des lois d'association des résistances.

Propriété. Association de dipôle en RSF

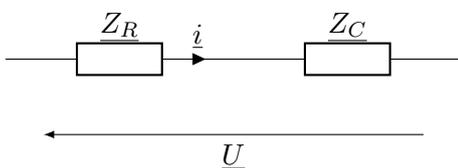
▷ $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ pour une association série

▷ $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$ pour une association en parallèle

Exemple 6 : Que vaut l'impédance d'une résistance R en série avec un condensateur C ? Quel est le comportement à hautes fréquences ? A basse fréquences ?



Association d'impédance en série :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega}$$

Comportement asymptotique :

Méthode 1 : on calcule

▷ à haute fréquence :

$$\omega \rightarrow \infty : \underline{Z}_{eq} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega} \rightarrow \frac{jRC\omega}{jC\omega} = R$$

le circuit se comporte comme une résistance.

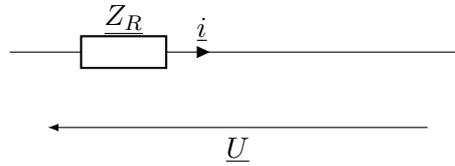
▷ à basse fréquence :

$$\omega \rightarrow 0 : \underline{Z}_{eq} = \frac{jRC\omega + 1}{jC\omega} \rightarrow \frac{1}{0} = +\infty$$

le circuit se comporte comme un interrupteur ouvert.

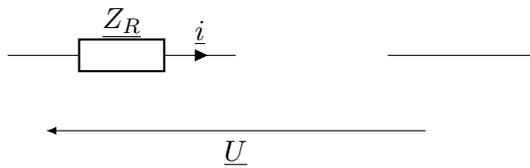
Méthode 2 : on remplace dans le circuit les dipôle par leur équivalent.

▷ à haute fréquence :



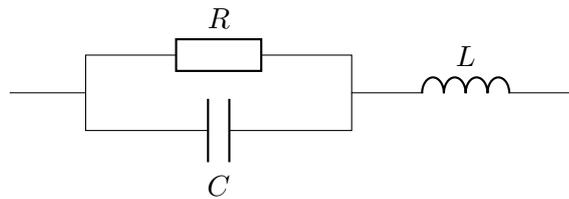
le circuit se comporte comme une résistance.

▷ à basse fréquence :



le circuit ne laisse passer aucune intensité : c'est un interrupteur ouvert.

Application 3 : Quelle est l'impédance équivalente de l'ensemble ci-dessous.



Donner les comportements asymptotiques.

4.2 Ponts diviseurs

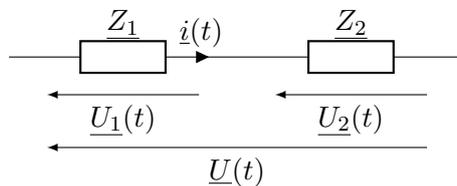
Les ponts diviseurs restent valables en régime sinusoïdal forcé et ils vont prendre une grande importance dans les études électriques. Les formules des ponts diviseurs en RSF s'obtiennent à partir de celles en réel en transformant les résistances en impédances.

Pont diviseur en RSF : Comme en régime "classique" mais $R \rightarrow \underline{Z}$

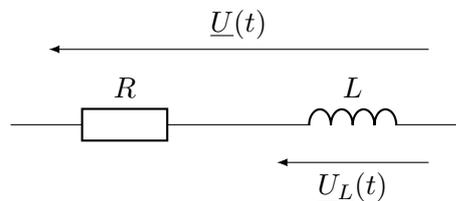
► **Le pont diviseur de tension**

Propriété. Pont diviseur de tension

$$\underline{U}_1(t) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}(t) \quad \text{et} \quad \underline{U}_2(t) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}(t)$$



Exemple 7 : Quelle est l'expression de la tension $\underline{U}_L(t)$ dans le circuit ci-dessous en fonction de la tension $\underline{U}(t)$?

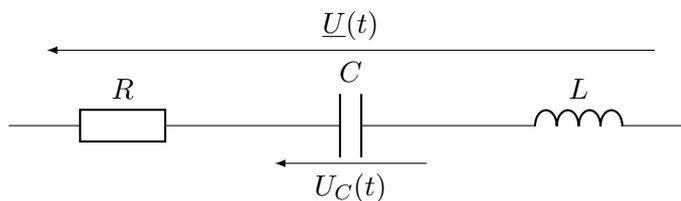


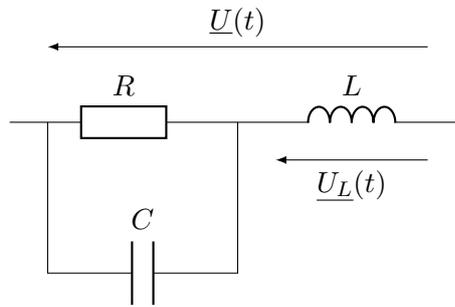
On reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_L = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{U}$$

Application 4 : Quelle est l'expression de la tension $\underline{U}_C(t)$ dans le circuit ci-dessous en fonction de la tension $\underline{U}(t)$?

Astuce : on pensera à associer deux dipôles avant d'utiliser un pont diviseur.





► Le pont diviseur de courant

Propriété. Pont diviseur de courant

$$\underline{i}_1(t) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}(t) \quad \text{et} \quad \underline{i}_2(t) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}(t)$$

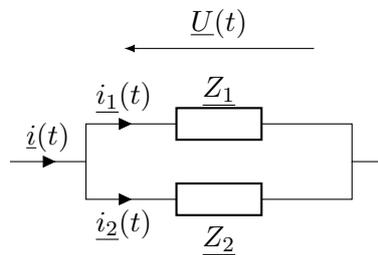
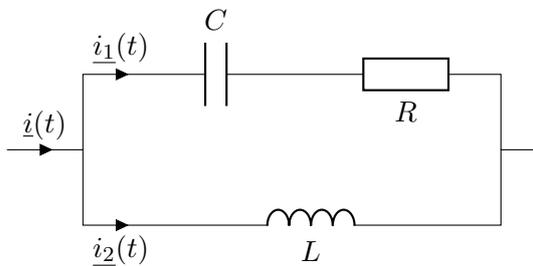


Fig. 1 – Le pont diviseur de courant.

Application 5 : Quelles sont les expressions des intensités $\underline{i}_1(t)$ et $\underline{i}_2(t)$ dans le circuit ci-dessous en fonction de l'intensité $\underline{i}(t)$.

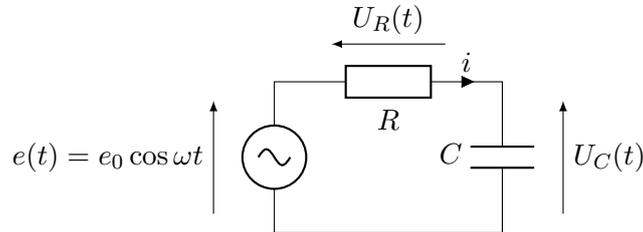


5 Étude du régime forcé d'un circuit

5.1 Etude en RSF d'une tension

Reprenons le problème du circuit RC étudié en début de chapitre : un générateur de tension sinusoïdale $e_0 \cos \omega t$ est branché sur un condensateur initialement déchargé en série avec une résistance.

Objectif : exprimer l'amplitude et le déphasage de la tension U_C aux bornes du condensateur.



Le déroulé de la résolution d'un exercice de RSF suit toujours ces premières étapes.

► Passage en RSF

A mettre dans tout début d'exercice!!!

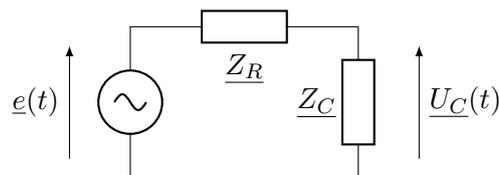
On se place en RSF, on adopte alors une représentation complexe des signaux.

$$\begin{cases} e(t) \rightarrow \underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t} \\ U_C(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{U}_C(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U}_0 e^{j\omega t} \\ i(t) \rightarrow \underline{i}(t) \end{cases}$$

On cherche U_0 et φ .

► Détermination de l'amplitude complexe

Reprenons le circuit que nous réécrivons en terme d'impédances.



On reconnaît un pont diviseur de tension, soit

$$\underline{U}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{e}(t) = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R} \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}(t)$$

soit en simplifiant par $e^{j\omega t}$ pour se ramener uniquement aux amplitudes complexes, il vient à nouveau

$$\underline{U}_C = \frac{e_0}{1 + jRC\omega}$$

Astuce pratique :

Trouver l'amplitude complexe se décompose le plus souvent en deux étapes :

1. on associe des dipôles entre eux pour parvenir à un pont diviser (tension ou courant) faisant apparaître la grandeur que l'on cherche
2. on applique un pont diviseur pour trouver la grandeur électrique cherchée

► **Amplitude et déphasage**

Que faire avec $\underline{U_C}$? On a $\underline{U_C}$, il ne nous reste plus qu'à calculer $|\underline{U_C}|$ et $\arg \underline{U_C}$ pour obtenir l'amplitude U_0 et le déphasage φ .

$$\underline{U_C} = \frac{e_0}{1 + jRC\omega}$$

Amplitude U_0

♡ *Instant math* ♡

$$z = \frac{a}{b} \Rightarrow |z| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|\underline{U_C}| = \frac{|e_0|}{|1 + jRC\omega|} = \frac{e_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

Déphasage φ

♡ *Instant math* ♡

$$z = \underline{a} \times \underline{b} \Rightarrow \arg z = \arg \underline{a} + \arg \underline{b}$$

$$z = \frac{\underline{a}}{\underline{b}} \Rightarrow \arg z = \arg \underline{a} - \arg \underline{b}$$

$$\arg \underline{U_C} = \arg e_0 - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan \frac{RC\omega}{1}$$

► **Ecriture de la tension réelle**

Aux temps longs, la tension aux bornes du condensateur est :

$$U_C(t) = \frac{e_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan RC\omega)$$

5.2 Obtenir une équation différentielle

Obtenir l'équation différentielle qui régit un circuit peut s'avérer pénible. L'étude des circuits électriques en RSF permet de simplifier les calculs.

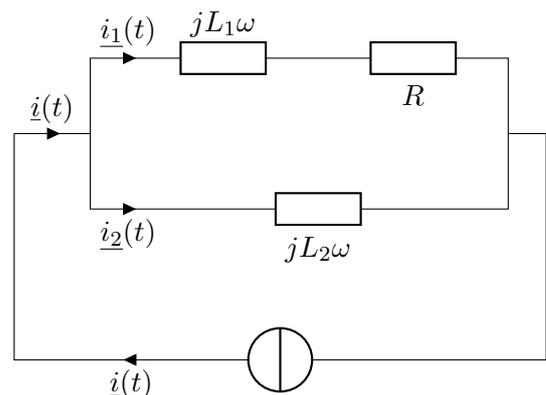
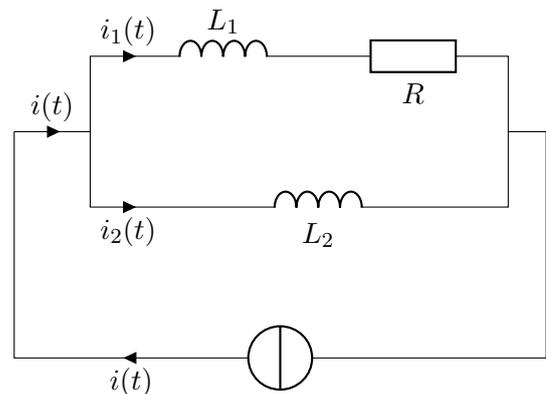
Objectif : trouver l'équation différentielle qui décrit l'évolution de $i_1(t)$.

On se place en RSF et on utilise les notations complexes \underline{i} , \underline{i}_1 , ...
 Sur la branche du haut on peut associer en série les deux impédances :

$$\underline{Z}_{eq} = R + jL_1\omega$$

En utilisant un pont diviseur de courant on a :

$$\underline{i}_1(t) = \frac{jL_2\omega}{R + jL_1\omega} \underline{i}(t)$$



Pour obtenir une équation différentielle on réécrit l'égalité en éliminant les fractions :

$$(R + jL_1\omega)\underline{i}_1(t) = jL_2\omega\underline{i}(t)$$

$$R\underline{i}(t) + jL_1\omega\underline{i}_1(t) = jL_2\omega\underline{i}(t)$$

Et on se rappelle que : $\frac{dx}{dt} = j\omega x(t)$.

L'équation se réécrit comme :

$$R\underline{i}(t) + L_1 \frac{d\underline{i}_1}{dt} = L_2 \frac{d\underline{i}(t)}{dt}$$

Les équations électriques sont vraies aussi bien en complexe qu'en réel. Donc on repasse de $\underline{i}_1 \rightarrow i_1$:

$$Ri(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di}{dt}$$

C'est bien une équation différentielle.

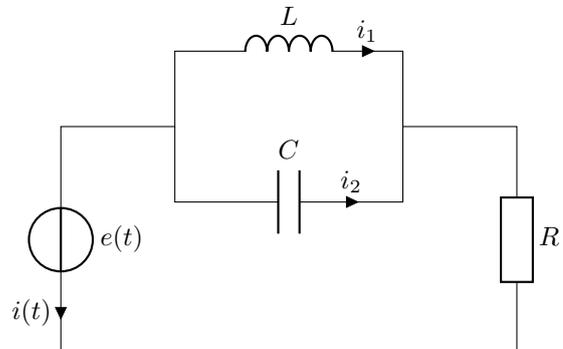


Étude d'un circuit en RSF

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Le GBF délivre une tension sinusoïdale d'amplitude e_0 , de pulsation ω et de phase à l'origine nulle. On étudie le circuit ci-contre, le GBF étant allumé depuis longtemps.

On étudie la tension u_R aux bornes de la résistance.



Données : $C = 100\mu\text{F}$; $R = 1k\Omega$; $L = 10\text{mH}$

1. Introduire **proprement** le formalisme complexe pour les signaux $e(t)$ et u_R .
2. Représenter le circuit à hautes et basses fréquences. Dans chacun des deux cas en déduire l'expression de u_R .
3. Exprimer l'amplitude complexe de la tension u_R .
4. Donner l'amplitude de la tension u_R .
5. En déduire que pour une valeur particulière de la pulsation, notée ω_c , la tension u_R est nulle. Faire l'application numérique.
6. Donner le déphasage $\Delta\varphi$ entre la tension u_R et celle du générateur $e(t)$. On distinguera deux cas suivant la valeur de ω .
7. On s'intéresse aux courants i_1 et i_2 dans la bobine et le condensateur.

(a) Montrer que le rapport des amplitudes est :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{LC\omega^2}$$

(b) Montrer que les courants i_1 et i_2 sont en opposition de phase.

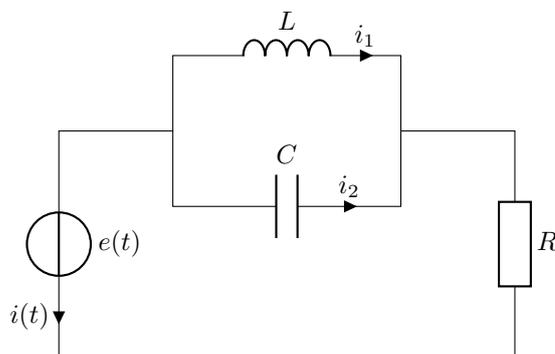


Étude d'un circuit en RSF

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Le GBF délivre une tension sinusoïdale d'amplitude e_0 , de pulsation ω et de phase à l'origine nulle. On étudie le circuit ci-contre, le GBF étant allumé depuis longtemps.

On étudie la tension u_R aux bornes de la résistance.



Données : $C = 100\mu\text{F}$; $R = 1\text{k}\Omega$; $L = 10\text{mH}$

1. On se place en RSF et on utilise une représentation complexe des signaux :

$\triangleright e(t) = e_0 \cos \omega t \rightarrow \underline{e} = e_0 e^{j\omega t}$

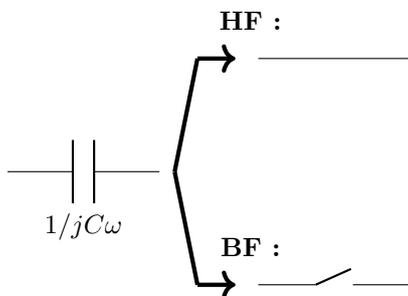
$\triangleright u_R(t) = U_0 \cos \omega t + \varphi \rightarrow \underline{u}_R = U_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$

2.

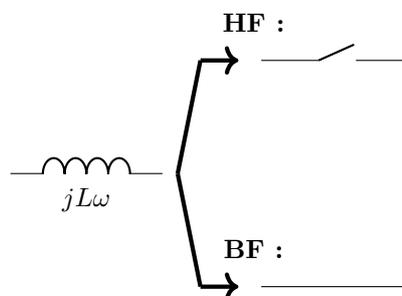
Méthode en DS. Étude à hautes et basses fréquences

\triangleright On remplace les bobines/condensateurs par leur dipôles équivalent

Condensateur :

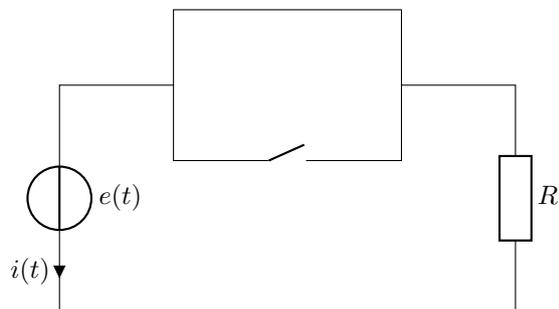


Bobine :

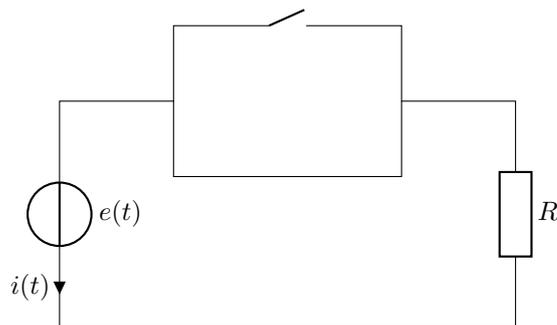


\triangleright on trouve les tensions : tension d'un fil = 0 ou bien loi des mailles/loi des nœuds/loi d'Ohm

Basses fréquences



Hautes fréquences



Dans les deux cas la loi des mailles donne $\underline{e} = 0 + \underline{u}_R$.

3.

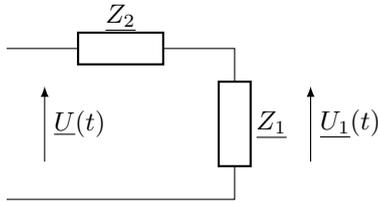
Méthode en DS. Quel outil pour quelle tâche

- ▷ On me demande une **tension**, j'ai en donnée une **tension** ⇒ pont diviseur de **tension**
 - ▷ On me demande un **courante**, j'ai en donnée un **courant** ⇒ pont diviseur de **courant**
 - ▷ On me demande une **tension**, j'ai en donnée un **courant** ⇒ loi d'**Ohm**
- et si on ne peut pas les utiliser, alors seulement on est reparti avec la loi des mailles/nœuds/...

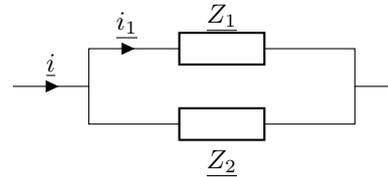
Méthode en DS. Appliquer un pont diviseur

- ▷ Je fais apparaître la forme d'un pont diviseur en associant des impédances

Pont diviseur de tension



Pont diviseur de courant



- ▷ J'explícite la formule

Pont diviseur de tension

$$\underline{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \underline{U}$$

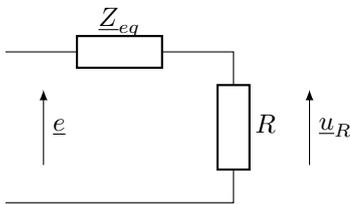
Pont diviseur de courant

$$\underline{i}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{i}$$

- ▷ J'applique mon pont diviseur

🔴🔴🔴 **Attention !** La plus grand difficulté, et la plus grande source d'erreur, proviendra de la première étape et trouver Z_1 et Z_2 .

Ici tension (\underline{u}_R) - tension (\underline{e}) ⇒ on fait un pont diviseur de tension. On force la forme "type" du ont diviseur de tension en associant L et C :



avec $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1 - LC\omega^2}{jL\omega}$.
 Donc $Z_{eq} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$.

Finalement :

$$\underline{u}_R = \frac{R}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} \underline{e}$$

🔴🔴🔴 **Attention !** Pour faire disparaître les fractions de fractions, on **multiplie** en haut et en bas par le dénominateur !!

$$\underline{u}_R = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \underline{e}$$

🔴🔴🔴 **Attention !** Différence signal et amplitude complexe !!

$\underline{u}_R = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} e_0 e^{j\omega t}$ est le signal et $\underline{U}_0 = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} e_0$ est l'amplitude complexe

(~ on enlève les $e^{j\omega t}$...)

4. \underline{U}_R n'existe pas ⇒ retour au réel

$$U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{|R(1 - LC\omega^2)|}{|R(1 - LC\omega^2) + jL\omega|} e_0 = \frac{R|1 - LC\omega^2|}{\sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2}} e_0$$

5. On remarque que $U_0 = 0$ si $1 - LC\omega^2 = 0$ donc si $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

6.

Méthode en DS. Trouver le déphasage entre deux signaux

Le déphasage entre deux signaux X_1 et X_2 est l'argument du rapport de leurs amplitude complexe :

$$\Delta\varphi = \arg \left[\frac{X_1}{X_2} \right]$$

On cherche alors :

$$\Delta\varphi = \arg \left[\frac{u_R}{e} \right] = \arg \left[\frac{R(1 - LC\omega^2)}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \right]$$

Donc (on découpe l'argument) : $\Delta\varphi = \arg [R(1 - LC\omega^2)] - \arg [R(1 - LC\omega^2) + jL\omega]$

🚫🚫🚫 **Attention !** au signe de la parti réelle!!

Cas où $1 - LC\omega^2 < 0$

Cas où $1 - LC\omega^2 > 0$

▷ $R(1 - LC\omega^2)$ est un réel positif \Rightarrow argument=0

▷ $R(1 - LC\omega^2)$ est un réel négatif \Rightarrow argument= π

▷ $\arg [R(1 - LC\omega^2) + jL\omega] = \arctan \left(\frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)} \right)$

▷ $\arg [R(1 - LC\omega^2) + jL\omega] = \pi + \arctan \left(\frac{-L\omega}{R(LC\omega^2 - 1)} \right)$

7. On s'intéresse aux courants i_1 et i_2 dans la bobine et le condensateur.

(a) On trouve i_1 et i_2 à partir de $\underline{i} \Rightarrow$ Pont diviseur de courant

$$i_1 = \frac{1/jC\omega}{jL\omega + 1/jC\omega} \underline{i} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{jL\omega}{jL\omega + 1/jC\omega} \underline{i}$$

On fait le rapport :

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1/jC\omega}{jL\omega} = \frac{-1}{LC\omega^2}$$

Finalement

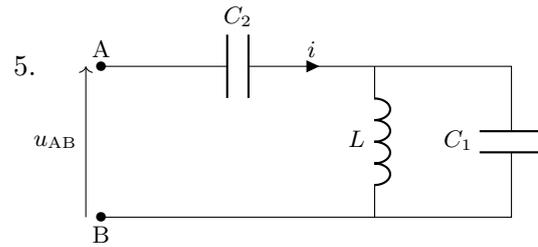
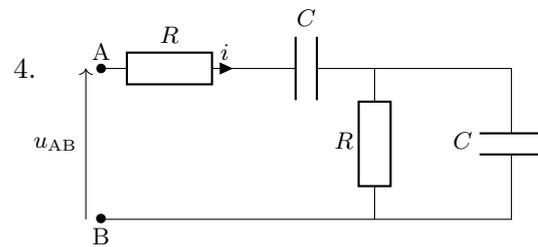
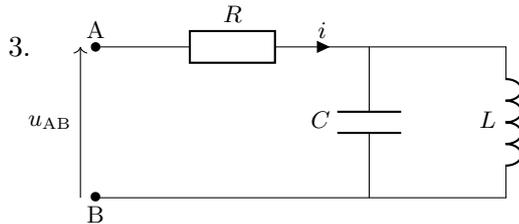
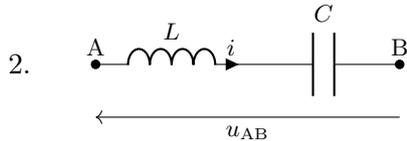
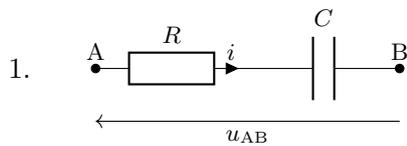
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{LC\omega^2}$$

(b) Déphasage $\arg \left[\frac{i_1}{i_2} \right] = \arg \left[\frac{-1}{LC\omega^2} \right] = \pi$ (réel négatif).

1 Calcul d'impédance

Exercice 1 - Calculs d'impédance : Déterminer l'impédance complexe des montages ci-dessous. On donnera toujours la solution sous la forme d'une impédance multipliée par une fraction rationnelle sans dimensions.

Astuce "Riri, Fifi et Loulou" : $RC\omega$, $LC\omega^2$ et $L\omega/R$ n'ont pas de dimension.



Exercice 2 - Modèle équivalent de condensateur :

Un condensateur réel peut-être modélisé par l'association en parallèle d'un condensateur parfait C_p et d'un résistor R_p .

- Établir l'expression de l'impédance équivalente Z_{eq} du condensateur réel en fonction de R_p , C_p et ω .
- Montrer que ce condensateur réel est équivalent à l'association série d'un condensateur C_s et d'un résistor R_s . Établir les expressions de C_s et de R_s en fonction de R_p , C_p et ω .
- En considérant $R_p C_p \omega \gg 1$, établir les expressions simplifiées de R_p et C_p en fonction de R_s , C_s et ω .
- Application numérique :* Calculer la capacité parallèle et la résistance parallèle équivalentes d'un condensateur de capacité série de $1 \mu\text{F}$ et de résistance série $2,5 \cdot 10^{-2} \Omega$ à 1 kHz .

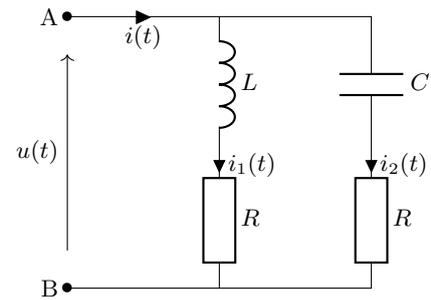
Réponses : $C_p = 1 \mu\text{F}$; $R_p = 1 \text{ M}\Omega$

2 RSF

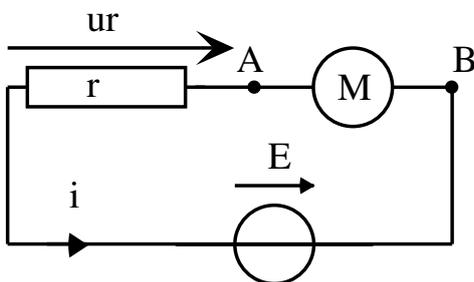
Exercice 3 - Étude d'un circuit en régime sinusoïdal forcé :

On étudie le circuit ci-contre où $u(t) = U_m \cos \omega t$.

- Déterminer l'admittance et l'impédance du dipôle AB.
- Déterminer $\underline{I}(t)$, $\underline{I}_1(t)$ et $\underline{I}_2(t)$.
- Pour quelles valeurs de C , L et R
 - ▷ les courants i et i_1 sont-ils en phase ?
 - ▷ les courants i_1 et i_2 sont-ils en quadratures de phase ?
- Quelle relation vérifient ω , L et C lorsque les amplitudes des deux courants i_1 et i_2 sont égales



Exercice 4 - Étude expérimentale d'un moteur :

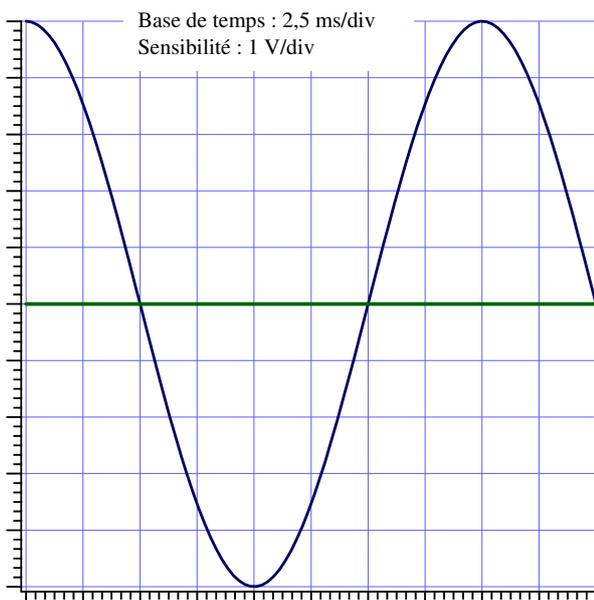


Dans cet exercice, on étudie un moteur M dont le comportement électrique vis à vis des circuits extérieurs sera toujours supposé pouvoir être modélisé comme équivalent à celui d'une résistance $R = 9,6 \Omega$ en série avec une inductance pure $L = 45 \text{ mH}$.

On étudie expérimentalement le montage de la figure ci-contre utilisant un générateur de tension sinusoïdale $E(t) = E \cos(\omega t)$ d'amplitude $E = 5 \text{ V}$ et de fréquence $\nu = 50 \text{ Hz}$. La résistance $r = 15 \Omega$ branchée en série avec le moteur M .

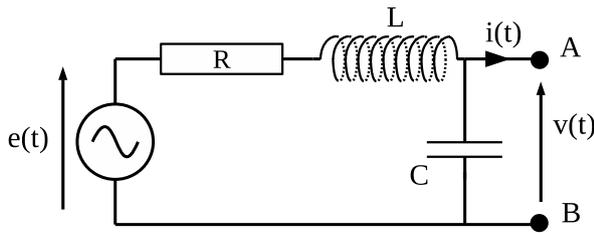
On note $u_r(t) = U \cos(\omega t + \phi)$ la tension aux borne de r en régime permanent.

- Déterminer numériquement les valeurs de U (en volts) et de ϕ (en degrés).
- La tension $u_r(t)$ est-elle en retard ou en avance sur $E(t)$?
- On désire observer sur un oscilloscope bi-courbe les tensions $E(t)$ (voie 1) et $u_r(t)$ (voie 2). Représenter, sur le schéma électrique, les branchements de l'oscilloscope.
- On a tracé sur la figure ci-contre le signal $E(t)$. Représenter sur sur ce même graphe la tension $u_r(t)$.



Réponses : $U = 2.64 \text{ V}$ et $\phi = -29.9^\circ$

Exercice 5 - Modèle de Thévenin en régime sinusoïdal forcé (*) :



En régime sinusoïdal forcé, on considère le dipôle compris entre les points A et B de la figure ci-contre dans laquelle la source idéale délivre une tension sinusoïdale :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

1. Etude en boucle ouverte :

- ▷ En boucle ouverte (A et B non reliés) que vaut l'intensité $i(t)$ qui sort du dipôle.
- ▷ Exprimer alors l'amplitude complexe associée à la tension $v(t)$.
- ▷ En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.

2. Etude en fonctionnement :

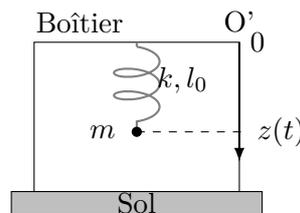
Si AB n'est pas en boucle ouverte, il délivre un courant $i(t)$ sinusoïdal, d'amplitude complexe \underline{I} non-nul.

- ▷ Exprimer dans ce cas l'amplitude complexe associée à la tension $v(t)$ en fonction de \underline{I} , E_0 et des autres paramètres du problème.
- ▷ En déduire qu'en régime sinusoïdal forcé et en notation complexe, le dipôle AB est équivalent à la mise en série d'une source idéale de tension d'amplitude complexe \underline{E}_{eq} et d'une impédance complexe \underline{Z}_{eq} que l'on exprimera.

$$\frac{\omega C I R + z_{OC} \omega C I - 1}{\omega C I R + z_{OC} \omega C I - 1} = \frac{1}{Z_{eq}} ; \frac{0 \omega C I R + z_{OC} \omega C I - 1}{E} = \frac{E_{eq}}{I} = \mathcal{O} ; \frac{C I}{I} = \omega_0^2 = \omega_0^2$$

3 RSF sur oscillateur mécanique

Exercice 6 - Le sismographe (pour plus tard) (*) : Un boîtier est posé sur le sol dont il suit les mouvements. Dans ce boîtier, on a suspendu à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k une masse m . Cette masse subit en plus de la force du ressort une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ avec \vec{v} le vecteur vitesse de la masse par rapport au boîtier. La position $z(t)$ est la position de la masse par rapport au sommet du boîtier.



1. Le sol ne vibre pas, quelle est la position d'équilibre z_{eq} de la masse m ?
2. Le sol ne vibre pas, on écarte la masse m de sa position d'équilibre de la distance d vers le bas, et on l'abandonne sans vitesse initiale. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse. Sans donner son expression exacte, quelle est la forme générale de la solution de cette équation ?
3. Le sol (et le boîtier) vibre, son mouvement est repéré par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} par $z_{sol}(t) = z_0 \cos(\omega t)$. Ce mouvement est modélisé par une nouvelle force, nommée force d'inertie d'entraînement, qui s'exprime par $\vec{F}_{ie} = -m \ddot{z}_{sol}(t) \vec{e}_z$. Écrire la nouvelle équation différentielle en $z(t)$ vérifiée par M.
4. En utilisant les notations complexes, déterminer $\underline{z}(t)$ lorsque le régime permanent est atteint. On posera $\omega_0^2 = k/m$ et $\underline{z}(t) = \underline{z} e^{j\omega t} + z_{eq}$.
5. Discuter le phénomène de résonance selon les valeurs de α .
6. On cherche à construire un sismographe, c'est-à-dire que nous voulons que la masse m suive au mieux le mouvement du sol pour la plus large gamme de fréquence possible. Comment choisir qualitativement la masse et la raideur du ressort pour avoir ce comportement ?

4 Résonance du RLC et lecture graphique

Exercice 7 - Circuit RLC : *A regarder une fois que le chapitre suivant sera terminé.*

On considère un circuit constitué d'une résistance R , d'une bobine L et d'une capacité C en série. Le circuit est alimenté par un générateur de tension délivrant $e(t) = e_0 \cos \omega t$, où l'amplitude e_0 de la tension fournie par le générateur est invariante au cours de l'expérience. On note $i(t)$ le courant circulant dans la maille et $I_m(\omega)$ son amplitude dépendant de la pulsation ω du générateur.

1. Montrer que l'amplitude du courant est donnée par

$$I_m(\omega) = \frac{e_0}{R} \frac{1}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^{1/2}}$$

avec $\omega_0^2 = 1/(LC)$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

On observe sur un oscilloscope les tensions $e(t)$ aux bornes du générateur et $u(t)$ aux bornes de la résistance comme représenté figure 1. On obtient les mesures expérimentales (avec incertitudes) tracées ci-dessous. La figure 2a représente l'amplitude du courant mesurée en fonction de la fréquence. La courbe figure 2b représente le déphasage entre la tension $e(t)$ et le courant $i(t)$.

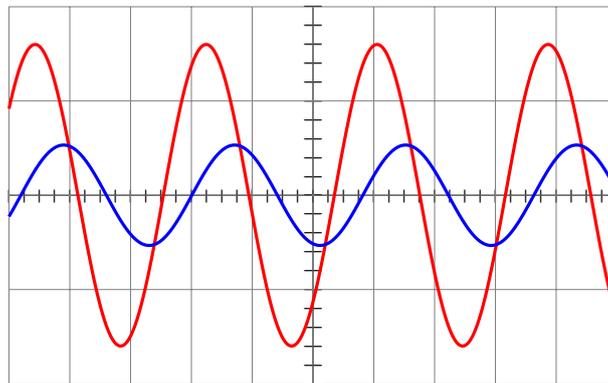
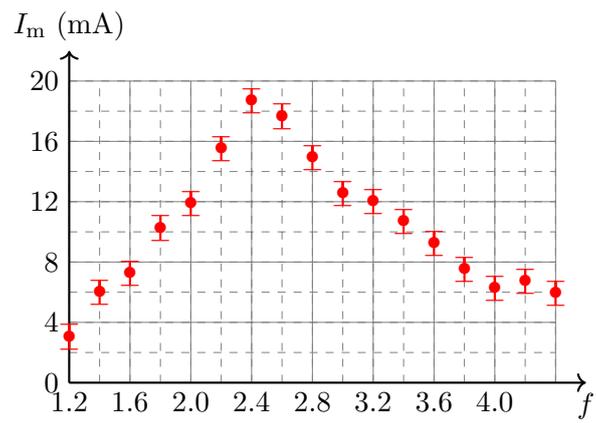
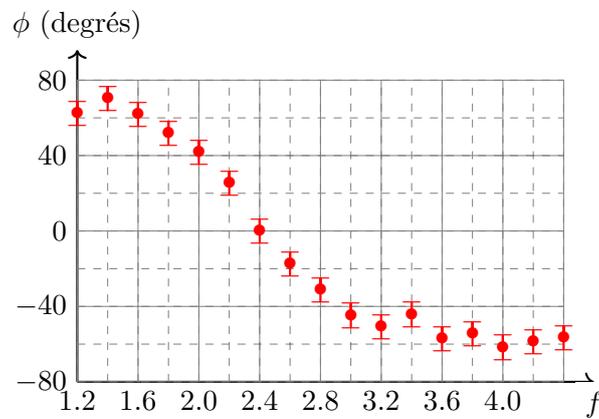


Fig. 1 – Calibre : 2.00 V et 200 μ s.

- 2.(a) Quel montage a-t-on réalisé afin d'obtenir sur un oscilloscope les courbes de la figure 1 ? En particulier, indiquer la position de la masse du circuit.
- (b) Identifier sur cette figure $u(t)$ et $e(t)$.
- (c) A partir de la figure (a), quel point de la figure (c) a-t-on obtenu ?
3. Que vaut numériquement la pulsation propre ?
4. Comment obtenir la valeur de la résistance R ? Faire l'application numérique.
5. Évaluer la bande passante $\Delta\omega$.
6. Évaluer le facteur de qualité Q , sachant que $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.
7. Dédurre de ce qui précède la valeur de l'inductance L et de la capacité C .



(a) Mesure de l'amplitude de l'intensité (fréquence en kilohertz)



(b) Mesure du déphasage entre e et i (fréquence en kilohertz)

1 Calcul d'impédance

Exercice 1 - : Calculs d'impédance :

1.

$$Z = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$
2.

$$\underline{Z} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}$$
3.

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega + 1/(jL\omega)} = R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} = R \frac{1 + jL/R\omega - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2}$$
4.

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{jC\omega + 1/R} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega} = R + \frac{1 + 2jRC\omega}{jC\omega - R(C\omega)^2} = R \frac{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}{jRC\omega - (RC\omega)^2}$$
5.

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{1}{jC_1\omega + 1/(jL\omega)} = \frac{1}{jC_2\omega} + \frac{jL\omega}{1 - LC_1\omega^2} = \frac{1 - L(C_1 + C_2)\omega^2}{jC_2\omega(1 - LC_1\omega^2)}$$

Exercice 2 - Modèle équivalent de condensateur :

1. On a un condensateur en parallèle avec une résistance, l'impédance équivalente est donc donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R_P} + jC_P\omega$$

Donc

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R_P}{1 + jR_P C_P \omega}$$

2. L'association d'un condensateur et d'une résistance en série donne une impédance équivalente :

$$\underline{Z}_{eq} = R_S + \frac{1}{jC_S\omega} = R_S - \frac{j}{C_S\omega}$$

Pour que les deux associations soient équivalentes, il faut que les impédances équivalentes obtenues soient égales.

$$\frac{R_P}{1 + jR_P C_P \omega} = R_S - \frac{j}{C_S\omega}$$

On fait apparaître la partie réelle et la partie imaginaire dans le membre de droite :

$$R_P \frac{1 - jR_P C_P \omega}{1 + (R_P C_P \omega)^2} = R_S - \frac{j}{C_S\omega}$$

On a donc :

$$R_S = \frac{R_P}{1 + (R_P C_P \omega)^2} \quad \text{et} \quad \frac{-1}{C_S\omega} = \frac{-R_P^2 C_P \omega}{1 + (R_P C_P \omega)^2}$$

Donc :

$$R_S = \frac{R_P}{1 + (R_P C_P \omega)^2} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{1 + (R_P C_P \omega)^2}{R_P^2 C_P \omega^2}$$

3. Pour $R_P C_P \omega \gg 1$:

$$R_S = \frac{R_P}{1 + (R_P C_P \omega)^2} \simeq \frac{R_P}{(R_P C_P \omega)^2}$$

Donc

$$R_S = \frac{1}{R_P C_P^2 \omega^2}$$

et

$$C_S = \frac{1 + (R_P C_P \omega)^2}{R_P^2 C_P \omega^2} \simeq \frac{(R_P C_P \omega)^2}{R_P^2 C_P \omega^2}$$

Donc

$$C_S = C_P$$

4. On a donc $C_P = C_S = 1\mu\text{F}$ et $R_P \simeq 1\text{M}\Omega$. On a bien une résistance très élevée en parallèle d'un condensateur idéal. En première approximation on peut considérer cette résistance en parallèle comme infini. Le modèle du condensateur idéal est correct.

2 RSF

Exercice 3 - Étude d'un circuit en régime sinusoïdal forcé :

1. On a deux branches sur lesquelles deux dipôles sont en parallèles. On va écrire pour chaque branche l'impédance équivalente.

▷ Sur la branche de gauche :

$$\underline{Z}_g = R + jL\omega$$

▷ Sur la branche de droite :

$$\underline{Z}_d = R + 1/jC\omega \Rightarrow \underline{Z}_d = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

Les deux branches sont associées en parallèles donc :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_g} + \frac{1}{\underline{Z}_d}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1 + jRC\omega + jC\omega(jL\omega + R)}{(jL\omega + R)(1 + jRC\omega)}$$

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega}{(jL\omega + R)(1 + jRC\omega)}}$$

On peut développer le dénominateur mais on gardera cette forme pour la suite des questions.

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} \times \frac{1 - LC\omega^2 + 2jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + j\omega(L/R + RC)}$$

2. On passe en notation complexe des signaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = U_m \cos \omega t \rightarrow \underline{u}(t) = U_m e^{j\omega t} \\ i_1(t) = I_{0,1} \cos(\omega t + \phi_1) \rightarrow \underline{I}_1 = I_{0,1} e^{j(\omega t + \phi_1)} = \underline{I}_{0,1} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I}_{0,1} = I_{0,1} e^{j\phi_1} \\ i_2(t) = I_{0,2} \cos(\omega t + \phi_2) \rightarrow \underline{I}_2(t) = I_{0,2} e^{j(\omega t + \phi_2)} = \underline{I}_{0,2} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I}_{0,2} = I_{0,2} e^{j\phi_2} \end{array} \right.$$

On applique la loi d'Ohm en RSF : $\underline{u}(t) = \underline{Z}_{\text{eq}} \underline{I}(t)$. Donc :

$$\underline{I}(t) = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} \underline{u}(t)$$

En notations complexes et pont diviseur de courant : Pour $\underline{I}_1(t)$:

$$\underline{I}_1(t) = \frac{R + 1/jC\omega}{R + 1/jC\omega + R + jL\omega} \underline{I}(t)$$

$$\underline{I}_1(t) = \frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} \underline{I}(t)$$

Pour $\underline{I}_2(t)$:

$$\underline{I}_2(t) = \frac{R + jL\omega}{R + 1/jC\omega + R + jL\omega} \underline{I}(t)$$

$$\underline{I}_2(t) = \frac{jC\omega(R + jL\omega)}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} \underline{I}(t)$$

3. Attention ! Important !!!

Méthode en DS. Obtenir un déphasage particulier

Calculer le déphasage $\phi_2 - \phi_1$ entre deux signaux complexes \underline{X}_2 et \underline{X}_1 :

$$\phi_2 - \phi_1 = \arg \frac{\underline{X}_2}{\underline{X}_1}$$

▷ en phase $\phi_2 - \phi_1 = 0$

$\frac{\underline{X}_2}{\underline{X}_1}$ est un réel **positif POSITIF** : sa partie imaginaire est nulle et sa partie réelle est positive

▷ en phase $\phi_2 - \phi_1 = \pi$

$\frac{\underline{X}_2}{\underline{X}_1}$ est un réel **négatif NEGATIF** : sa partie imaginaire est nulle et sa partie réelle est négative
négative

▷ en opposition de phase $\phi_2 - \phi_1 = \pi./2$

$\frac{\underline{X}_2}{\underline{X}_1}$ est un imaginaire pure : sa partie réelle est nulle

▷ On cherche $\varphi_1 - \varphi$ avec φ_1 l'argument de \underline{i}_1 et φ l'argument de \underline{i} .

$$\varphi_1 - \varphi = \arg \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}} = \arg \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}}$$

$$\varphi_1 - \varphi = \arg \left[\frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} \right]$$

On veut les deux signaux en phase donc $\varphi_1 - \varphi = 0$:

$$\frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} \text{ est un réel positif}$$

On l'écrit comme somme de partie réelle et imaginaire en multipliant son dénominateur par son complexe conjugué :

$$\frac{jRC\omega + 1}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} = \frac{(jRC\omega + 1)(-2jRC\omega + 1 - LC\omega^2)}{\text{la valeur du dénominateur n'a pas d'importance ici}}$$

on isole la partie imaginaire du numérateur et on la veut égale à zéro. Soit :

$$RC\omega(1 - LC\omega^2) - 2RC\omega = 0 \Rightarrow -RC\omega(1 + LC\omega^2)$$

$R = 0$ ou $C = 0$ ou $\omega = 0$ ou $1 + LC\omega^2 = 0$ ce qui est impossible

▷ Avec la même méthode on obtient :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \arg \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = \arg \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$$

Ici on a :

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega(jL\omega + R)}$$

On se force à faire apparaître des quantités sans dimension :

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega(1 + j\omega L/R)}$$

Les deux signaux devant être en quadrature de phase, on veut que $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2$ donc que

$$\arg \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1} = \pm\pi/2 \Rightarrow \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_1} \text{ est un imaginaire pur}$$

Donc :

$$\frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega(1 + j\omega L/R)} = \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega - LC\omega^2} \text{ est un imaginaire pur}$$

On calcule sa partie réelle en multipliant le dénominateur par son complexe conjugué :

$$\frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega(1 + j\omega L/R)} = \frac{(1 + jRC\omega)(-jRC\omega - LC\omega^2)}{\text{la valeur du dénominateur n'a pas d'importance ici}}$$

On isole sa partie imaginaire et on la veut égale à 0 :

$$-LC\omega^2 + R^2C^2\omega^2 = 0 \rightarrow RC = \frac{L}{R}$$

4. On cherche une condition sur ω , L et C pour que les amplitudes de i_1 et i_2 soient égales. Pour cela on calcule le module de $\frac{I_1}{I_2}$. Il est plus simple (pour se débarrasser des racines carrées) de travailler sur les modules au carré. On cherche R, C, ω tels que :

$$\left| \frac{I_1}{I_2} \right|^2 = 1$$

$$\frac{|1 + jRC\omega|^2}{|jRC\omega(1 + j\omega L/R)|^2} = 1$$

$$\frac{1 + (RC\omega)^2}{(RC\omega)^2(1 + (\omega L/R)^2)} = 1$$

$$1 + (RC\omega)^2 = (RC\omega)^2(1 + (\omega L/R)^2)$$

$$1 = (RC\omega)^2(\omega L/R)^2 \Rightarrow L^2C^2\omega^4 = 1 \Rightarrow LC\omega^2 = 1$$

Exercice 4 - Étude expérimentale d'un moteur :

1. On remplace dans le circuit le moteur par une bobine d'inductance L et une résistance de résistance r . On se place en RSF et on utilise la notation complexe :

$$E(t) = E \cos \omega t \rightarrow \underline{E}(t) = E e^{j\omega t}$$

$$u_r(t) = U \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \underline{u}_r(t) = \underline{U} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{U} = U e^{j\phi}$$

On cherche ici l'amplitude complexe de la tension \underline{u}_r \underline{U} . Le pont diviseur de tension permet d'obtenir :

$$\underline{U} = \frac{r}{r + R + jL\omega} E$$

On a donc

$$U = |\underline{U}| = \frac{rE}{\sqrt{(r + R)^2 + L^2\omega^2}}$$

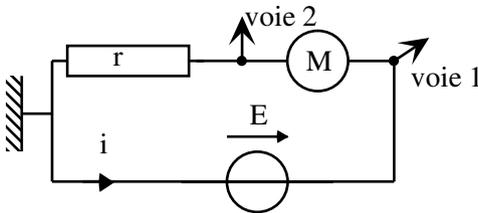
$$\phi = \arg(\underline{U}) = -\arg[(r + R) + jL\omega] = -\arctan\left(\frac{L\omega}{r + R}\right)$$

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** On peut utiliser la fonction tangente car la partie réelle de $(r + R) + jL\omega$ est positive et son argument est bien compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Application numérique : $U = 2,64 \text{ V}$ et $\phi = -29,9^\circ$.

2. $\phi < 0$ donc $u_r(t)$ est en retard sur $E(t)$.

3. On pense à bien placer la masse du GBF. La masse de l'oscilloscope et celle du GBF doivent correspondre. Pour mesurer les tensions on réalise les branchements suivants :



4. $U = 2,64V$ donc l'amplitude est de 2,64 carreaux.

Le plus délicat est le décalage temporel entre les deux courbes. Pour le déterminer on relie le déphasage et le retard temporel. Pour cela on se rappelle que :

$$\begin{array}{ccc} \text{déphasage} & \longleftrightarrow & \text{retard temporel} \\ 2\pi & \longleftrightarrow & T = 1 \text{ période} \\ \phi & \longleftrightarrow & \delta t \end{array}$$

En appliquant une règle de 3 on a : $\delta t = \frac{\phi}{2\pi}T$ soit $\delta t = 1,7 \text{ ms}$.

Comme $u_r(t)$ est en retard, elle atteint son maximum après $E(t)$. Ce retard temporel est égale à $|\delta t|$, $u_r(t)$ atteint son maximum 1,7ms après $E(t)$.

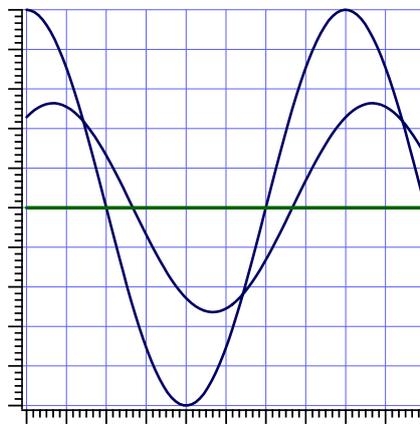


Fig. 1 – Étude expérimentale du moteur

Exercice 5 - Modèle de Thévenin en régime sinusoïdal forcé (*) :

1. \triangleright L'intensité sortante $i(t)$ est nulle, tous les dipôle du générateur sont donc en série.

\triangleright On adopte une représentation complexe des signaux $v(t) \rightarrow \underline{v} = \underline{V}_0 e^{j\omega t}$.

Par un pont diviseur de tension on a :

$$\underline{V}_0 = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + jL\omega + R} E_0 = \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

\triangleright Pour obtenir l'équation différentielle on multiplie par le dénominateur :

$$(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \underline{V}_0 E_0 \Rightarrow \underline{v} + LC \times \underbrace{(j\omega^2)\underline{v}}_{\frac{d^2\underline{v}}{dt^2}} + RC \times \underbrace{j\omega\underline{v}}_{\frac{d\underline{v}}{dt}} = \underline{e}$$

Si l'équation différentielle est vérifiée en complexe, elle l'est aussi en réel : $v(t) + LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} = e(t)$.

2. ▷ A cause du courant sortant i non nul, les dipôles ne sont plus en série. Impossible d'associer les impédances, on applique les lois des nœuds/mailles et on adopte une représentation complexe des signaux.

On appelle i_0 la tension délivrée par le GBF et i_C celle circulant dans le condensateur. Loi des nœuds : $i_0 = i + i_C$

$$\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{v} \text{ avec } \underline{u}_R = R\underline{i} ; \underline{u}_L = jL\omega\underline{i} ; \underline{v} = \underline{i}_C / jC\omega$$

$$\text{Donc : } \underline{e} = (R + jL\omega)(\underline{i} + \underline{i}_C) + \underline{v} \Rightarrow \underline{e} = (R + jL\omega)(\underline{i} + jC\omega\underline{v}) + \underline{v}$$

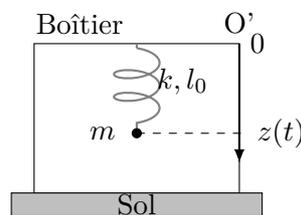
$$\text{On a donc } \underline{e} = (R + jL\omega) + (1 + jRC\omega - LC\omega^2) \underline{v}$$

Finalemment :

$$\underline{v} = \frac{\underline{e}}{\underbrace{1 + jRC\omega - LC\omega^2}_{\underline{E}_{eq}}} - \frac{R + jL\omega}{\underbrace{1 + jRC\omega - LC\omega^2}_{\underline{Z}_{eq}}} \underline{i}$$

3 RSF sur oscillateur mécanique

Exercice 6 - Le sismographe : :



1. La gravité et la force du ressort s'équilibrent. Donc $-k(z_{\text{éq}} - l_0) + mg = 0$ donc $z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$.
2. PFD : $m\ddot{z}(t) = mg - k(z(t) - l_0) - \alpha\dot{z}(t) = -k(z(t) - z_{\text{éq}}) - \alpha\dot{z}(t)$. La solution une sinusoïde décroissant de manière exponentielle.
3. On rajoute une force, dans ce cas, le PFD est modifié $m\ddot{z}(t) = mg - k(z(t) - l_0) - \alpha\dot{z}(t) + mz_0\omega^2 \cos(\omega t)$ et on réécrit l'équation différentielle

$$m\ddot{z}(t) + \alpha\dot{z}(t) + k(z(t) - z_{\text{éq}}) = z_0m\omega^2 \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

4. On cherche $\underline{Z}(t) = z_{\text{éq}} + \underline{Z}_0 \exp[i\omega t]$. Il vient

$$\underline{Z}_0 = \frac{mz_0\omega^2}{k - m\omega^2 + i\alpha\omega} = \frac{z_0\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\alpha}{m}\omega} \quad (3.2)$$

5. Pour la résonance il faut résoudre

$$\frac{d}{d\omega} \left(\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{\alpha^2}{m^2\omega^2} \right) = 0 \quad (3.3)$$

Tous calculs fait, on trouve

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \alpha^2/(2m^2\omega_0^2)} = \frac{\omega_0^2}{1 - \alpha^2/(2mk)} \quad (3.4)$$

Pour éviter la résonance, il faut $\alpha > \sqrt{2mk}$.

4 Résonance du RLC et lecture graphique

Exercice 7 - Circuit RLC :

1. On passe en notation complexe, et on utilise un pont diviseur :

$$\underline{u} = R/(R + 1/(jC\omega) - jL\omega)\underline{e} = 1/(1 + 1/(jRC\omega) - jL/R\omega)\underline{e}$$

On a donc

$$\underline{I}(\omega) = \underline{U}/R = 1/(1 + 1/(jRC\omega) + jL/R\omega)\underline{e}/R$$

On repasse en réel, et donc $I_m(\omega) = |\underline{I}(\omega)|$. Il vient

$$I_m = \frac{e_0}{R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2\right)^{1/2}}$$

On a donc $Q/\omega_0 = L/R$ et $Q\omega_0 = 1/(RC)$. D'où $Q = 1/R\sqrt{L/C}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

2. Pour mesurer à la fois $e(t)$ et $u(t)$, la masse du circuit doit se trouver entre la résistance et le générateur. Or le générateur impose une masse à sa borne d'entrée. Il faut donc placer la résistance en dernier dans le circuit RLC .

La tension aux bornes de la résistance est plus petite que la tension totale (formule de la question 3), c'est donc la voir Y. $\Rightarrow e(t)$: voie X ; $u(t) = Ri(t)$ voie Y.

La figure (c) représente l'évolution de l'amplitude du courant en fonction de la fréquence. Pour savoir quel point de la figure (c) on a obtenu, il faut savoir quelle est la fréquence délivrée par $e(t)$.

On observe 3 périodes sur environ 8.5 divisions, d'où $T = 8.5 \times 200 \mu\text{s}/3$ d'où $f \approx 1800 \text{ Hz}$ (aux incertitudes près).

3. Lorsque $f = f_0$, l'amplitude du courant est maximale. On mesure $f_0 = (2.4 \pm 0.1) \text{ kHz}$ et donc $\omega_0 = (15.0 \pm 0.6) \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
4. À la résonance, $I_m = e_0/R \approx 18 \text{ mA}$ (figure 1) et $e_0 \approx 3.2 \text{ V}$ (figure 1) donc $R \approx 180 \Omega$.
5. On mesure directement la bande passante sur la figure 2, il faut que la courbe soit supérieure à $I_m/\sqrt{2} \approx 13 \text{ mA}$ et donc $f_1 = 2 \text{ kHz}$ et $f_2 = 3 \text{ kHz}$ d'où $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 6.3 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
6. $Q = \omega_0/\Delta\omega \approx 2.4$.
7. $\Delta\omega = R/L$ d'où $L \approx 30 \text{ mH}$ et $C = 1/(RQ\omega_0)$ d'où $C \approx 150 \text{ nF}$.

Savoirs 

- ▷  Définir le phénomène de résonance d'un système physique
- ▷  **Résonance en tension**
 - ▷ donner la conditions de résonance
 - ▷ influence de Q sur l'acuité de la résonance
 - ▷ bande passante : définition et largeur
 - ▷ déphasage à $\omega = \omega_0$
- ▷  **Résonance en intensité**
 - ▷ influence de Q sur l'acuité de la résonance
 - ▷ bande passante : définition et largeur
 - ▷ déphasage à $\omega = \omega_0$

Savoir Faire

-  *Identifier un phénomène de résonance dans le comportement d'un système physique*
-  *Obtenir l'amplitude complexe d'un signal dans un oscillateur amorti*
-  *A partir de l'amplitude complexe :*
 - ▷ *identifier ω_0 et Q à partir d'une formule donnée en référence*
 - ▷ *reconnaître un résonance en tension ou en intensité*
 - ▷ *discuter l'apparition ou non d'une résonance en fonction du facteur de qualité*
 - ▷ *trouver la pulsation de résonance*
-  *A partir d'un graphe de résonance en amplitude et déphasage*
 - ▷ *mesurer ω_0*
 - ▷ *mesurer la largeur de la bande passante*
 - ▷ *mesurer Q*

1 Étude des phénomènes de résonance

1.1 Le phénomène de résonance avec les mains



Lorsqu'on pousse quelqu'un en balançoire, on donne nos impulsions à la nacelle à un rythme régulier et à un moment bien précis : lorsqu'elle est au sommet, juste avant de redescendre.

Mais on peut les donner à un autre rythme : se faisant on réalise que les oscillations de la balançoire sont plus petites.

D'un point de vu physique, on est dans le cadre de la RSF : le système (balançoire) est soumis à un signal excitateur (nos bras qui pousse) périodique (assimilé à une sinusoïde).

Suivant la fréquence du signal excitateur, on observe que l'amplitude des oscillations du système peuvent être :

- ▷ maximale
- ▷ bien plus grande que le signal excitateur

Définition. Résonance

Lorsqu'un système (électrique, mécanique...) est soumis à une excitation sinusoïdale, il peut exister certaines fréquences particulières, appelées fréquences de résonance, pour laquelle l'amplitude de sa réponse passe par un maximum. On dit qu'il y a **résonance**.

A la résonance, même une faible excitation peut suffire pour produire de très grandes oscillations du système (pouvant même mener à sa destruction).

Lorsqu'on fait de la balançoire, sans s'en rendre compte, on participe à un phénomène de résonance. En donnant nos impulsions à un rythme bien précis, on maximise l'amplitude du mouvement de la balançoire.

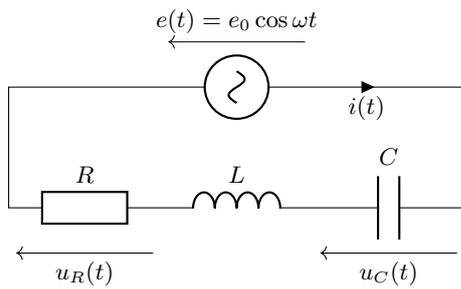
Propriété. Résonance ou pas résonance

Un phénomène physique présente une résonance si l'amplitude d'un signal X qu'il produit est maximale pour une certaine fréquence d'excitation, appelée fréquence de résonance.

La suite du cours va prendre la forme de questions-réponses auxquelles on cherchera à répondre. Vous retrouvez dans les exercices les mêmes questions. Ce chapitre est donc à la limite entre le cours et le TD.

1.2 La résonance en tension

On étudie un oscillateur amorti représenté par le circuit RLC série ci dessous. On s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur u_C .



Questions classique :

Montrer que l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur peut se mettre sous la forme :

$$\underline{U}_0 = \frac{K}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Avec K , ω_0 et Q des constantes qu'on exprimera en fonction des caractéristiques du circuit C , L , R et e_0 .

En déduire l'amplitude réelle U_0 .

► Amplitude complexe \underline{U}_C

On se place en RSF et en notation complexe.

À partir du circuit, on passe directement en régime forcé et, à l'aide d'un pont diviseur de tension, on obtient immédiatement

$$\underline{U}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} e(t)$$

soit, en remplaçant les impédances par leurs valeurs

$$\underline{U}_C(t) = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R + jL\omega} e(t).$$

Astuce : on essaiera au maximum d'écrire le dénominateur comme une somme de terme sans dimension.

$$\underline{U}_C(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} e(t)$$

On obtient l'amplitude complexe : $\underline{U}_C = \underbrace{U_0}_{e^{j\omega t}}$:

$$\underline{U}_0 = \frac{e_0}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

► Introduire ω_0 et Q

Le plus souvent l'énoncé vous demandera d'écrire l'amplitude complexe sous une forme demandée

On a $K = e_0$. On cherche donc :

$$\frac{1}{Q\omega_0} = RC \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

On résout la seconde équation en premier : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ puis :

$$\frac{1}{Q} = RC\omega_0 \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On retrouve la pulsation propre et le facteur de qualité de l'oscillateur amorti.

► Amplitude réelle du signal

L'amplitude U_0 de la tension est $U_0 = |\underline{U}_0|$ soit :

$$U_0 = \left| \frac{e_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \right| = \frac{e_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

1.3 Mise en évidence de la résonance

Propriété. Résonance en tension

On considère un système physique générant un signal $X(t)$ suite à une excitation par un signal sinusoïdal de pulsation ω . Si l'amplitude de X peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

on parle de résonance en tension.

Les propriétés seront les mêmes que pour l'étude de la tension u_C d'un circuit RLC série.

On trace la fonction $U_0(\omega)$ sur le graphe ci contre pour différente valeur de facteur de qualité.

On remarque :

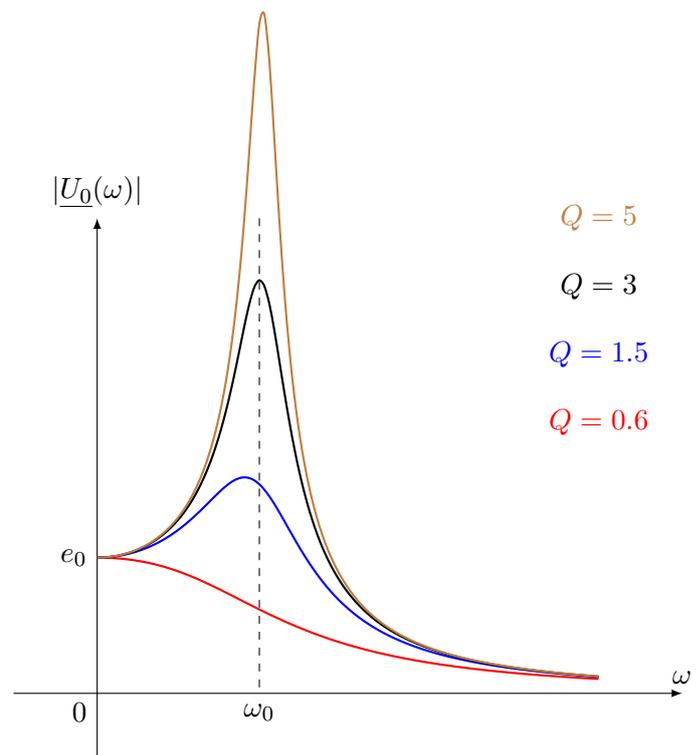
▷ la résonance n'apparaît que pour certaine valeur du facteur de qualité.

Pour qu'il y ait résonance, Q doit être élevé.

▷ lorsqu'il y a résonance, le maximum est atteint pour une fréquence, notée ω_r , appelée fréquence de résonance.

Elle est proche de ω_0 et plus Q est grand, plus $\omega_r \simeq \omega_0$

▷ la largeur du pique de résonance dépend du facteur de qualité : plus Q est grand, plus le pic est étroit.



Propriété. Condition de résonance

Le phénomène de résonance en tension n'apparaît que si $Q > 1/\sqrt{2}$.

Plus Q est grand, plus le pique de résonance est fin et plus l'amplitude est élevée.

Exemple 1 : On définit la variable $x = \omega/\omega_0$. Montrer que la fonction $f : x \rightarrow (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ passe par un minimum x_r si $Q > 1/\sqrt{2}$. Exprimer x_r .

On cherche un minimum d'une fonction \Rightarrow on dérive !

$$f'(x) = -4x(1 - x^2) + 2\frac{x}{Q^2} \text{ et donc } -4x_r(1 - x_r^2) + 2\frac{x_r}{Q^2} = 0$$

On simplifie pour avoir :

$$(1 - x_r^2) - \frac{1}{2Q^2} = 0 \Rightarrow x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette solution est réelle si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ donc pour $Q > 1/\sqrt{2}$.

Finalement $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

La résonance en tension est atteinte pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > 1/\sqrt{2}$. On remarque bien que $\omega \simeq \omega_0$ si Q est grand.

Propriété. Fréquence de résonance

Le maximum de la tension est atteint pour une pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

Plus Q est grand, plus ω_r est proche de ω_0 .

1.4 Résonance en intensité

Application 1 :

1. Dans le même circuit, en utilisant la tension aux bornes de la résistance, montrer que l'amplitude complexe \underline{I}_0 de l'intensité $\underline{i}(t)$ s'écrit comme :

$$\underline{I}_0 = \frac{K}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec K , ω_0 et Q trois constantes qu'on exprimera à partir de e_0 , R , L et C .

2. En déduire qu'il existe toujours un phénomène de résonance pour $\omega_r = \omega_0$.

3. Donner l'amplitude de l'intensité à la résonance.

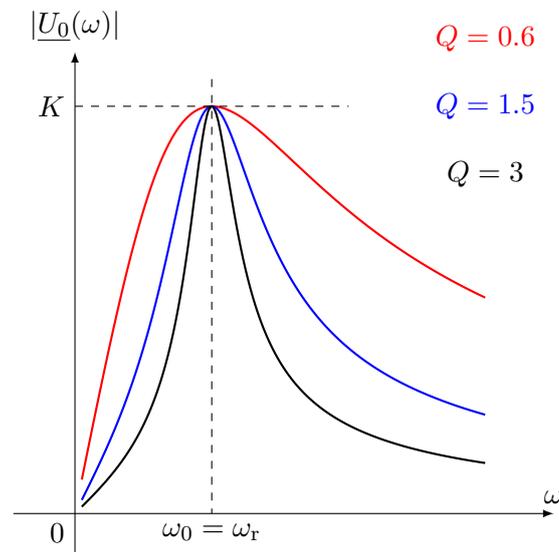
Propriété. Résonance en intensité

On considère un système physique générant un signal $X(t)$ suite à une excitation par un signal sinusoïdal de pulsation ω . Si l'amplitude de X peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{K}{\sqrt{1 + Q \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2}}$$

on parle de résonance en intensité.

Les propriétés seront les mêmes que pour l'étude de l'intensité i d'un circuit RLC série.

**Propriété. Condition de résonance**

Le phénomène de résonance en intensité apparaît quelque soit la valeur du facteur de qualité Q . Plus Q est grand, plus le pique de résonance est fin et mais l'amplitude ne varie pas.

Propriété. Fréquence de résonance

Le maximum de l'intensité est atteint pour une pulsation $\omega_r = \omega_0$.

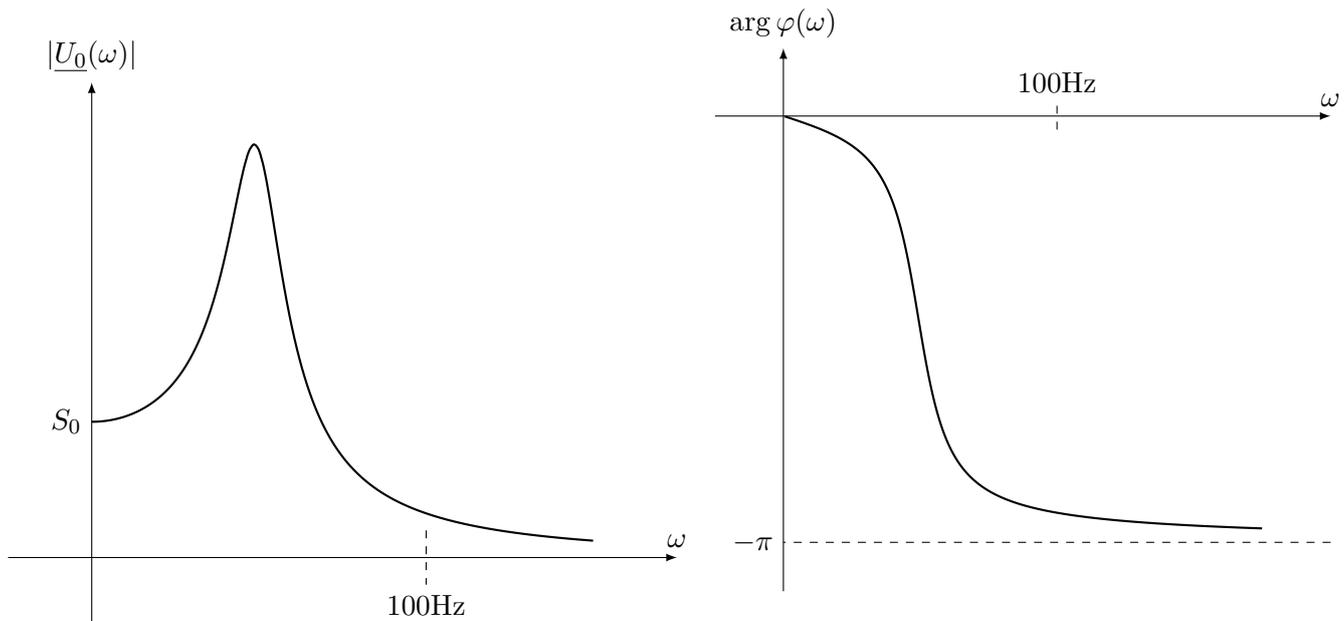
2 Etude graphique de la résonance d'un oscillateur amorti

Système étudié :

On étudie un oscillateur amorti de pulsation ω_0 et de facteur de qualité Q . Il peut être mécanique, électrique, inductif, ... On excite le système avec un signal sinusoïdal $s(t) = S_0 \cos \omega t$. On mesure le signal $X(t)$ généré par le système (*tension* \hat{u}_c , intensité i , ...).

On obtient deux graphes :

- ▷ l'amplitude X_0 de $X(t)$ en fonction de la pulsation ω du signal s
- ▷ le déphasage entre $X(t)$ et $s(t)$



Que mesurer sur un graphe de résonance ?

On cherche à obtenir les caractéristiques ω_0 et Q du système. Pour cela on mesure :

- ▷ la pulsation où le déphasage est particulier (quadrature, opposition ou en phase)
- ▷ la bande passante et sa largeur

2.1 Déphasage particulier

Montrons que pour $\omega = \omega_0$, lors d'une résonance en tension, le déphasage entre $X(t)$ et $s(t)$ prend une valeur particulière.

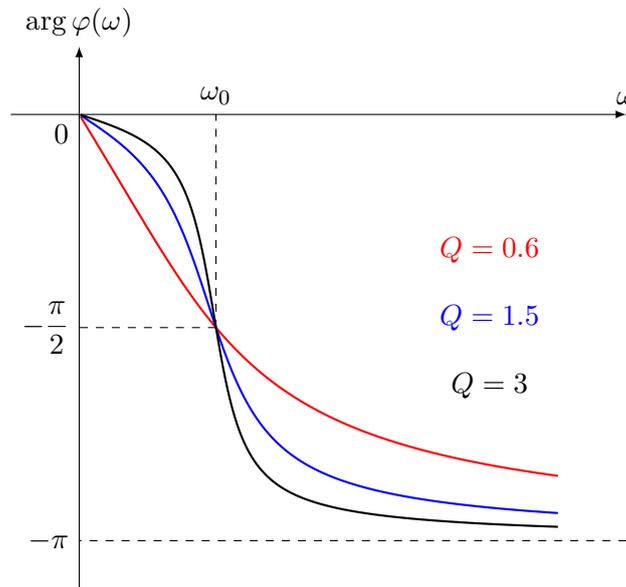
Pour une résonance en tension, l'amplitude complexe \underline{X}_0 de X est :

$$\underline{X}_0(\omega) = \frac{K}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Soit pour $\omega = \omega_0$: $\underline{X}_0(\omega_0) = \frac{K}{\frac{j}{Q}} = \frac{KQ}{j} = -jKQ$.

Donc $\arg \underline{X}_0(\omega_0) = -\pi/2$.

On peut alors facilement mesurer ω_0 via le graphe du déphasage :



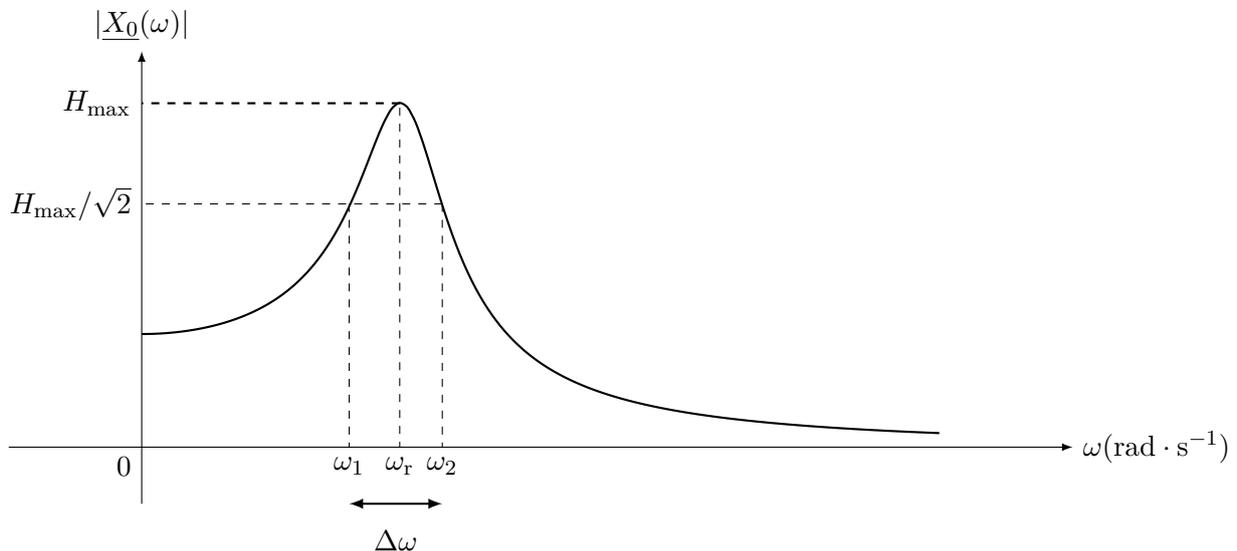
Application 2 : De la même façon, montrer que pour une résonance en intensité le déphasage pour $\omega = \omega_0$ est égal à 0.

2.2 Bande passante et largeur de bande passante

Définition. Bande passante

La **bande passante** $[\omega_1, \omega_2]$ d'un système correspond à l'ensemble des pulsations telles que

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2] \implies |\underline{H}(\omega)| > \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}.$$



Propriété. Largeur de la bande passante

La largeur de la bande passante $\Delta\omega$ dépend du facteur de qualité :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est petite. On parle de résonance **aïgue**.

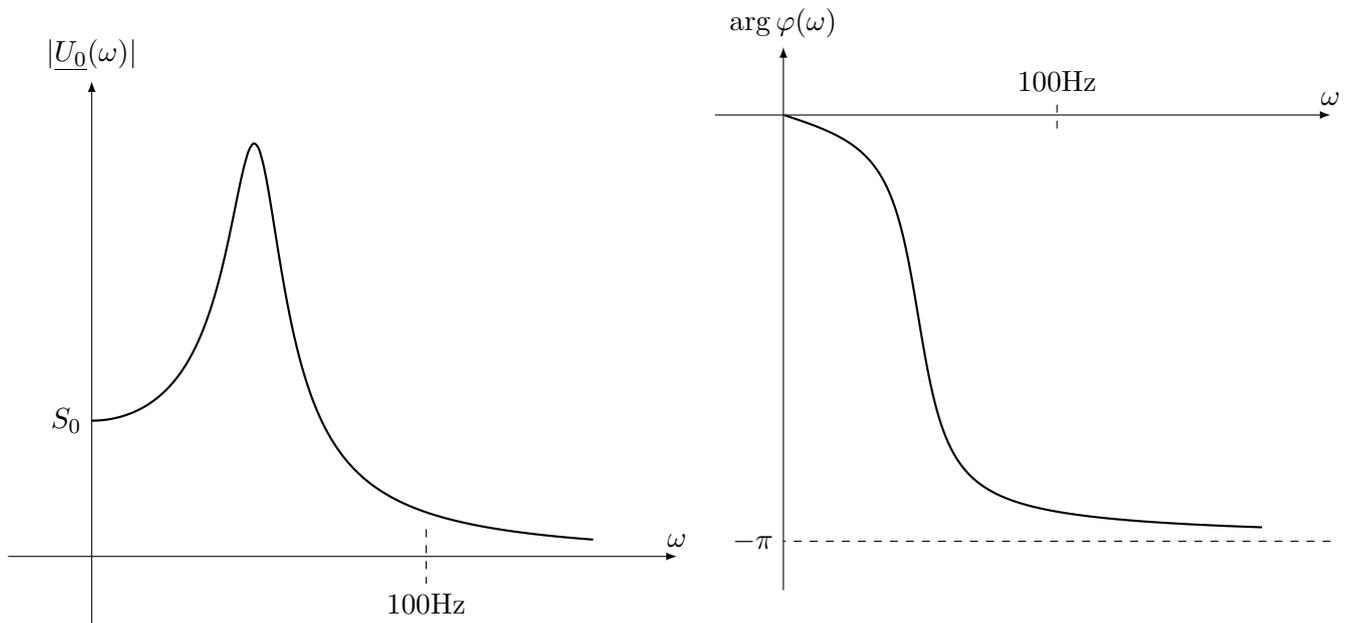
En mesurant la largeur de la bande passante, on obtient facilement une estimation du facteur de qualité :

$$Q = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

2.3 Mesure de ω_0 et Q

A partir d'un graphe de résonance, trouver

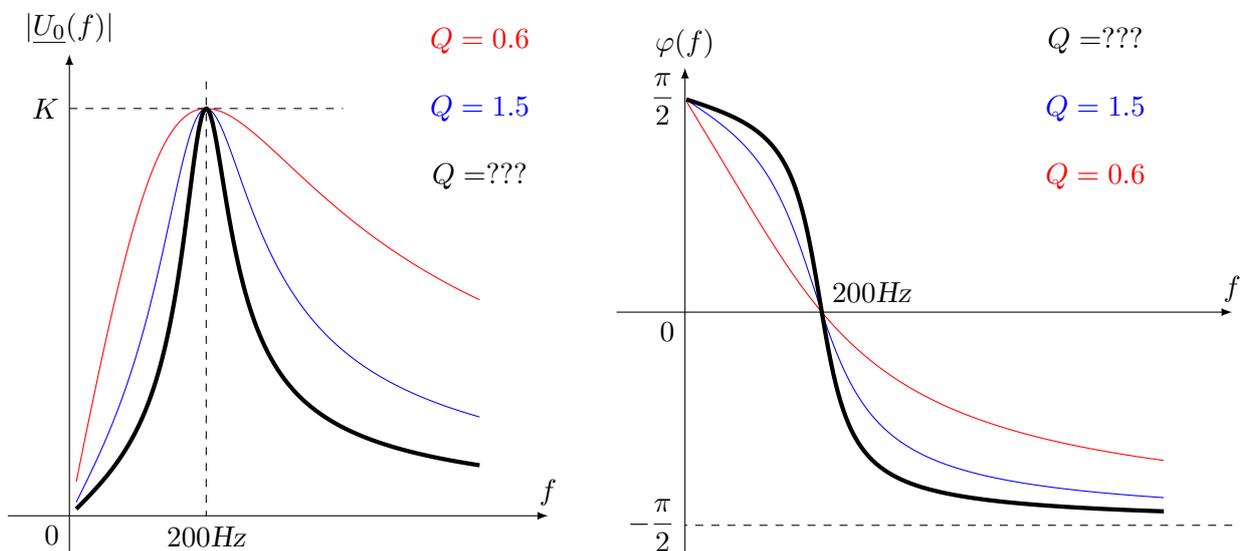
- ▷ la pulsation propre
- ▷ le facteur de qualité



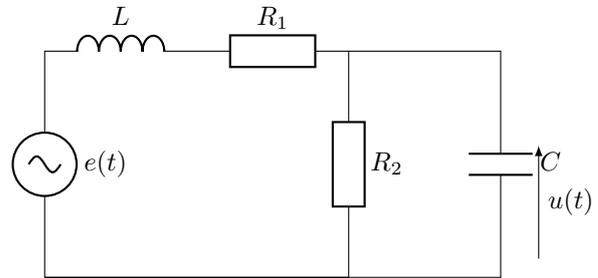
Application 3 :

On donne ici le graphe de résonance d'une tension $U(t)$.

1. Est-ce un phénomène de résonance en tension ou en intensité ?
2. Donner la pulsation de résonance.
3. A l'aide du graphe, estimer la valeur de ω_0 et Q pour la courbe en trait épais.



Le générateur impose $e(t) = E \cos(\omega t)$ avec $E=10V$.
On suppose que la tension aux bornes de C peut s'écrire
aux temps longs comme $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.



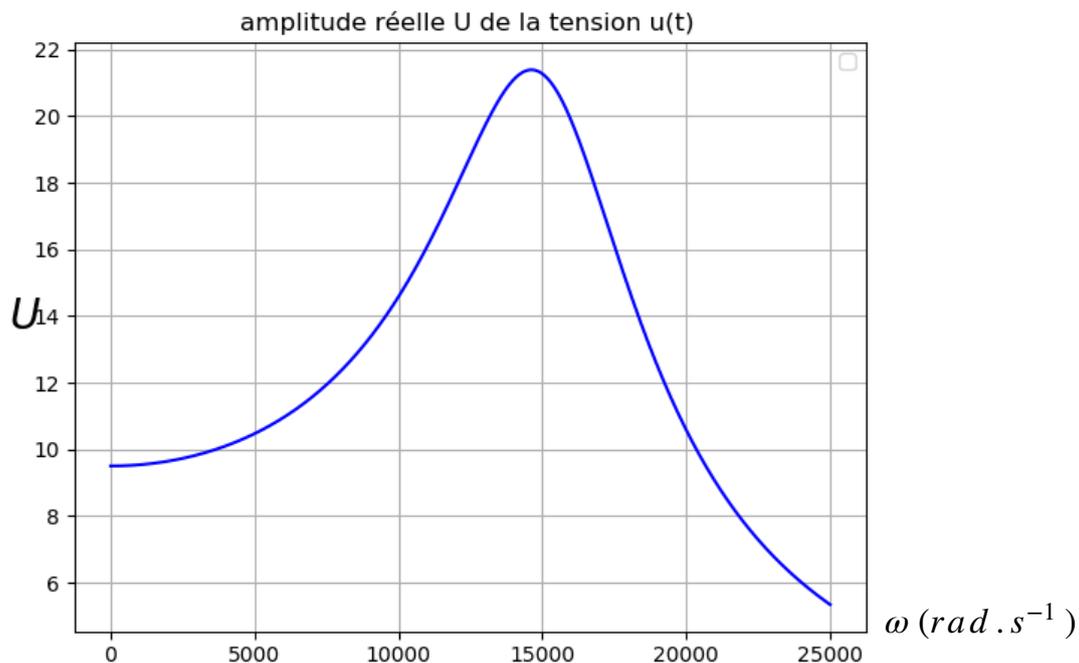
1. Introduire proprement le formalisme complexe pour $e(t)$ et $u(t)$.
2. Montrer que l'amplitude complexe \underline{U}_0 de la tension u peut s'écrire :

$$\underline{U}_0 = \frac{u_\infty}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec u_∞ , ω et ω_0 des grandeurs qu'on exprimera en fonction de L , R_1 , R_2 et C .

Par la suite, et par simplicité d'écriture, on manipulera plutôt la variable $x = \omega/\omega_0$, appelé pulsation réduite.

3. Donner l'expression de φ et U_0 .
4. Montrer qu'il existe un phénomène de résonance que que si $Q > 1/\sqrt{2}$.
On suppose par la suite qu'on observe un phénomène de résonance.
5. Donner la pulsation de résonance ω_r .
6. En déduire l'expression de l'amplitude maximale U_{max} de la tension u en fonction de u_∞ et Q .
7. Donner la pulsation de résonance ω_r et l'amplitude de résonance U_{max} quand Q devient très grand.
8. On donne le graphe de $U_0(\omega)$ et on suppose que Q est grand si bien qu'on a $\omega_r \simeq \omega_0$. Déterminer graphiquement ω_0 , la bande passante et le facteur de qualité Q .

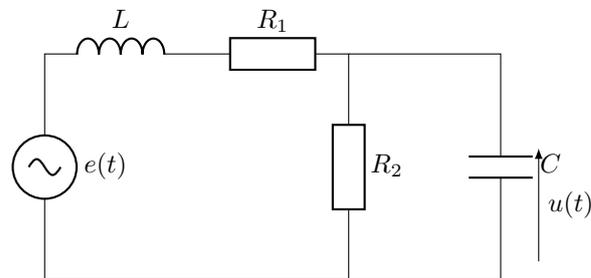




Résonance d'un circuit

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

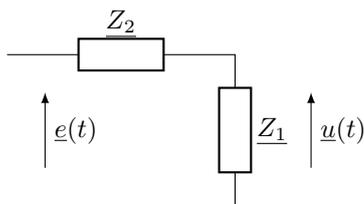
Le générateur impose $e(t) = E \cos(\omega t)$ avec $E=10V$.
On suppose que la tension aux bornes de C peut s'écrire
aux temps longs comme $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.



1. On adopte une représentation complexe des signaux :

$$e(t) = E \cos(\omega t) \rightarrow \underline{e} = E e^{j\omega t} \text{ et } u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{u} = \underline{U}_0 e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$$

2. Pont diviseur de tension : $\underline{u} \leftrightarrow \underline{e}$



▷ \underline{Z}_1 est l'association de R_2 et C en parallèle

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_2} + jC\omega = \frac{1 + jR_2C\omega}{R_2} \rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

▷ \underline{Z}_2 est l'association de R_1 et L en série

$$\underline{Z}_2 = jL\omega + R_1$$

$$\text{On a alors : } \underline{u} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} = \frac{\frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}}{\frac{R_2}{1 + jR_2C\omega} + jL\omega + R_1} \underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{R_2}{R_2 + (jL\omega + R_1)(1 + jR_2C\omega)} \underline{e} \Rightarrow \underline{u} = \frac{R_2}{R_2 + jL\omega - R_2LC\omega^2 + R_1 + jR_1R_2C\omega} \underline{e}$$

C'est moche donc ... on range : les terme en ω^2 , ceux en $j\omega$ et les autres

$$\underline{u} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega(L + R_1R_2C) - R_2LC\omega^2} \underline{e}$$

On fait apparaître le 1 au dénominateur en factorisant par $R_1 + R_2$

$$\underline{u} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + j\omega \frac{L + R_1R_2C}{R_1 + R_2} - \frac{R_2LC}{R_1 + R_2} \omega^2} \underline{e}$$

On compare les deux expressions e on identifie :

$$\omega_0^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_2LC} \text{ et } \omega_0 Q = \frac{R_1 + R_2}{L + R_1R_2C}$$

On trouve :

$$Q = \frac{R_1 + R_2}{L + R_1R_2C} \times \sqrt{\frac{R_2LC}{R_1 + R_2}} = \frac{\sqrt{R_1 + R_2}}{L + R_1R_2C} \sqrt{R_2LC}$$

Alors oui c'est moche mais en étant rigoureux sur l'écriture et la méthode c'est tout à fait faisable ! Et surtout on conserve les formes avec Q et ω_0 !

Par la suite, et par simplicité d'écriture, on manipulera plutôt la variable $x = \omega/\omega_0$, appelé pulsation réduite.

3. On passe au module et l'argument :

$$|U_0| = \frac{u_\infty}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$\varphi = \arg u_\infty - \arg \left[(1-x^2) + j\frac{x}{Q} \right]$$

Deux cas suivant le signe de $(1-x^2)$:

$$\varphi = -\arctan \frac{x}{Q(1-x^2)} \text{ si } 1-x^2 > 0 \text{ ou } \varphi = -\left(\pi - \arctan \frac{x}{Q(1-x^2)}\right) \text{ sinon}$$

4.  **Attention !** Bien comprendre la résonance !

La résonance est l'existence d'un maximum d'amplitude à une certaine pulsation, appelée pulsation de résonance ω_r . On cherche donc un maximum à $U_0 \Rightarrow$ minimiser le dénominateur.

$$F : x \rightarrow (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \text{ et } F'(x) = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

On cherche $F'(x) = 0$ soit :

$$-4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette solution n'est possible que si $1/2Q^2 < 1$ donc $Q > 1/\sqrt{2}$.

5. On a alors $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ et donc $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

6. U_{max} est $U(\omega_r)$ soit :

$$U_{max} = \frac{u_\infty}{\sqrt{(1-x_r^2)^2 + \frac{x_r^2}{Q^2}}} = \frac{u_\infty}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}}$$

$$\text{Soit } U_{max} = \frac{u_\infty}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

7. Lorsque Q devient grand, $x_r \simeq 1$ et $\omega_r \simeq \omega_0$. On trouve alors :

$$U_{max} = \frac{u_\infty}{\sqrt{(1-1^2)^2 + \frac{1^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} = Qu_\infty$$

8. On mesure ω_0 au niveau du sommet du pique de résonance et la bande passante via

▷ on mesure l'amplitude max $U_{max} = 21,5\text{V}$

▷ on cherche les fréquences ω_1 et ω_2 pour lesquelles $U = U_{max}/\sqrt{2} = 15,2\text{V}$

▷ la largeur est $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

On trouve le facteur de qualité via : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Table des matières

1	Notion de filtre : étude d'un filtre passe-bas du premier ordre	3
1.1	Position du problème et notion de quadripôle.	3
1.2	Nature du filtre : étude expérimentale et asymptotique	3
1.3	La fonction de transfert	5
2	Diagramme de Bode	6
2.1	Définition et échelle logarithmique	6
2.2	Tracé du diagramme de Bode du passe bas d'ordre 1	7
2.3	Utilisation d'un diagramme de Bode	8
2.4	Zones rectilignes du diagramme de gain :	8
2.5	Notion de bande passante	9
3	Théorie générale du filtrage linéaire	10
3.1	Réponse d'un filtre linéaire	10
3.2	Représentation de Fourier d'un signal périodique.	11
3.3	Filtrage linéaire d'un signal périodique quelconque.	12
4	Applications : étude de filtre	14
4.1	Le filtre passe-haut du premier ordre.	14
4.2	Deux filtres du second ordre.	17



Savoirs 

- ▷  **Quadripôle**
 - ▷ tension d'entrée, tension de sortie
 - ▷ intensité d'entrée, intensité de sortie

- ▷  **Filtre linéaire**
 - ▷ Notion de filtrage
 - ▷ Nature des filtres : passe-haut, passe-bas, passe bande, coupe-bande
 - ▷ Fonction de transfert

- ▷  **Diagramme de Bode**
 - ▷ notion d'échelle logarithmique
 - ▷ gain et gain en décibel
 - ▷ bande passante
 - ▷ asymptote et pente (décibel par décade)

- ▷  **Théorème de Fourier**
 - ▷ Décomposition d'un signal périodique
 - ▷ Spectre d'un signal
 - ▷ Notion de fondamental et d'harmoniques, amplitudes associées

Savoir Faire

-  **Etude d'un filtre**
 - ▷ obtenir la nature d'un filtre par une étude asymptotique
 - ▷ obtenir la fonction de transfert H
 - ▷ obtenir le gain ; le gain en décibel et le déphasage
 - ▷ tracer le diagramme de Bode pour un passe-bas ou un passe-haut d'ordre 1

-  Construire un filtre en fonction d'un cahier des charges donné

-  **Réponse d'un filtre** : Donner la réponse $s(t)$ d'un filtre à une excitation $e(t)$
 - ▷ $e(t)$ sinusoïdale
 - ▷ $e(t)$ somme de sinusoïdes
 - ▷ $e(t)$ périodique quelconque donnée avec son spectre
en utilisant soit la fonction de transfert soit le diagramme de Bode

-  Reconnaître un effet moyennneur dérivateur et intégrateur d'un filtre

-  Discuter la qualité d'un filtre d'ordre 2 à l'aide de son facteur de qualité ou de sa bande passante

1 Notion de filtre : étude d'un filtre passe-bas du premier ordre

1.1 Position du problème et notion de quadripôle

On étudie à nouveau le circuit RC mais on branche aux bornes du condensateur deux fils. On alimente le circuit avec une tension $e(t)$ et on mesure la tension de $s(t)$ aux bornes des fils.

Expérience 1 : Filtre RC avec signal sinusoïdal en entrée, $R = 1k\Omega$ et $C = 10nF$.

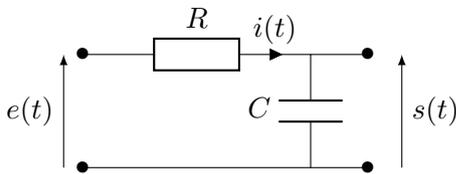


Fig. 1 – Le filtre RC .

On choisit successivement un signal sinusoïdal $e(t)$ d'amplitude $E_0 = 2V$ et de pulsation ω avec :

- ▷ $\omega = 10MHz$
- ▷ $\omega = 1MHz$
- ▷ $\omega = 100kHz$
- ▷ $\omega = 10kHz$

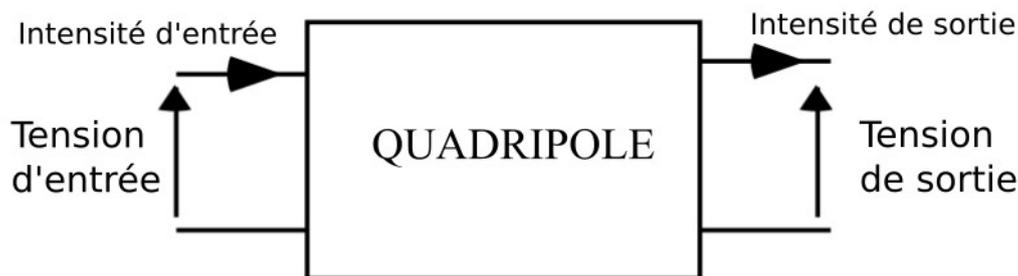
On a ainsi créé un composant électrique possédant quatre bornes de branchement : c'est un quadripôle.

Définition. Quadripôle

Un quadripôle possède deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.

On appelle grandeurs d'entrée et de sortie les courants et tensions à l'entrée et à la sortie.

Schéma d'un quadripôle :



Le quadripôle n'est pas utilisé seul. On distingue :

- ▷ le **dispositif d'entrée** (en général un générateur de tension ou de courant, ou la sortie d'un autre quadripôle)
- ▷ le **dispositif de sortie** (en général une simple résistance dite de charge, ou l'entrée d'un autre quadripôle)

1.2 Nature du filtre : étude expérimentale et asymptotique

► Étude expérimentale

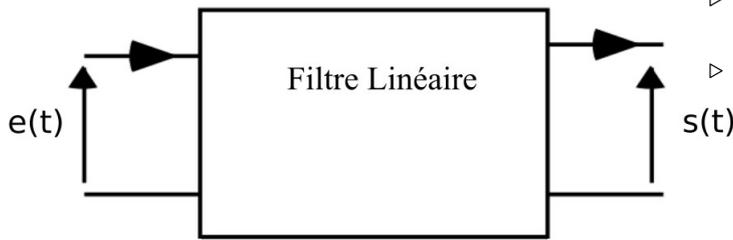
On observe :

- ▷ « basse fréquence », le signal de sortie semble être de même amplitude que le signal d'entrée ;
- ▷ « haute fréquence », le signal de sortie est d'amplitude très faible.

Le quadripôle fournit un signal $s(t)$:

- ▷ quasi-similaire au signal d'entrée $e(t)$ si ce dernier possède une faible fréquence
- ▷ nul si le signal d'entrée $e(t)$ possède une fréquence élevée

Schéma de fonctionnement du quadripôle :



En reprenant le schéma d'un quadripôle, le circuit
 > laisse passer $e(t)$ si sa fréquence est suffisamment basse
 > bloque $e(t)$ si sa fréquence est trop élevée

► **Notion de filtre**

Le quadripôle permet de trier les signaux suivants leur fréquence : c'est un filtre.

Définition. Filtre

Un filtre est un dispositif électronique qui agit de façon sélective sur un signal en fonction de la fréquence de ce dernier.

Celui-ci est passe-bas : les basses fréquences passent et les hautes sont bloquées On étudiera également des filtres :

- > passe-haut : laisse passer les hautes f , coupe les basses f
- > passe-bande : coupe les hautes f , coupe les basses f
- > réjecteur de bande : laisse passer les hautes f et les basses f

► **Prévision du caractère : étude asymptotique**

Propriété. Etude asymptotique

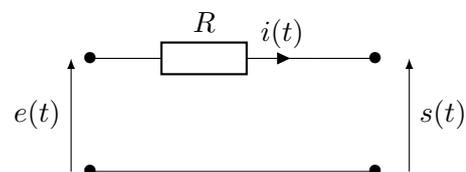
L'étude du comportement à hautes et basses fréquences d'un filtre en RSF permet de déduire son caractère (passe-bas, passe-haut et passe-bande).

Nous étudions le circuit en régime sinusoïdal forcé (RSF).

Rappel des comportements à hautes et basses fréquences :

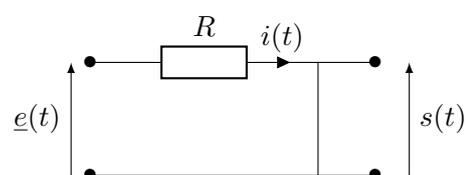
Basses fréquences :

A « basses fréquences », le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. La tension de la résistance est nulle et, par une loi des mailles, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée



Hautes fréquences :

A « hautes fréquences », le condensateur est équivalent à un fil. La tension de sortie est la tension à ses bornes, elle est donc nulle.



On retrouve bien le comportement d'un filtre passe-bas.

1.3 La fonction de transfert

Définition. Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre est la grandeur complexe

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$

avec $\underline{s}(t)$ le signal de sortie complexe et $\underline{e}(t)$ le signal d'entrée complexe du filtre.

► Calcul de la fonction de transfert

Astuce pratique :

La fonction de transfert d'un filtre se trouve le plus souvent en associant des impédances complexes jusqu'à pouvoir appliquer un pont diviseur de tension.

Cas du circuit RC :

Ainsi, à partir de la figure 1, il vient

$$\underline{s}(t) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \underline{e}(t) = \frac{1/(jC\omega)}{R + 1/(jC\omega)} \underline{e}(t) .$$

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}(t) .$$

Propriété. Fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec ω_0 la **pulsation de coupure du filtre** et K une constante.

Ici $K = 1$ On reconnaît pour le filtre RC la pulsation de coupure

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Ordre d'un filtre :

Le filtre est dit du premier ordre car les polynômes en $j\omega$ du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert sont d'ordres 1 au maximum.

► Utilité pratique de la fonction de transfert

Le signal en sortie du filtre $s(t)$ s'écrit comme :

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- ▷ S_0 amplitude réelle : $S_0 = |\underline{S}_0|$, amplitude complexe
- ▷ ω pulsation du signal en entrée, ici $e(t)$
- ▷ φ déphasage par rapport à $e(t)$: $\varphi = \arg \underline{S}_0$

Signal complexe de sortie $\underline{s}(t)$:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \Rightarrow \underline{s}(t) = \underline{H}(\omega) \underline{e}(t)$$

🚫🚫🚫 **Attention !** ω la pulsation du signal d'entrée $\underline{e}(t)$. A ne pas confondre avec ω_0 .

▷ **Amplitude en sortie S_0 et fonction de transfert**

L'amplitude S_0 du signal de sortie est donnée par l'amplitude complexe : $\underline{s}(t) = \underline{S}_0 e^{j\omega t}$.

$$\underline{s}(t) = \underline{H}(\omega)\underline{e}(t) \Rightarrow \underline{S}_0 e^{j\omega t} = \underline{H}(\omega)e_0 e^{j\omega t}$$

En prenant le module :

$$S_0 = |\underline{S}_0| = |\underline{H}(\omega)|e_0$$

Définition. Gain et gain en décibel

Le **gain** d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|.$$

Le **gain en décibel** d'un filtre est la grandeur sans dimension

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$$

avec log le logarithme décimal. Le gain en décibel s'exprime en **décibels** (dB).

▷ **Phase en sortie et fonction de transfert**

Le déphasage φ_0 du signal de sortie par rapport au signal d'entrée $e(t)$ est :

$$\varphi_0 = \arg[\underline{H}(\omega)]$$

Finalement, avec un signal d'entrée $e(t) = e_0 \cos \omega t$, le signal de sortie $s(t)$ est :

$$s(t) = G(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

avec $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(\omega)$

2 Diagramme de Bode

2.1 Définition et échelle logarithmique

Un filtre possède un comportement différent suivant la pulsation ω du signal en entrée. Pour représenter ses variations, on va tracer un graphe de $|\underline{H}(\omega)|$ et de $\arg \underline{H}(\omega)$.

Problème : ω la pulsation du signal d'entrée possède de grandes variations d'amplitude.

Application 1 : Intérêt de la représentation logarithmique

On veut représenter sur un axe une grandeur x qui varie de 1 à 10 000. Par souci de clarté, on veut que le point représentant $x = 1$ et celui représentant $x = 10$ soient distants de 1cm.

Calculer la taille de l'axe nécessaire suivant qu'on représente la grandeur sous forme linéaire x ou logarithmique $\log(x)$.

Définition. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode d'un filtre est le double tracé de

- ▷ le **gain en décibels** du filtre ;
- ▷ la **phase** de la fonction de transfert.

Ces deux tracés sont réalisés en fonction du **logarithme de la pulsation**.

2.2 Tracé du diagramme de Bode du passe bas d'ordre 1

On calcule le module $|\underline{H}(\omega)|$ et l'argument $\arg \underline{H}(\omega)$ de la fonction de transfert.

Gain en décibel :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

Donc

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(1) - 20 \log(\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2})$$

♡ *Instant math* ♡

$$\log x^\alpha = \alpha \log x$$

$$G_{dB}(\omega) = -10 \log(1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2)$$

Phase :

$$\arg \underline{H}(\omega) = \arg 1 - \arg(1 + j\omega/\omega_0) = -\arctan(\omega/\omega_0)$$

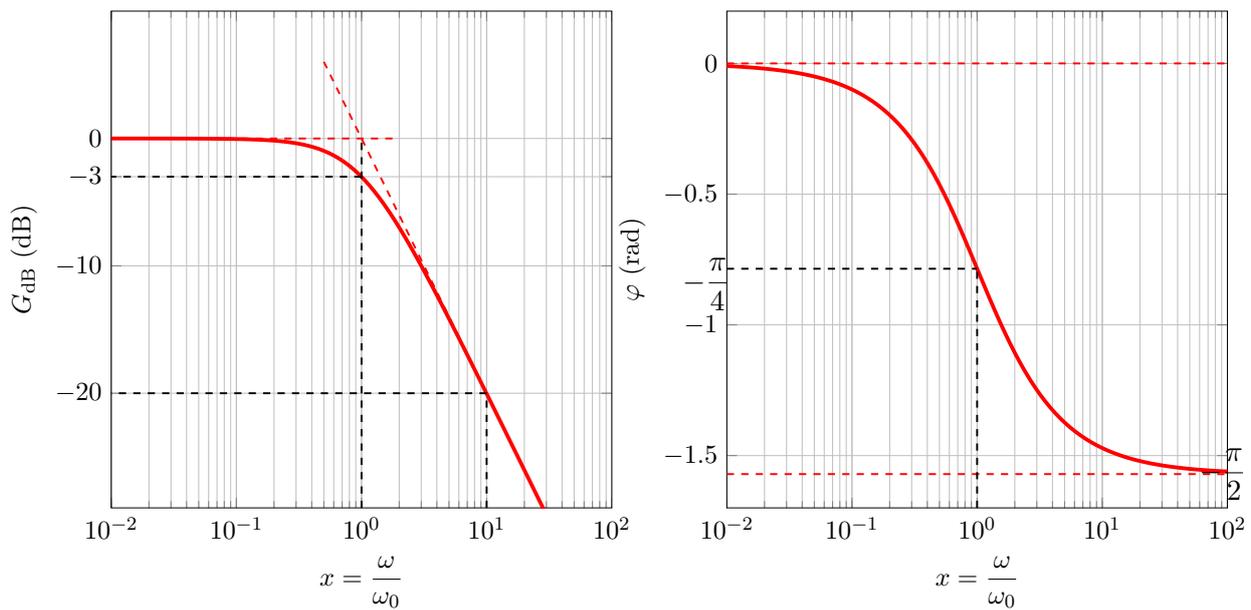


Fig. 2 – Diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 1.

Tracé "à la main"

Il faut retenir : a forme générale ; la limite en $\omega \rightarrow 0$; la valeur en $\omega = \omega_0$; la valeur en $\omega = 10\omega_0$:

2.3 Utilisation d'un diagramme de Bode

♡ *Instant math* ♡

$$G_{dB} = 20 \log G \Rightarrow G = 10^{\frac{G_{dB}(\omega)}{20}}$$

Exemple 1 : On alimente le filtre RC, $R = 1k\Omega$ $C = 10nF$, précédé à l'aide d'un signal sinusoïdal :

$$e(t) = 2 \cos(\omega t) \text{ avec } \omega = 10^6 \text{ Hz}$$

A l'aide du diagramme de Bode précédent, donner le signal de sortie $s(t)$.

Correction

Pour ce filtre $\omega_0 = 10^5 \text{ Hz}$, et on remarque que $\omega = 10\omega_0$.

Sur le diagramme pour $x = 10$, on lit $G_{dB} = -20$ et $\varphi \simeq -\pi/2$.

Le gain est donc : $G = 10^{\frac{-20}{20}} = 10^{-1}$.

$$s(t) = \frac{2}{10} \cos(\omega t - \pi/2)$$

Propriété. Perte de 20 décibels

Lorsque le gain en décibel diminue de 20 décibels, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 10.

| **Application 2** : Reprendre l'exercice précédent mais avec $\omega = 10^5 \text{ Hz}$.

2.4 Zones rectilignes du diagramme de gain :

Asymptote horizontale

Pour $\omega \ll \omega_0$, la courbe est une droite horizontale. En effet :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Le gain en décibel à peu près constant, $G_{dB} \simeq 0$, on obtient bien une droite horizontale.

🚫🚫🚫 **Attention !** Si le gain en décibel est nul, le gain est égal à 1 et l'amplitude du signal de sortie est la même que celle du signal d'entrée.

Asymptote décroissante

Pour $\omega \gg \omega_0$, le diagramme de Bode est une droite décroissante. On constate que la droite diminue de 20dB lorsque la fréquence augmente d'un facteur 10. On dit que la pente vaut **- 20 dB par décade**.

Pour $\omega \gg \omega_0$ on a :

$$\underline{H}(\omega) \approx 1/(j\omega/\omega_0)$$

soit

$$G_{dB} \approx -20 \log(\omega/\omega_0)$$

Comme on trace G_{dB} en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$, on obtient bien une droite descendante.

► (Pour aller plus loin) Effet intégrateur

On considère un signal périodique de pulsation $\omega \gg \omega_0$.

$$\text{Dans ce cas, on a } \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \approx \frac{\omega_0}{j\omega}$$

Ainsi, on a

$$\underline{s} = \omega_0 \frac{e}{j\omega}$$

On reconnaît la forme de l'intégration en RSF. En revenant en notation temporelle, on a

$$\frac{ds(t)}{dt} = \omega_0 e(t) \text{ soit } s(t) = \omega_0 \int e(t) dt$$

Propriété. Intégrateur

Un signal périodique de pulsation fondamentale ω filtré par un filtre passe-bas d'ordre 1 de pulsation de coupure ω_0 telle que $\omega_0 \ll \omega$ donne un signal de sortie $\underline{s}(t)$:

$$\underline{s}(t) = \omega_0 \frac{e(t)}{j\omega}$$

Le signal d'entrée est **intégré**.

2.5 Notion de bande passante

Définition. Bande passante

Une pulsation est dans la bande passante d'un filtre si :

$$|H(\omega)| > \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Au niveau du gain en décibel :

$$G(\omega) = 20 \log |H(\omega)| > 20 \log \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = 20 \log H_{\max} - 10 \log 2 .$$

Numériquement, on a $10 \log 2 \approx 3$, soit :

$$G(\omega) > G_{\max} - 3 \text{ dB}$$

Propriété. Bande passante

La **bande passante d'un filtre** est l'ensemble des pulsations tels que le gain soit compris entre le gain maximal G_{\max} et $G_{\max} - 3$ dB.

Pour le filtre *RC*, la bande passante est donnée pour $\omega < \omega_0$.

3 Théorie générale du filtrage linéaire

3.1 Réponse d'un filtre linéaire

Définition. Filtre linéaire passif

Un filtre est linéaire s'il est composé uniquement de composants linéaires et passifs (résistances, condensateurs et bobines).

On exclue tout composant actifs (générateur, ampli, ...) et non-linéaire (diode).

Propriété. Filtrage linéaire d'un signal

Si un signal d'entrée $e(t)$ d'un filtre linéaire s'écrit comme :

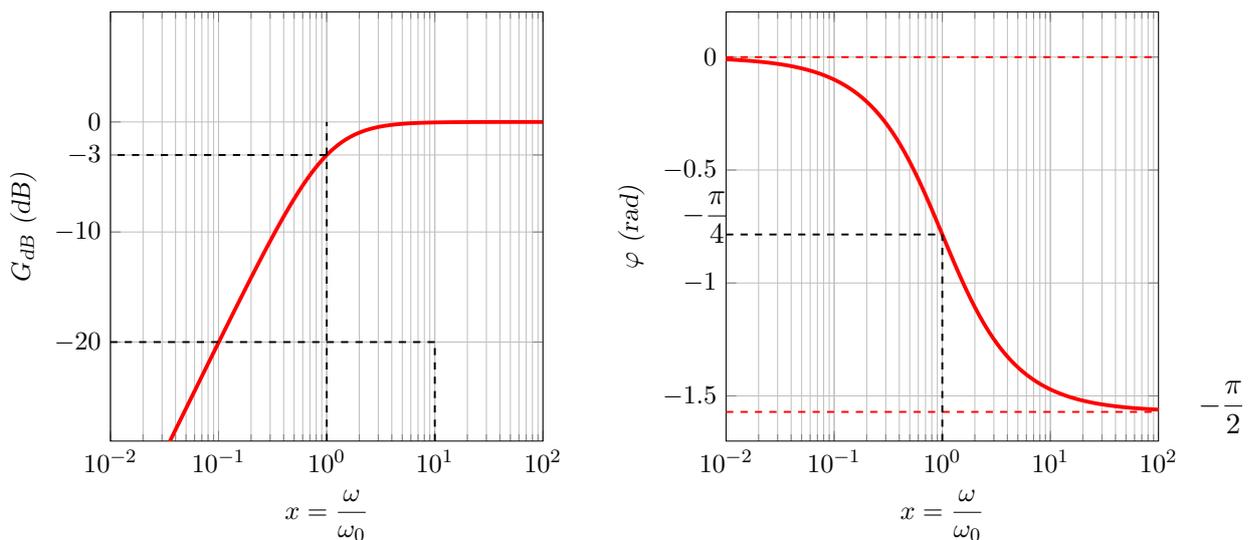
$$e(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

alors le signal de sortie $s(t)$ sera :

$$s(t) = A_1 G(\omega_1) \cos(\omega_1 t + \varphi(\omega_1)) + A_2 G(\omega_2) \cos(\omega_2 t + \varphi(\omega_2))$$

On peut généraliser cette propriété à une somme quelconque de signaux sinusoïdaux.

Exemple 2 : Un filtre linéaire possède le diagramme de Bode suivant, avec comme fréquence propre $\omega_0 = 100\text{Hz}$:



1. Donner le comportement du filtre : passe-bas, passe-haut, passe-bande, exclue-bande.
2. On envoie en entrée du filtre le signal $e(t)$ suivant :

$$e(t) = 2 \cos(30t) + \frac{2}{3} \cos(100t + \pi/3) + \cos(2000t)$$

Donner le signal de sortie $s(t)$

CORRECTION

1. Le gain en décibel (et donc le gain) est très faible à basses fréquences et élevé à hautes fréquences : c'est un passe-haut.
2. **Principe du filtrage linéaire** : on va filtrer séparément chaque signal sinusoïdal, en utilisant sa fréquence.

$$A_0 \cos(\omega t + \phi) \rightarrow A_0 G[\omega] \cos(\omega t + \phi + \varphi[\omega])$$

Ici :

$$e(t) = \underbrace{2 \cos(30t)}_{\text{pulsation } 30\text{rad/s}} + \underbrace{\frac{2}{3} \cos(100t + \pi/3)}_{\text{pulsation } 100\text{rad/s}} + \underbrace{\cos(2000t)}_{\text{pulsation } 2000\text{rad/s}}$$

On exprime chacune des pulsation en fonction de ω_0 et on trouve alors :

$$s(t) = 2G \left[\frac{1}{3} \right] \cos(30t + \varphi \left[\frac{1}{3} \right]) + \frac{2}{3} G[1] \cos(\omega_0 t + \pi/3 \varphi[1]) + G[20] \cos(2\omega_0 t + \varphi[20])$$

On mesure à chaque fois sur le graphe φ et **Attention !** G_{dB} (pas $G!!!$)

$$\text{lien } G - G_{dB} : G_{dB} = 20 \log G \Rightarrow G = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$$

3.2 Représentation de Fourier d'un signal périodique

Théorème. Théorème de Fourier

Tout signal périodique de fréquence f_0 se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences $f_n = n f_0$.

► **Décomposition d'un signal**

Ainsi, un signal $s(t)$ de fréquence f_0 s'écrit

$$s(t) = c_0 + c_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) + c_2 \cos(4\pi f_0 t + \varphi_2) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

- ▷ c_0 la valeur moyenne du signal
- ▷ la fréquence f_0 est le fondamentale, d'amplitude associée c_1
- ▷ les autres fréquences qui apparaissent ($2f_0, 3f_0, 4f_0, \dots$) sont appelés des harmoniques.
- ▷ les différentes valeurs des amplitudes des harmoniques c_n caractérisent le signal

Exemple 3 : Signal créneau de fréquence f_0 :

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi) + \frac{1}{3} \cos(6\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5} \cos(10\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}) + \dots = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n} \cos(2\pi n f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

En calculant plus en plus de terme, le signal $s(t)$ tend vers un signal créneau.

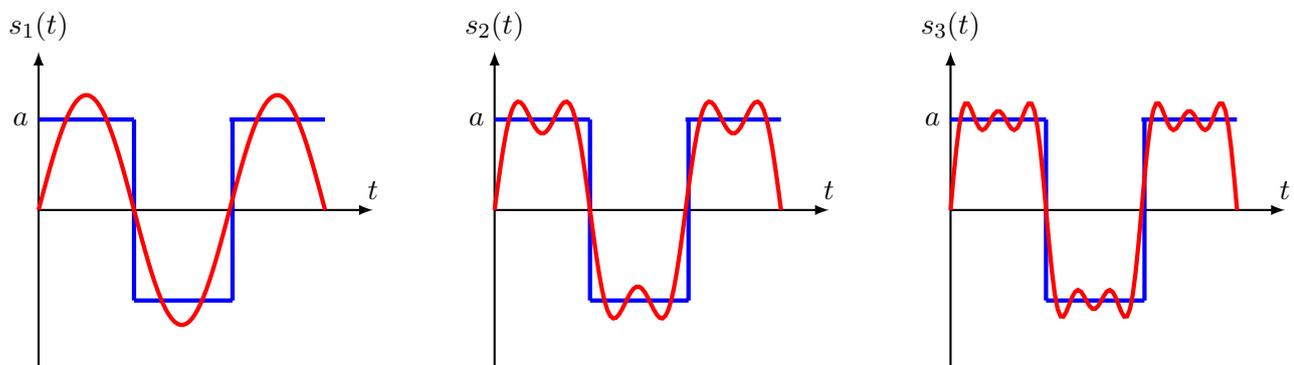


Fig. 3 – Décomposition de Fourier d'un créneau avec les premières harmoniques

► **Spectre d'un signal**

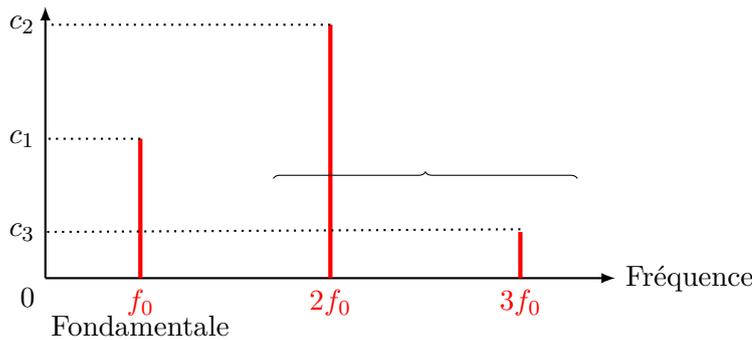
Pour représenter un signal périodique, plutôt que d'écrire toute la décomposition de Fourier, on peut représenter son spectre.

Définition. Spectre d'un signal Le spectre d'un signal est sa représentation graphique de sa décomposition de Fourier. On représente sur un graphe :

- ▷ en abscisse les différentes valeurs des harmoniques f_n
- ▷ en ordonnées les amplitudes c_n associés

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

Amplitude des harmoniques



Exemple 4 : On considère le signal créneau $e(t)$ de période $T = 2s$:

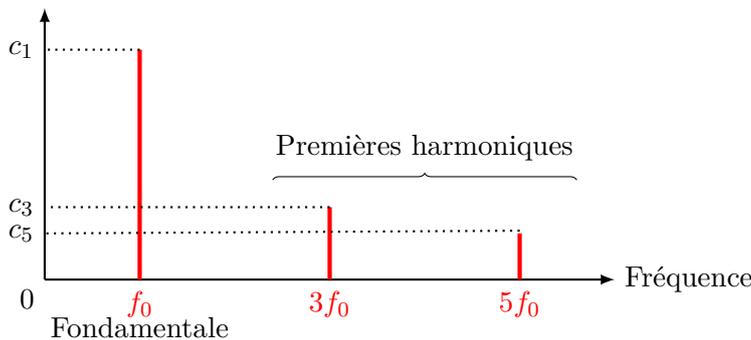
$$e(t) = e_0 + \sum_{n \text{ impair}} \frac{e_0}{n} \cos(2\pi n f_0 t - \frac{\pi}{2})$$

avec $e_0 = 2V$.

1. Donner f_0 et représenter $e(t)$
2. Donner le spectre de $e(t)$
3. Ce signal créneau sert d'entrée à un filtre passe bas de pulsation propre $\omega_0 = 10^{-2} \text{rad.Hz}$.
Donner le signal de sortie.

- ▷ toutes les harmoniques pairs ont une amplitude nulle
- ▷ l'amplitude des harmoniques impairs est égale à $\frac{1}{n}$

Amplitude des harmoniques



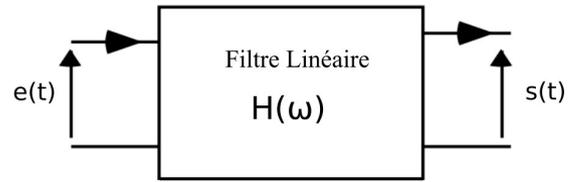
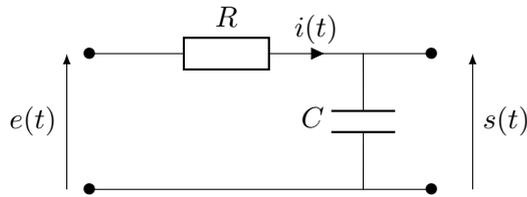
3.3 Filtrage linéaire d'un signal périodique quelconque

► **0) Filtre et quadripôle**

Un **filtre linéaire** est un quadripôle qui permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence d'un signal d'entrée $e(t)$.

Un filtre est caractérisée par sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$.

Exemple de filtre passe-bas d'ordre 1.



► 1) Étude fréquentielle

Objectif :

obtenir le gain $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$ et le déphasage $\varphi(\omega) = \arg[\underline{H}(\omega)]$ (diagramme de Bode).

Mise en place :

- ▷ toujours faire rapidement une étude asymptotique ($\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$) pour connaître la nature du filtre.
- ▷ on se place en RSF, à l'aide d'association d'impédances et de ponts diviseurs on trouve $\underline{H}(\omega)$ via sa définition

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$

avec $e(t)$ un signal sinusoïdal de pulsation ω quelconque.

► 2) Réponse à un signal d'entrée quelconque

Objectif : trouver $s(t)$ sachant $e(t)$, un signal périodique quelconque

Mise en place :

1. on décompose $e(t)$ suivant ses harmoniques $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ (étudier son spectre)
2. à l'aide du diagramme de Bode, on applique la réponse du filtre à chaque composante du spectre de Fourier du signal $e(t)$.

$$e(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + A_3 \dots$$

↓

$$s(t) = A_1 G(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) + A_2 G(2\omega) \cos(2\omega t + \varphi(2\omega)) + A_3 G(3\omega) \dots$$

► Nature des filtres

► Le filtrage dans la vie de tous les jours

Les utilités du filtrage sont multiples, on peut par exemple citer :

- ▷ la sélection de fréquence (radio) ;
- ▷ l'annulation de la composante continue (augmentation du contraste) ;
- ▷ augmenter ou baisser certaines composantes fréquentielles (« augmenter les basses » en audio)...

Le filtrage est une des bases de l'électronique de commande moderne.

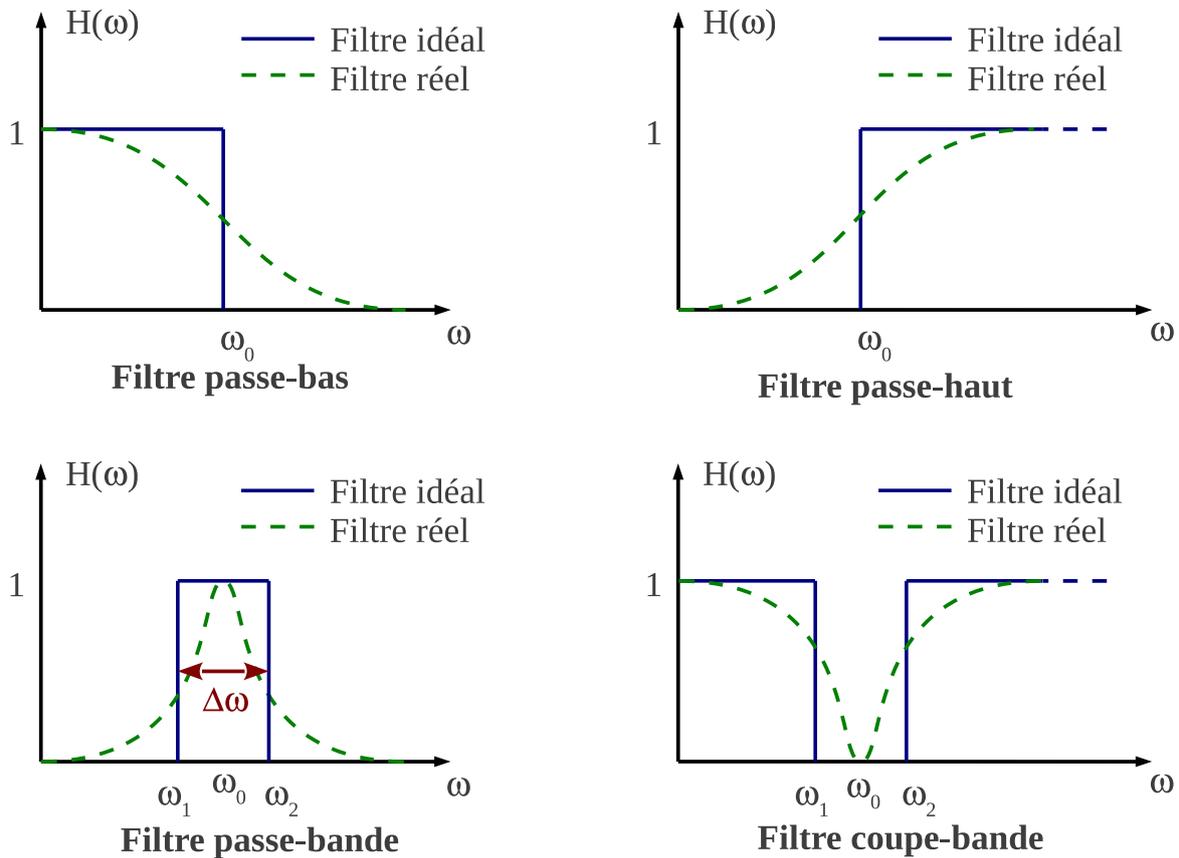


Fig. 4 – Différents types de filtres : Passe-bas et passe-haut ; passe-bande et coupe bande. Dans le cas idéal, la bande passante correspond à l'intervalle de pulsation sur lequel le module $H(\omega)$ est non nul.

4 Applications : étude de filtre

4.1 Le filtre passe-haut du premier ordre

Un **filtre passe-haut** coupe les basses fréquences et n'agit pas sur les hautes fréquences.

Application 3 :

Les façon de réaliser un filtre passe-haut sont nombreuses. Nous allons chercher le moyen d'en construire un à l'aide d'une résistance R et d'une bobine L .

1. Représenter le circuit électrique des deux quadripôle qu'il est possible de réaliser avec une résistance et une bobine.

On représentera les tension d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$.

2. En étudiant le comportement asymptotique à haute et basse fréquence des deux filtres, déterminer celui qui joue le rôle d'un filtre passe haut.
3. Montrer que la fonction de transfert du filtre passe-haut obtenu précédemment peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = K \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On introduira la pulsation caractéristique du filtre ω_0 .

4. Montrer que pour des pulsation $\omega \ll \omega_0$, le filtre a un effet dérivateur.

On considère le signal d'entrée $e(t) = 2e_0 \cos(\omega_1 t) + 3e_0 \cos(\omega_2 t) + e_0 \cos(\omega_3 t)$ avec $e_0 = 1V$, $\omega_1 = \omega_0/10$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 10\omega_0$.

5. Représenter le spectre du signal $e(t)$.

6. Donner le signal de sortie $s(t)$ et représenter son spectre.

Les façon de réaliser un filtre passe-haut sont nombreuses. Nous allons chercher le moyen d'en construire un à l'aide d'une résistance R et d'une bobine L .

On peut réaliser deux quadripôles différents :

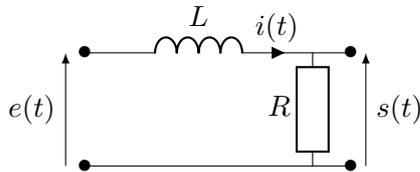


Fig. 5 – Quadripôle 1

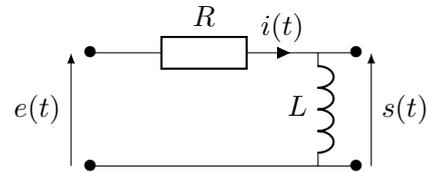


Fig. 6 – Quadripôle 2

2) Analyse fréquentielle :

- ▷ aux « basses fréquences », une bobine est un fil
- ▷ aux « hautes fréquences », une bobine est un interrupteur ouvert

Par conséquent :

▷ quadripôle 1 :

- ▷ basse fréquence : $s(t) = e(t)$
- ▷ haute fréquence : $s(t) = 0$

▷ quadripôle 2 :

- ▷ basse fréquence : $s(t) = 0$
- ▷ haute fréquence : $s(t) = e(t)$

On garde donc le filtre 2.

3) Obtention de la fonction de transfert

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} \underline{e}$$

Donc :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

On a ici $\omega_0 = \frac{R}{L}$. Ici, $K = 1$.

4) Effet dérivateur

pour $\omega \ll \omega_0$, on a :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \approx j\frac{\omega}{\omega_0}$$

Ainsi, on a $\underline{s} = j\frac{\omega}{\omega_0}\underline{e}$.

En revenant en notation temporelle, on a $\omega_0 s(t) = \frac{de(t)}{dt}$.

► **Propriété d'un filtre passe haut du premier ordre**

Propriété. La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = K \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec ω_0 la **pulsation de coupure du filtre** et K une constante.

Propriété. Dérivateur

Un signal périodique de pulsation fondamentale ω filtré par un filtre passe-haut d'ordre 1 de pulsation de coupure ω_0 telle que $\omega_0 \gg \omega$ donne un signal de sortie $\underline{s}(t)$:

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{\omega_0} j \omega \underline{e}(t)$$

Le signal d'entrée est **dérivé**.

► **Diagramme de Bode**

Le diagramme de Bode correspondant est tracé figure 7.

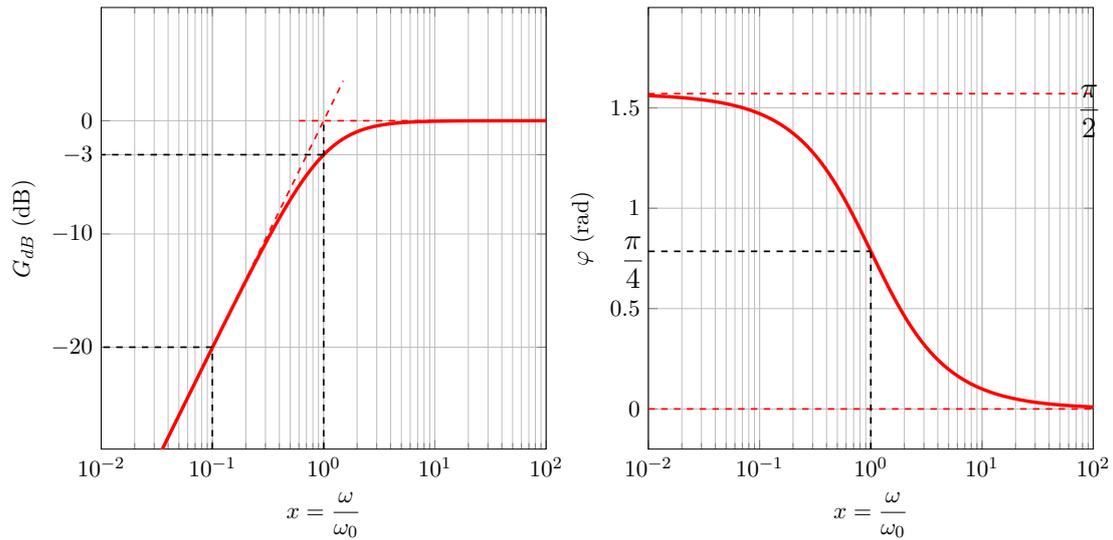


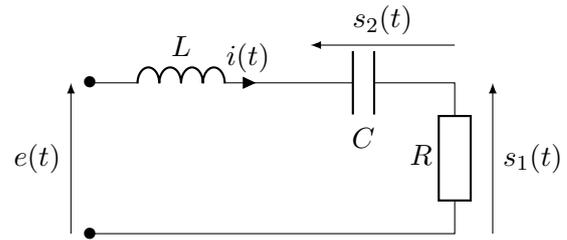
Fig. 7 – Diagramme de Bode du filtre passe-haut d'ordre 1

Exemple 5 : À l'aide de la fonction de transfert, justifier la valeur de la bande passante, le plateau aux hautes fréquences et la valeur de la pente aux basses fréquences.

4.2 Deux filtres du second ordre

Cette partie est à travailler de façon autonome (comme un exercice). L'étude des diagrammes de Bode est complètement similaire à celle des amplitudes en tension et intensité du chapitre précédent.

Étudions maintenant le circuit *RLC* de la figure ci-contre. Selon la tension de sortie s_1 ou s_2 que nous étudierons, soit aux bornes du condensateur soit aux bornes de la résistance, le filtre sera soit passe-bas, soit passe-bande.



► Le filtre passe-bas du second ordre

On choisit de prendre comme tension de sortie la tension aux bornes du condensateur.

Etude du filtre

Application 4 :

1. Par une étude asymptotique, vérifier que ce choix conduit bien à un filtre passe-bas.
2. Montrer que la fonction de transfert du filtre peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

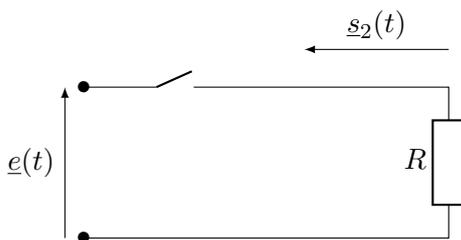
On précisera la valeur de ω_0 et K .

3. Donner l'ordre du filtre.

CORRECTION

1. On remplace à Hautes Fréquences et Basses Fréquences les condensateurs et bobines

HF

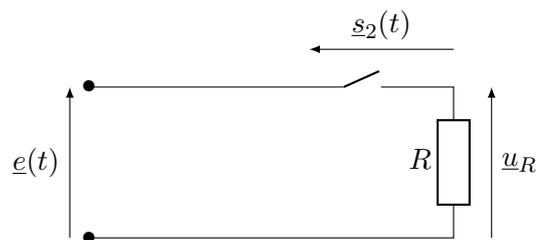


Tension aux bornes d'un fil

$$s_2 = 0$$

On a bien un filtre passe-bas.

BF



Tension aux bornes d'un interrupteur ouvert \Rightarrow loi des mailles

$$e = s_2 + u_R = s_2$$

car pas de courant dans la résistance

2. Pont diviseur de tension, en associant R et L :

$$s_2 = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} e = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} e$$

On identifie : $\frac{1}{LC} = \frac{1}{\omega_0^2}$ et $RC = \frac{1}{Q\omega_0}$.

On a alors bien $\underline{H}(\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

3. On a un filtre d'ordre 2, car un polynôme d'ordre 2 au dénominateur.

Le diagramme de Bode

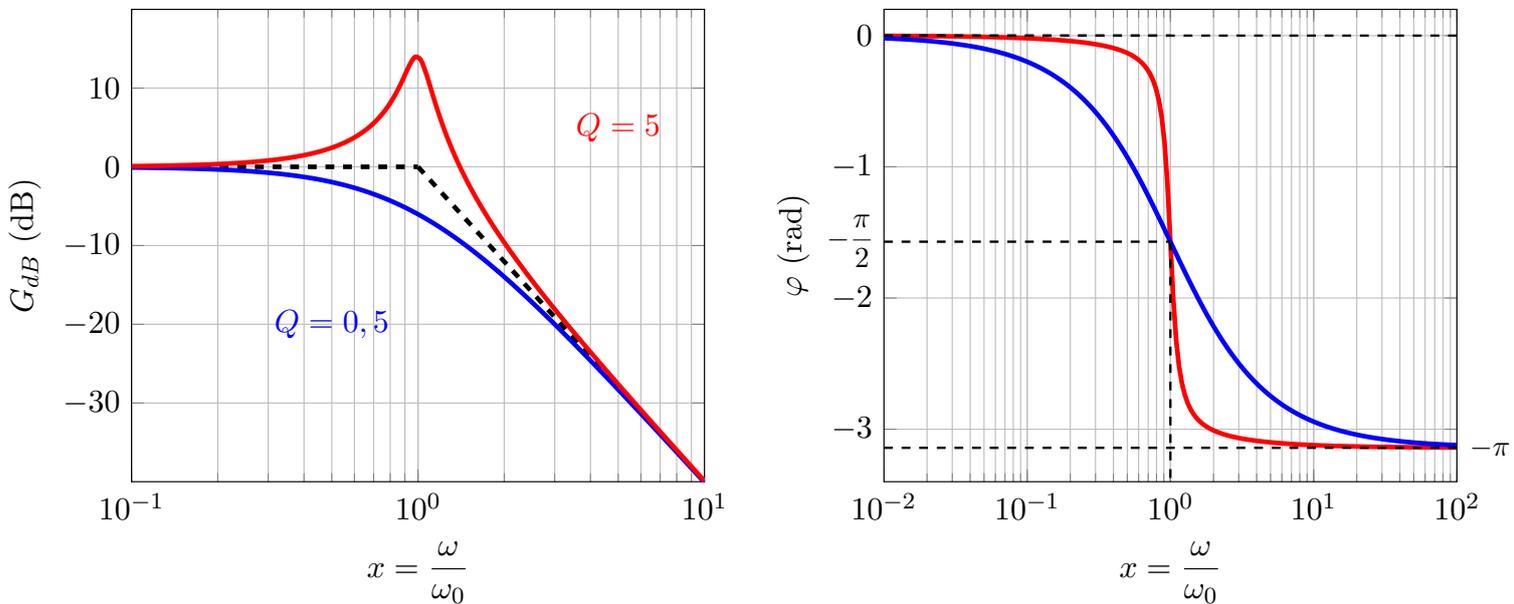


Fig. 8 – Diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 2.

Application 5 : A l'aide du diagramme de Bode, donner le signal en sortie $s(t)$ lorsque le signal en entrée $e(t)$ est de la forme :

$$e(t) = e_0 \cos\left(\frac{\omega_0}{3}t\right) + 2e_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{e_0}{3} \cos(2\omega_0 t + \pi/2)$$

pour les cas $Q = 0.5$ et $Q = 5$.

CORRECTION

Principe du filtrage linéaire : on va filtrer séparément chaque signal sinusoïdal, en utilisant sa fréquence.

$$A_0 \cos(\omega t + \phi) \rightarrow A_0 G[\omega] \cos(\omega t + \phi + \varphi[\omega])$$

Ici :

$$e(t) = \underbrace{e_0 \cos\left(\frac{\omega_0}{3}t\right)}_{\text{pulsation } \omega_0/3} + \underbrace{2e_0 \cos(\omega_0 t)}_{\text{pulsation } \omega_0} + \underbrace{\frac{e_0}{3} \cos(2\omega_0 t + \pi/2)}_{\text{pulsation } 2\omega_0}$$

On a alors :

$$s(t) = e_0 G\left[\frac{1}{3}\right] \cos\left(\frac{\omega_0}{3}t + \varphi\left[\frac{1}{3}\right]\right) + 2e_0 G[1] \cos(\omega_0 t + \varphi[1]) + \frac{e_0}{3} G[2] \cos(2\omega_0 t + \pi/2 + \varphi[2])$$

On mesure à chaque fois sur le graphe φ et **Attention !** G_{dB} (pas G !!!)

$$\text{lien } G - G_{dB} : G_{dB} = 20 \log G \Rightarrow G = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$$

Analyse du diagramme de Bode en gain

Astuce : l'analyse du diagramme en gain est similaire à l'étude des résonances en tension du chapitre précédent :

- ▷ existence d'un maximum pour $Q > 1/\sqrt{2}$
- ▷ amplitude de résonance plus importante à grand Q
- ▷ pulsation de résonance $\omega_r \simeq \omega_0$

Propriété. Bande passante

La bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est d'autant plus fine que Q est grand, plus elle est fine :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est fine, donc plus le filtre est sélectif : plus Q est grand, plus le filtre est de bonne qualité, d'où la dénomination de Q .

Analyse des asymptotes

On constate que l'asymptote du gain aux hautes fréquences est de **- 40 décibels par décade**. C'est une marque des filtres passe-bas (ou passe-haut) du second ordre. Cela se justifie car, en hautes fréquences,

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \approx -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

donc :

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow |\underline{H}(\omega)| \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

soit bien

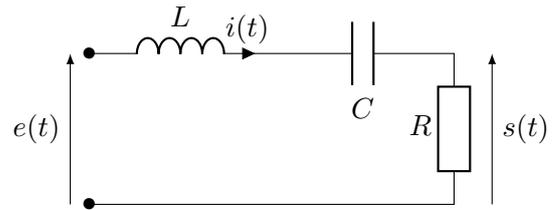
$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| \approx 20 \log \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

Cette pente plus forte permet de couper de façon plus efficace les hautes fréquences, le filtre d'ordre 2 est donc plus sélectif qu'un filtre d'ordre 1.

► **Le filtre passe-bande du second ordre**

Un **filtre passe-bande** coupe les basses fréquences et les hautes fréquences mais n'agit pas sur une bande de fréquences intermédiaires. Il s'agit de la **bande passante** du filtre.

Sur le montage, on choisit de prendre comme tension de sortie la tension aux bornes de la résistance.



Etude fréquentielle

Application 6 :

1. Par une étude asymptotique, vérifier que ce choix conduit bien à un filtre passe-bande.
2. Montrer que la fonction de transfert du filtre peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{K}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

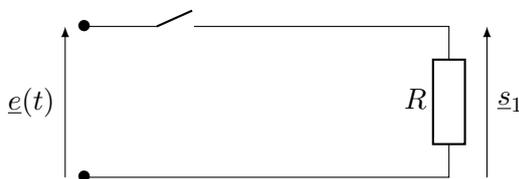
On précisera la valeur de ω_0 et K .

3. Donner l'ordre du filtre.

CORRECTION

1. On remplace à Hautes Fréquences et Basses Fréquences les condensateurs et bobines

HF



Tension aux bornes d'une résistance sans courant

$$s_1 = 0$$

BF



Tension aux bornes d'une résistance sans courant

$$s_1 = 0$$

On a bien un filtre passe-bande (ou un passe rien mais non étudié ici).

2. Pont diviseur de tension, en associant C et L :

$$s_2 = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} e$$

On simplifie par R (ancree) et on trouve :

$$s_2 = \frac{1}{-j\frac{1}{RC\omega} + 1 + j\frac{L}{R}\omega} e$$

On identifie : $\frac{1}{RC} = Q\omega_0$ et $\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$.

3. ⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Dans la forme canonique, on n'a pas un polynôme! Il faut multiplier par ω le numérateur et dénominateur et on trouve un polynôme d'ordre 2 au dénominateur. L'ordre du filtre est donc 2.

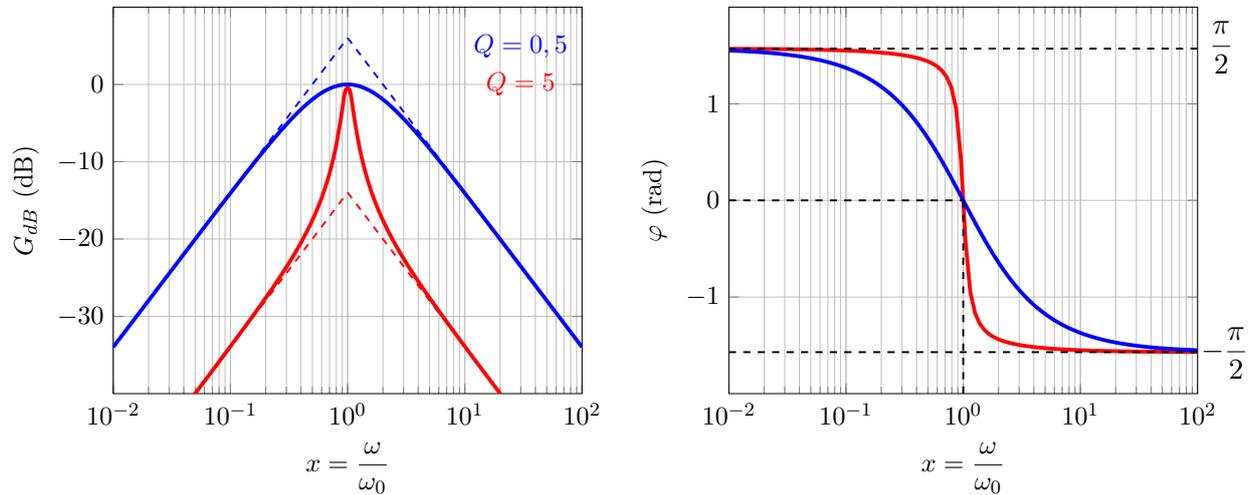


Fig. 9 – Diagramme de Bode du filtre passe-bande d'ordre 2

Le diagramme de Bode

Astuce : l'analyse du diagramme en gain est similaire à l'étude des résonances en tension du chapitre précédent :

- ▷ toujours existence d'un maximum
- ▷ amplitude de résonance indépendante de Q
- ▷ pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0$

Propriété. Bande passante

La bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est d'autant plus fine que Q est grand, plus elle est fine :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est fine, donc plus le filtre est sélectif : plus Q est grand, plus le filtre est de bonne qualité, d'où la dénomination de Q .

Application 7 :

1. À l'aide de la figure, déterminer la bande passante et vérifier les valeurs du facteur de qualité annoncées.
2. Exprimer les pentes des deux asymptotes, aux hautes et basses fréquences.
3. Existe-t-il des effets dérivateurs ou intégrateurs avec ce filtre ?

CORRECTION

1. Bande passante :

- ▷ avec le gain : $G[\omega] > G_{max}/2$
- ▷ avec le gain en décibel : $G_{dB}[\omega] > G_{dB,max} - 3$

On mesure les deux bornes ω_1 et ω_2 telle que $G_{dB}[\omega_1] = G_{dB,max} - 3dB = 0 - 3$.

La largeur de la bande passante $\Delta\omega$ est :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} =$$

2. **Trouver les pentes** : on simplifie la fonction de transfert H à HF et BF puis on calcule G et G_{dB} !

▷ Hautes Fréquences : $H \simeq \frac{K}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \simeq \frac{K}{jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{-jK\omega_0}{Q\omega}$

Donc : $G = \frac{K\omega_0}{Q\omega}$ et $G_{dB} = 20 \log \left[\frac{K\omega_0}{Q\omega} \right]$.

On sépare les constantes et les ω/ω_0 via $\log a \times b = \log a + \log b$

$$G_{dB} = 20 \log \frac{K}{Q} + 20 \log \frac{\omega_0}{\omega}$$

On écrit le gain en décibel sous la forme

$$G_{dB} = 20 \log \text{ constante} \pm \alpha \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

La pente est alors de $\pm \alpha \text{dB/dec}$. Ici :

$$G_{dB} = 20 \log \frac{K}{Q} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

On trouve alors une pente de -20dB/dec .

▷ Basses Fréquences : $\underline{H} \simeq \frac{K}{1 + jQ \left(-\frac{\omega_0}{\omega} \right)} \simeq \frac{K}{-jQ \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{jK\omega}{Q\omega_0}$

Donc $G_{dB} = 20 \log \frac{K}{Q} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$. On trouve une pente de $+20 \text{dB/dec}$.

3. **Effet dérivateur/intégrateur** : on récupère les expressions de \underline{H} en HF et BF et on identifie les effets dérivateurs ($\sim j\omega$) et les effets intégrateurs ($\sim 1/j\omega$).

▷ Hautes fréquences : $\underline{H} = \frac{-jK\omega_0}{Q\omega}$. On reconnaît un effet dérivateur.

▷ Basses Fréquences : $\underline{H} = \frac{jK\omega}{Q\omega_0}$. On reconnaît un effet intégrateur.

LES QUATRES FILTRES A CONNAITRE



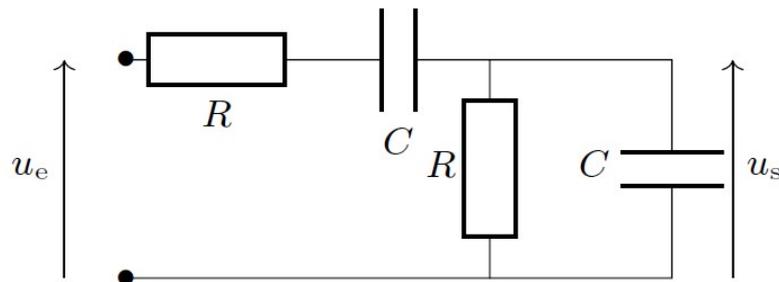
Filtre de Wien

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Issu du concours des petites mines (Nantes, Albi, Douais, ...)

On étudie le circuit ci-contre en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension d'entrée :

$$u_e(t) = E_m \cos \omega t$$



1. Déterminer qualitativement le comportement du filtre à haute et basse fréquence. On illustrera chaque cas avec un circuit électrique équivalent.
2. On pose $\omega_0 = 1/(RC)$ et $x = \omega/\omega_0$. Exprimer la fonction de transfert sous la forme :

$$H(x) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

Préciser le facteur de qualité Q du filtre et la valeur de H_0

3. Calculer le gain maximal de ce filtre. Pour quelle pulsation est-il obtenu. Donner la valeur du déphasage et du gain en décibel à cette pulsation.
4. Donner les deux pulsation de coupure $\omega_{c,1}$ et $\omega_{c,2}$ définie par

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

En déduire la largeur de la bande passante.

5. Représenter schématiquement le diagramme de Bode de ce filtre (gain et phase) en précisant les asymptotes.
6. Calculer ω_0 pour $R = 1\text{k}\Omega$ et $C = 0.5\mu\text{F}$.
On donne l'expression du signal en entrée :

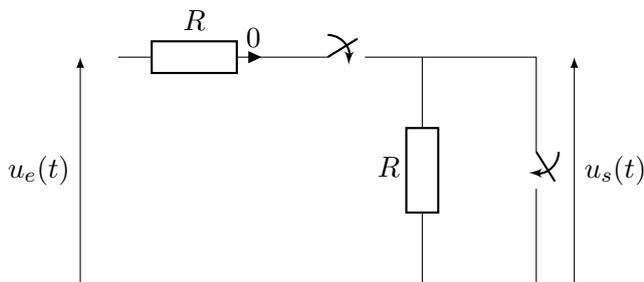
$$u_e(t) = e_0 \cos \omega t + \frac{e_0}{2} \cos 10\omega t + 2e_0 \cos 100\omega t$$

avec $\omega = \omega_0 = 2,0 \cdot 10^3 \text{rad.s}^{-1}$.

7. Représenter le spectre du signal u_e .
8. Donner l'expression du signal en sortie u_s .
9. Représenter son spectre.

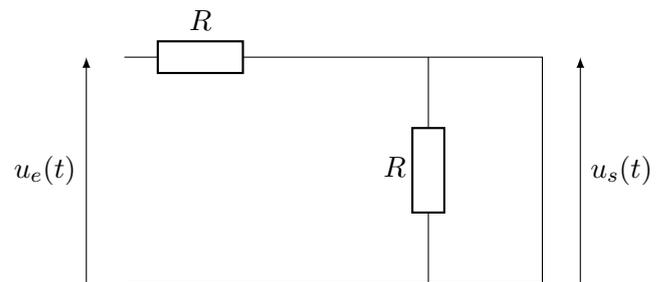
1. A basse fréquence, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. A haute fréquence, un condensateur se comporte comme un fil. On a donc :

Basses fréquences



Le circuit n'est pas alimenté \Rightarrow toutes les grandeurs électriques sont nulles : $u_s = 0$.

Hautes fréquences



La tension de sortie est la tension aux bornes d'un fil : $u_s = 0$.

C'est un filtre passe bande.

2. On passe en notation complexe en RSF. On écrit le dipôle équivalent à une résistance et un condensateur en parallèle :

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + jC\omega \Rightarrow Z_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

La tension de sortie est la tension aux bornes de Z_{eq} . Par un pont diviseur de tension on a :

$$u_s = \frac{Z_{\text{eq}}}{Z_{\text{eq}} + R + 1/(jC\omega)} u_e$$

Donc la fonction de transfert est :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{\frac{R}{1 + jRC\omega} + R + 1/(jC\omega)} \Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{R}{R + (R + 1/(jC\omega))(1 + jRC\omega)}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R + R + jR^2C\omega + 1/(jC\omega) + R} \Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{1}{3 + jRC\omega - j/(RC\omega)}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On a bien la forme demandé avec $\omega_0 = 1/RC$, $H_0 = 1/3$ et $Q = 1/3$.

3. Le gain G du filtre est donné par :

$$G(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Le maximum est atteint lorsque le dénominateur est minimal. On cherche la valeur de x pour que $x - \frac{1}{x}$ soit minimal. C'est atteint pour $x = 1$.

Donc $G_{\max} = H_0 = 1/3$, $G_{dB,\max} = 20 \log H_0 = 20 \log \frac{1}{3} \simeq -9.5\text{dB}$.

Pour $x = 1$, la fonction de transfert est un nombre réel donc son argument est nul. La phase vaut 0.

4.

Méthode en DS.

Trouver les pulsation de coupure ou prouver une résonance revient à étudier le **dénominateur** du gain G : les numérateur sont égaux, on cherche à égaliser les dénominateur.

🚫🚫🚫 **Attention !** On ne laisse **JAMAIS** la racine!!!

On cherche x_c pour que $G(x_c) = G_{\max}/\sqrt{2}$. Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le dénominateur doivent être égaux :

$$1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

Soit (🚫🚫🚫 **Attention !** au \pm !!)

$$Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \Rightarrow x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

On prend le cas +, et on ne garde que la solution positive :

$$x_c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

On prend le cas -, et on ne garde que la solution positive :

$$x_c = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

Finalement les pulsations de coupure sont :

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{2} \left(\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

La largeur de la bande passante est la différence entre les deux fréquences de coupure, soit $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$

5.

Méthode en DS. Quand on demande de tracer un diagramme de Bode à la main, on cherche à vérifier :

- ▷ les asymptotes à hautes et basses fréquences : pente $\pm 20/40\text{dB}$ par décade
- ▷ la valeur du G_{dB} en $\omega = \omega_0$
- ▷ de connaître la forme globale des diagramme passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande
- ▷ Pour $x \ll 1$:

$$\underline{H} \simeq \frac{H_0}{-jQ} = jx$$

car $H_0 = Q$.

Donc $G_{dB} = 20 \log(x)$ (pente de $+20\text{dB/décade}$) et $\varphi = \pi/2$ (\underline{H} imaginaire pur, partie imaginaire positive).

▷ Pour $x \gg 1$:

$$\underline{H} \simeq \frac{H_0}{jQx} = -j/x$$

car $H_0 = Q$.

Donc $G_{dB} = -20 \log(x)$ (pente de -20dB/décade) et $\varphi = -\pi/2$ (\underline{H} imaginaire pur, partie imaginaire négative).

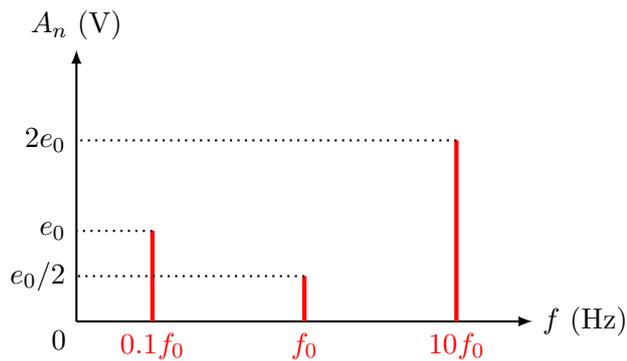
On place sur le diagramme les asymptotes et $G_{dB}[\omega_0]$ puis on trace à main levée le gain en décibel.

6. On trouve $\omega_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{Hz}$.

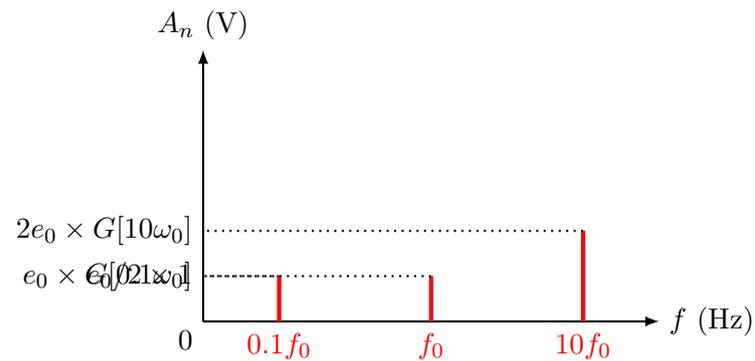
7.

8. Le signal d'entrée est composé de 3 fréquences : $0.1\omega_0$, ω_0 et $10\omega_0$.

Entrée



Sortie



9. On filtre indépendamment les trois harmoniques suivant leurs fréquences respectives :

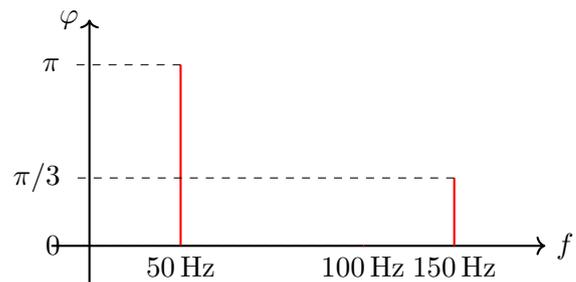
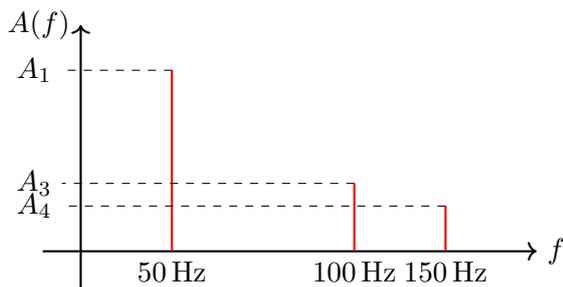
$$u_s(t) = e_0 G[\omega_0] \cos(\omega t + \varphi[\omega_0]) + \frac{e_0}{2} G[10\omega_0] \cos(10\omega t + \varphi[10\omega_0]) + 2e_0 G[10\omega_0] \cos(100\omega t + \varphi[10\omega_0])$$

Le filtre étant un passe-bande centrée sur ω_0 : $G[\omega_0] = 1$ et $G[0.1\omega_0], G[10\omega_0] < 1$.

Exercices qualitatifs

Exercice 1 - Spectre d'un signal et concevoir un filtre :

On souhaite filtrer un signal $e(t)$ dont le spectre de Fourier est connu et représenté sur la figure suivante.



1. Donner l'expression du signal $e(t)$.

On voudrait pouvoir conserver en sortie de filtre un signal aussi sinusoïdal que possible, de fréquence comprise entre 75 Hz et 200 Hz.

2. Combien de fréquences notre signal doit-il contenir ?
3. Vaut-il mieux chercher à obtenir un signal de fréquence 100 ou 150 Hz ?
4. Quel type de filtre choisiriez vous ?
5. Donner la valeur de la pulsation propre ? Quelle doit être la largeur de la bande passante ? EN déduire le facteur de qualité Q .

Exercice 2 - Effet d'un filtre passe haut :

On considère un filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est de 100 Hz. Donner l'allure du signal en sortie si on envoie en entrée :

1. Une sinusoïde d'amplitude 4 V et de fréquence 2 kHz.
2. Une sinusoïde d'amplitude 4 V et de fréquence 2 kHz plus une tension continue de 1 V.
3. Un créneau de valeur moyenne 1 V et d'amplitude 4 V et de fréquence 2 kHz.
4. Un signal triangle de valeur moyenne nulle et d'amplitude 4 V et de fréquence 2 Hz.

Exercice 3 - Concevoir un filtre :

On souhaite nettoyer l'enregistrement d'une conversation, rendu difficilement audible par des bruits divers. On considère que le spectre de l'audition humaine s'étend de 20 Hz à 20 kHz, tandis que celui de la voix couvre un intervalle allant de 100 Hz à 2 kHz.

1. Sur un axe logarithmique, représenter le spectre de l'audible et celui de la voix humains
2. Quel type de filtre choisir ? Quelle sera sa bande-passante ?
3. Que doit valoir la fréquence propre f_0 du filtre pour qu'elle soit "au milieu" la bande passante sur le diagramme de Bode.

🚫🚫🚫 **Attention !** échelle log!!!!

4. Faut-il choisir un facteur de qualité faible ou élevé? Déterminer la valeur à donner à Q pour ajuster la bande passante à -3 dB de ce filtre au spectre de la voix humaine.

Exercice classique de filtrage

🔴🔴🔴 **Attention !** Avant tout chose il faut savoir reprendre les exemples de filtre vu en cours et être capable de trouver :

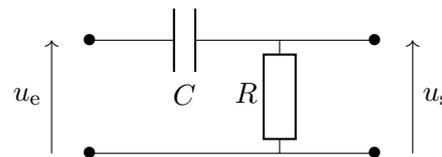
- ▷ la fonction de transfert \underline{H}
- ▷ la pulsation de coupure ω_0
- ▷ l'expression du gain et du gain en décibel
- ▷ la forme général du graphe
- ▷ l'expression des asymptotes à hautes et basses fréquences, notamment les pentes (± 20 dB/décade ou ± 40 dB/décade)

Exercice 4 - Impédance d'entrée d'un oscilloscope :

Entrée

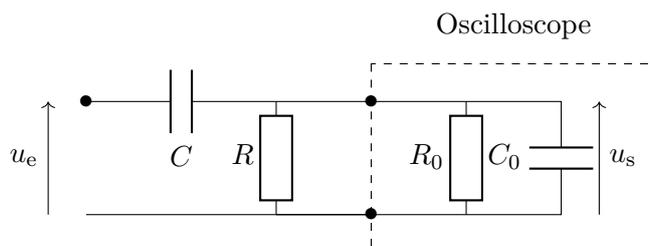
On considère le filtre ci-contre.

1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{u_s}/\underline{u_e}$ où l'on posera $\omega_0 = 1/(RC)$.
2. Déterminer la fréquence de coupure pour $R = 500$ k Ω et $C = 0.1$ nF.
3. Représenter le diagramme de Bode en gain. On précisera les valeurs du gain en $\omega = \omega_0$ ainsi que les expressions des deux asymptotes.
4. Donner le déphasage entre u_e et u_s aux très hautes et très basses fréquences.



Plat

On observe la tension de sortie à l'aide d'un oscilloscope ayant une impédance d'entrée due à un groupement parallèle ($R_0 = 1$ M Ω , $C_0 = 30$ pF).



1. En utilisant des impédances équivalentes, donner la nouvelle fonction de transfert du filtre sous la forme :

$$\underline{H}'(\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{C}{C + C_0} \times \frac{j\omega/\omega'_0}{1 + j\omega/\omega'_0}$$

Déterminer la nouvelle fréquence de coupure ω'_0 .

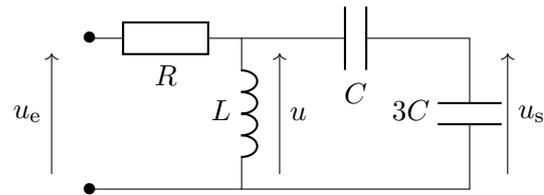
2. A quelle condition sur R et C l'influence de l'oscilloscope est négligeable?

Pas de dessert

$$\omega'_0 = \frac{R_0(C + C_0)}{1 + R_0/R}$$

Exercice 5 - Filtre de Colpitts :

On considère le quadripôle suivant. Il est utilisé en RSF en sortie ouverte : rien n'est branché entre les bornes de sortie.



1. Etudier qualitativement le comportement du filtre à basses et hautes fr"quences. Quel type de filtre s'agit-il ?
2. Donner le lien entre la tension u_s et le tension u aux bornes de la bobine.
3. En déduire la fonction de transfert \underline{H} et la mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

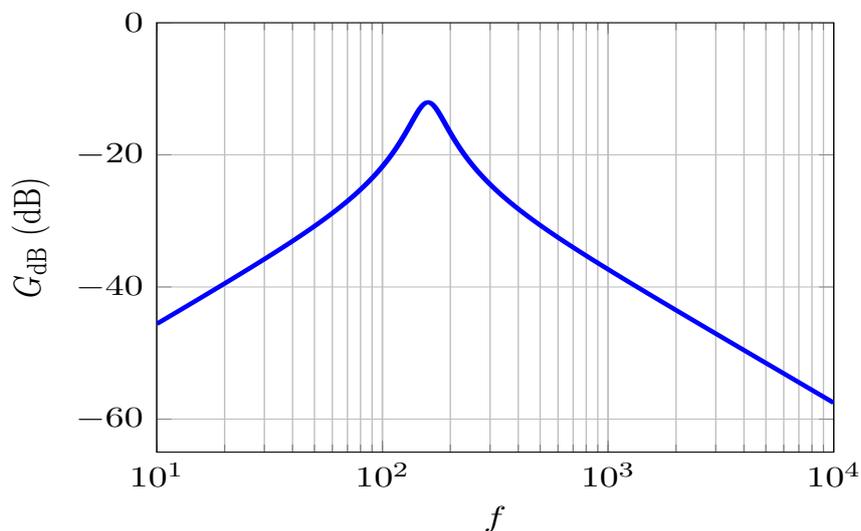
en introduisant les constantes A , Q et ω_0 dont on déterminera les expressions en fonction de R , L et C .

4. Exprimer la tension u en fonction de la tension u_e .

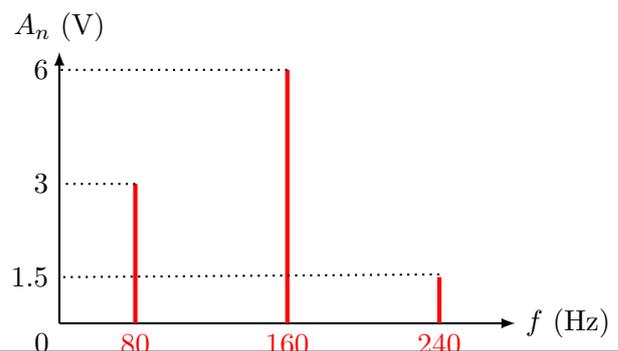
En déduire que la fonction de transfert peut se mettre sous la forme : $\underline{H} = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$

5. On donne le diagramme de Bode de ce quadripôle réalise pour $Q = 3$.

- ▷ Vérifier graphiquement la valeur de A
- ▷ Déduire du diagramme la valeur de la fréquence propre f_0 .
- ▷ Justifier l'allure des parties rectiligne du diagramme.



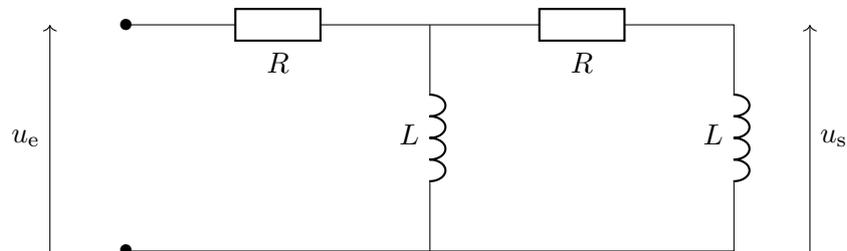
6. Le spectre du signal d'entrée est le suivant :
Donner le spectre du signal de sortie.



Exercice 6 - Filtre ADSL (*) :

Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une large gamme de fréquence : de 0 à 4 kHz pour les signaux téléphoniques (transmettant la voix) et de 25 kHz à 2 MHz pour les signaux informatiques (internet).

1. Quel type de filtre faut-il choisir si on ne souhaite récupérer que les signaux téléphoniques ? Que les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?
2. On utilise le filtre ci-dessous. Quel signal (téléphonique ou internet) obtiendra-t-on en sortie ?

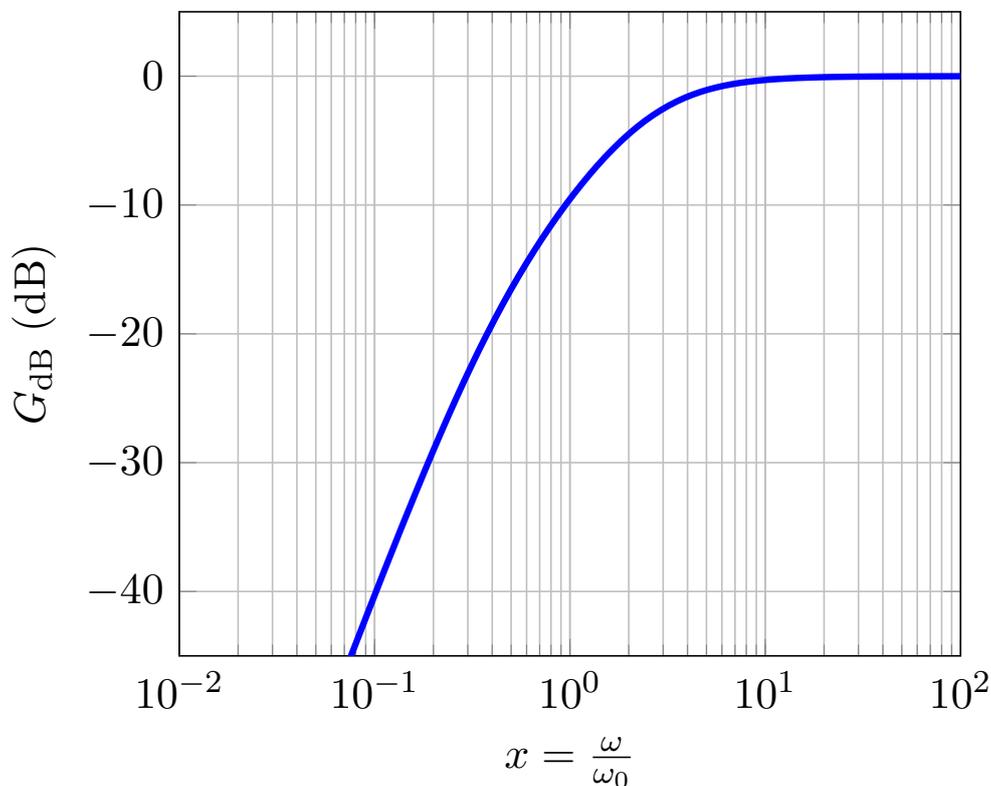


3. Déterminer la fonction de transfert de ce filtre et la mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}$$

avec $x = \omega/\omega_0$ et $\omega_0 = R/L$.

4. On donne le diagramme de Bode en amplitude ci-dessous.
 - ▷ Mesurer la pente des deux asymptotes. Retrouver ces résultats à partir de la fonction de transfert.
 - ▷ Proposer une valeur pour la pulsation de coupure ω_0 . En déduire des valeurs possibles pour R et L .
 - ▷ Par combien sera atténué au maximum les signaux internet ? Par combien sera atténué au minimum les signaux téléphoniques ?



Exercices qualitatifs

Exercice 1 - Spectre d'un signal et concevoir un filtre :

1. En récupérant les amplitudes et phases des différentes harmoniques ($f_1 = 50\text{Hz}$; $f_3 = 100\text{Hz}$; $f_4 = 150\text{Hz}$) on a :

$$e(t) = 0 + A_1 \cos(100\pi t + \pi) + A_3 \cos 200\pi t + A_4 \cos(300\pi t + \pi/3)$$

On voudrait pouvoir conserver en sortie de filtre un signal aussi sinusoïdal que possible, de fréquence comprise entre 75 Hz et 200 Hz.

2. Pour obtenir un signal sinusoïdal, il ne doit apparaître dans la décomposition de Fourier qu'une seule fréquence.
3. Les deux fréquences fonctionnent (elles sont entre 75 et 200 Hertz) mais il vaut mieux prendre 100Hz car son amplitude est plus grande.
4. On veut couper les hautes et basses fréquences, il faut un filtre passe bande.
5. On va "centrer" la bande passante sur la fréquence qu'on souhaite conserver, ici 100Hz, et couper les autres. Donc la fréquence 150Hz doit être en dehors de la bande passante. La largeur de cette dernière doit inférieure à 100Hz.

On a alors $Q > \omega_0 / \Delta\omega$ avec

$$\triangleright \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ avec } f_0 = 100\text{Hz}$$

$$\triangleright \Delta\omega = 2\pi\Delta f \text{ avec } \Delta f = 100\text{Hz.}$$

Finalement : $Q > 100/100 = 1$. A noter que plus Q sera élevé, plus le filtre sera sélectif.

Exercice 2 - Effet d'un filtre passe haut :

On considère un filtre passe-haut du premier ordre dont la fréquence de coupure est de 100 Hz. Donner l'allure du signal en sortie si on envoie en entrée :

1. La fréquence du signal est de 2kHz \gg 100Hz, la fréquence de coupure du filtre. Donc toutes les fréquences des harmoniques, qui sont des multiples de 2kHz seront bien supérieures également à 100Hz et ne seront pas atténuées.
Le signal de sortie sera identique au signal d'entrée.
2. Le raisonnement sur la partie oscillante sera le même que précédemment. Mais la tension continue de 1V possède une fréquence nulle : elle sera coupée par le filtre.
Le signal de sortie sera alors une sinusoïde d'amplitude 4V et de fréquence 2kHz sans composante continue.
3. C'est le cas précédent donc on récupèrera en sortie en créneau de même fréquence, de valeur moyenne nulle et d'amplitude 4V.
4. On remarque que cette fois la fréquence du signal est de 2Hz \ll 100Hz de la fréquence de coupure. Toutes les premières harmoniques (jusqu'à la 50ième) seront coupées par le filtre. Le signal en sortie sera très faible.
Mais, dans le cas d'un passe-haut, il y a un effet dérivateur si $f \ll f_0$. la dérivée d'un triangle est un créneau de même fréquence : le signal de sortie sera un signal créneau de faible amplitude et de fréquence 2Hz.

Exercice 3 - Concevoir un filtre :

On souhaite nettoyer l'enregistrement d'une conversation, rendu difficilement audible par des bruits divers. On considère que le spectre de l'audition humaine s'étend de 20 Hz à 20 kHz, tandis que celui de la voix couvre un intervalle allant de 100 Hz à 2 kHz.

1. Cf cours pour tracer un axe log
2. On veut ne conserver qu'une bande de fréquence : il faut un filtre passe-bande. 🚫🚫🚫 **Attention !** : on veut centrer la bande passante **en échelle log !!**

$$f_{milieux} \neq \frac{2000 + 100}{2} = 1050\text{Hz}$$

Si on le place sur l'échelle, ce n'est pas du tout au milieu! Il faut donc trouver le centre **en échelle log !!**

$$\log f_{milieu} = \frac{\log 2000 + \log 100}{2} = 3,3 \Rightarrow f_{milieu} = 10^{3,3} = 450\text{Hz}$$

3. La largeur de la bande passante est $\Delta\omega = 2000 - 100 = 1900\text{Hz}$ donc $Q = \omega_0/\Delta\omega = 0,23$. Il faut un facteur de qualité faible.

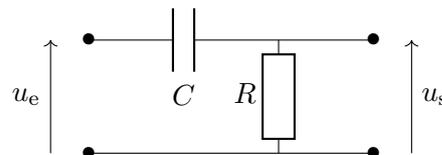
Exercice classique de filtrage

AVANT TOUTE CHOSE? VOUS ALLEZ FAIRE ET REFAIRE ET REREREREREREFAIRE L'ETUDE DES FILTRES CLASSIQUES DU COURS!!!!!!

Exercice 4 - Impédance d'entrée d'un oscilloscope :

1. Pont diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{R}{R + 1/jC\omega}$

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$



On reconnaît un filtre passe-haut.

2. $\omega_0 = 20\text{kHz}$ donc $f_0 = 3,2\text{kHz}$
3. Pour $\omega = \omega_0$ alors $\underline{H} = j/(1 + j)$ donc $G = 1/\sqrt{2}$ et $G_{dB} = -20 \log \sqrt{2} = 3\text{dB}$.
 ▷ Asymptote pour $\omega \ll \omega_0$:

$$\underline{H} \simeq \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1} \Rightarrow G = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow G_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

on a une droite de pente 20dB/décade.

- ▷ Asymptote pour $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{H} \simeq \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = 1 \Rightarrow G = 1 \Rightarrow G_{dB} = 0$$

on a une droite horizontale de gain 0dB.

On peut ensuite tracer grossièrement le graphe du gain en dB.

4. Avec les deux expressions de \underline{H} obtenue précédemment on remarque que :

- ▷ **BF** : $\underline{H} \simeq j\frac{\omega}{\omega_0}$.

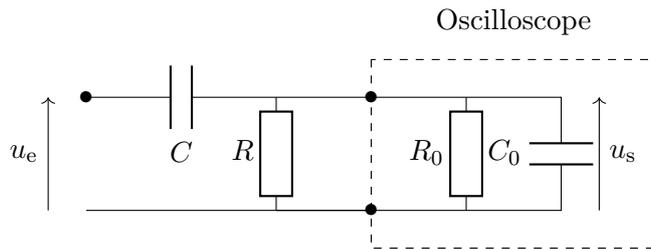
C'est un complexe de partie imaginaire positive $\Rightarrow \arg \underline{H} \simeq +\pi/2$.

- ▷ **BF** : $\underline{H} \simeq 1$.

C'est un réel positif $\Rightarrow \arg \underline{H} \simeq 0$.

Plat

On observe la tension de sortie à l'aide d'un oscilloscope ayant une impédance d'entrée due à un groupement parallèle ($R_0 = 1 \text{ M}\Omega$, $C_0 = 30 \text{ pF}$).



1. En associant R , R_0 et C on obtient :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} + jC_0\omega = \frac{R + R_0 + jRR_0C_0\omega}{RR_0} \Rightarrow Z_{eq} = \frac{R_0}{1 + R_0/R + jR_0C_0\omega}$$

A l'aide d'un pont diviseur de tension entre Z_{eq} et C on a :

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_0}{1 + R_0/R + jR_0C_0\omega}}{\frac{R_0}{1 + R_0/R + jR_0C_0\omega} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jR_0C\omega}{jR_0C\omega + 1 + R_0/R + jR_0C_0\omega}$$

On regroupe les termes :

$$\underline{H} = \frac{jR_0C\omega}{1 + R_0/R + jR_0(C + C_0)\omega}$$

et l'énoncé nous demande de factoriser par $\frac{C}{C + C_0}$:

$$\underline{H} = \frac{C}{C + C_0} \times \frac{jR_0\omega}{\frac{1 + R_0/R}{C + C_0} + jR_0\omega}$$

On fait apparaître le $1 + j\dots$:

$$\underline{H} = \frac{C}{C + C_0} \times \frac{j \frac{C + C_0}{1 + R_0/R} R_0\omega}{1 + \frac{C + C_0}{1 + R_0/R} R_0\omega}$$

On identifie alors $\omega'_0 = \frac{1 + R_0/R}{R_0(C + C_0)}$.

2. Pour que l'influence de l'oscilloscope soit négligeable on veut retrouver la même fonction de transfert que précédemment. Pour cela :

▷ $\frac{C}{C + C_0} \simeq 1$ donc $C \gg C_0$

▷ $\frac{1 + R_0/R}{R_0(C + C_0)} \simeq \frac{1}{R_0C}$. Comme $C \gg C_0$ il faut que $\frac{1 + R_0/R}{R_0C} \simeq \frac{1}{R_0C}$ donc $R_0 \gg R$.

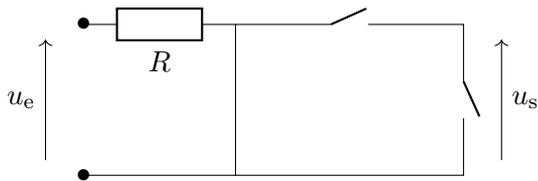
Un oscilloscope doit posséder une grande résistance d'entrée R_0 et une faible capacité C_0 .

Pas de dessert

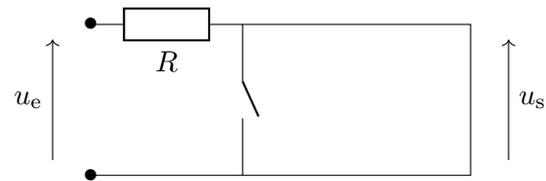
Exercice 5 - Filtre de Colpitts : Pour tout l'exercice on se place en RSF et on adopte une représentation complexes des signaux.

1. On se place à hautes et basses fréquences

BF : $\omega \rightarrow 0$



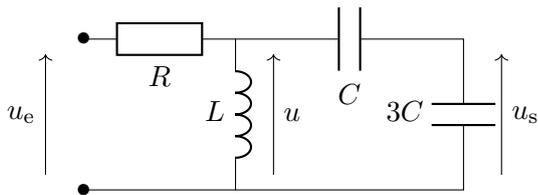
HF : $\omega \rightarrow \infty$



La partie du circuit n'est pas connecté à l'entrée : Tension aux bornes d'un fil : $u_s = 0$.
 $u_s = 0$.

C'est un filtre passe-bande.

2. C'est le cas typique où on ne peut pas appliquer un pont diviseur de tension pour relier u_s et u_e . On va passer par une tension intermédiaire u



Par un pont diviseur de tension on a :

$$\underline{u}_s = \frac{1/3jC\omega}{1/3jC\omega + 1/jC\omega} \underline{u} = \frac{\underline{u}}{4}$$

On va ensuite exprimer \underline{u} à partir de \underline{u}_e via un pont diviseur de tension. On associe en série entre deux condensateurs :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{3jC\omega} = \frac{4}{3jC\omega}$$

Puis \underline{Z}_C avec la bobine en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{3}{4}jC\omega \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \frac{jL\omega}{1 - \frac{3}{4}LC\omega^2}$$

Finalement :

$$\underline{u} = \frac{\frac{jL\omega}{1 - \frac{3}{4}LC\omega^2}}{\frac{jL\omega}{1 - \frac{3}{4}LC\omega^2} + R} \underline{u}_e = \frac{jL\omega}{R \left(1 - \frac{3}{4}LC\omega^2\right) + jL\omega} \underline{u}_e$$

On a donc : $\underline{u}_s = \frac{1}{4} \frac{j \frac{L}{R} \omega}{1 - \frac{3}{4}LC\omega^2 + j \frac{L}{R} \omega} \underline{u}_e$.

On identifie \underline{H} et on trouve alors dans l'ordre $\omega_0 \rightarrow Q \rightarrow A$.

$$\frac{3}{4}LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}$$

$$\frac{L}{R}\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{3C}{L}}$$

$$\frac{L\omega}{4R} = \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

3. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\frac{Q\omega_0}{j\omega}$:

$$\underline{H} = \frac{A}{\frac{Q\omega_0}{j\omega} - \frac{Q\omega}{j\omega_0} + 1} = \frac{A}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $1/j = -j$.

4. ▷ pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = A$ donc $G_{dB}[\omega_0] = 20 \log A = 20 \log 0.25 = -12\text{dB}$. C'est cohérent avec le graphe.
 ▷ on mesure ω_0 lorsque le gain atteint son max : on lit $f_0 \simeq 160\text{Hz}$ soit $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1000\text{Hz}$
 ▷ Pour les parties rectilignes, on se place en **BF** et **HF**

▷ Basse fréquence : $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{H} \simeq \frac{A}{-jQ \frac{\omega_0}{\omega}} \Rightarrow G = \frac{A\omega}{Q\omega_0} \Rightarrow G_{dB} = 20 \log \frac{A}{Q} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

Asymptote croissante de pente 20 décibel par décade.

▷ Haute fréquence : $\omega \gg \omega_0$

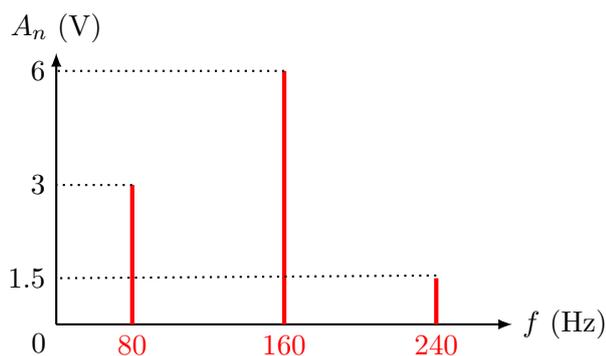
$$\underline{H} \simeq \frac{A}{jQ \frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow G = \frac{A\omega_0}{Q\omega} \Rightarrow G_{dB} = 20 \log \frac{A}{Q} + 20 \log \frac{\omega_0}{\omega} = 20 \log \frac{A}{Q} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

Asymptote décroissante de pente -20 décibel par décade.

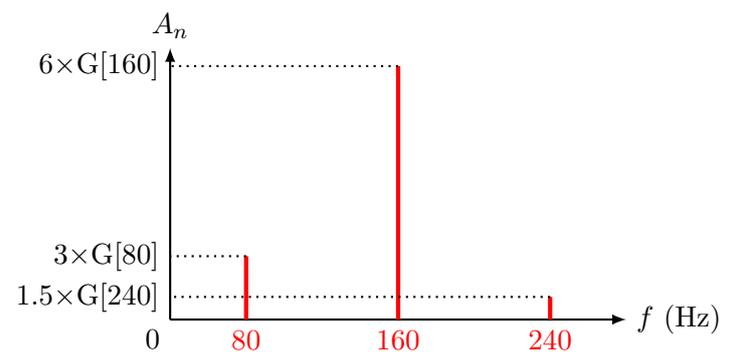
5. On lit les valeurs du gain pour chacune des fréquences des harmoniques sur le graphe et on multiplie l'amplitude de chaque harmonique par le gain associé.

Les amplitudes à 80 et 240 Hertz seront atténuées plus fortement que celle à 160Hz. (*les hauteurs des piques ne sont pas à l'échelle*).

Entrée



Sortie



Exercice 6 - Filtre ADSL (*) :

Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une large gamme de fréquence : de 0 à 4 kHz pour les signaux téléphoniques (transmettant la voix) et de 25 kHz à 2 MHz pour les signaux informatiques (internet).

1. Pour récupérer seulement l'un des deux signaux il faut donc trier suivants les fréquences : il faut filtrer.
 ▷ signaux téléphoniques : ce sont les basses fréquences du signal. On les récupère en sortie d'un filtre passe-bas.
 ▷ signaux informatiques : ce sont les hautes fréquences du signal. On les récupère en sortie d'un filtre passe-haut.

La fréquence de coupure de chacun de ces filtres doit :

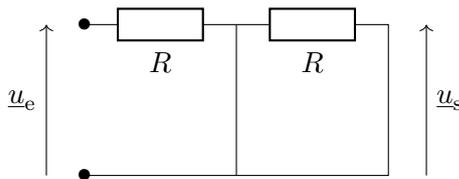
- ▷ préserver le signal souhaité
- ▷ exclure l'autre

Dans les deux cas, on peut "couper" à partir de 10kHz, $f_0 = 10\text{kHz}$.

Pour toute la suite, on se place en RSF et on adopte une représentation complexe des signaux.

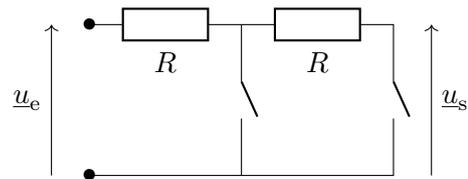
2. On réalise une étude HF et BF pour trouver la nature du filtre.

Basse Fréquences



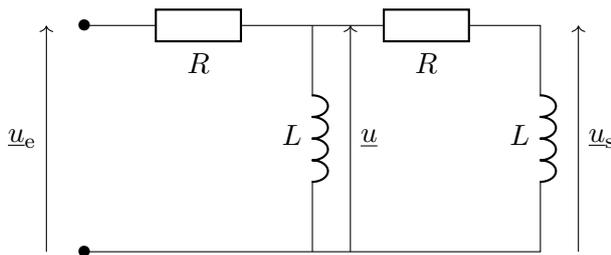
$u_s = 0$ (tension d'un fil)

Hautes Fréquences



$u_s = u_e$ (pas de courant dans les résistances)

3. **Attention !** On ne peut pas directement appliquer un pont diviseur de tension entre u_e et u_s . On passe par une tension intermédiaire u .



Pont diviseur entre u_s et u :

$$u_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} u$$

Pont diviseur entre u et u_e :

on associe les trois dipôle de droite :

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R + 2jL\omega}{jL\omega(R + jL\omega)}$$

Soit $Z_{eq} = \frac{jL\omega(R + jL\omega)}{R + 2jL\omega}$.

Finalement :

$$u = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} u_e = \frac{jL\omega(R + jL\omega)}{R(R + 2jL\omega) + jL\omega(R + jL\omega)} u_e$$

En regroupant les deux on trouve :

$$u_e = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \frac{jL\omega(R + jL\omega)}{R(R + 2jL\omega) + jL\omega(R + jL\omega)} u_e$$

On simplifie et on fait apparaître des grandeurs adimensionnés, ici $\frac{L}{R}\omega$ en simplifiant en haut et en bas par R^2 .

$$u_e = \frac{-L^2\omega^2}{R^2 + 2jLR\omega + jLR\omega - L^2\omega^2} u_e = \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + 3j\frac{L}{R}\omega - \left(\frac{L}{R}\right)^2} u_e$$

On a bien : $H = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}$ avec $x = \omega/\omega_0$ et $\omega_0 = R/L$.

4. On donne le diagramme de Bode en amplitude ci-dessous.

- ▷ On trouve une pente de +40dB/dec pour les basses fréquences et une pente nulle pour les hautes fréquences.
- ▷ On choisit $\omega_0 = 2\pi f_0$ avec $f_0 = 10\text{kHz}$, soit $\omega_0 = 6,28 \cdot 10^4 \text{rad/s}$.
Avec $L = 10\text{mH}$, on trouve $R = L\omega_0 = 628\Omega$.
- ▷ Comme c'est un filtre passe-haut :
 - ▷ la fréquence des signaux internet la plus atténuée est 25kHz, soit $x = 2,5$. On mesure un Gain en dB de $G_{dB}(2,5) = -3$, ce qui correspond à un gain de $10^{-3/20} \simeq 0,7$.
 - ▷ la fréquence des signaux téléphone la moins atténuée est 4kHz, soit $x = 0,4$. On mesure un Gain en dB de $G_{dB}(0,4) = -20$, ce qui correspond à un gain de $10^{-20/20} = 0,1$.

Table des matières

1	Modèle idéal de l'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI)	1
1.1	Présentation de l'ALI	1
1.2	Modèle idéal de l'ALI	2
2	Filtrage actif à l'aide d'un ALI	3
2.1	Montage suiveur	3
2.2	Montage amplificateur non-inverseur	4
2.3	Montage amplificateur inverseur	5
2.4	Montage intégrateur	6
3	Impédance d'entrée et de sortie, montage en série de filtres	8

Savoirs ♥

- ▷ ♥ Notion de filtre actif
- ▷ ♥ **Réponse d'un ALI idéal en régime linéaire**
 - ▷ cas d'une rétroaction sur l'entrée inverseuse
 - ▷ cas d'une rétroaction sur l'entrée non-inverseuse
 - ▷ cas sans rétroaction
- ▷ ♥ Impédance d'entrée et impédance de sortie

Savoir Faire

-  *Trouver le lien tension d'entrée - tension de sortie pour les montages suiveur ; non-inverseur ; inverseur ; intégrateur*
-  *Estimer les impédances d'entrée et de sortie d'un filtre. Justifier qu'on choisit des fortes impédances d'entrée et de faibles impédances de sortie*

Nous avons étudié dans le chapitre précédent des dispositifs de filtrage linéaire passif, c'est-à-dire des dispositifs uniquement composés de dipôle linéaire passif (bobine, condensateur, résistance). Nous nous intéressons ici au fonctionnement d'un composant actif : l'Amplificateur Linéaire Intégré ou ALI.

1 Modèle idéal de l'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI)

1.1 Présentation de l'ALI

L'Amplificateur Linéaire Intégré (ou ALI) est un composant actif :

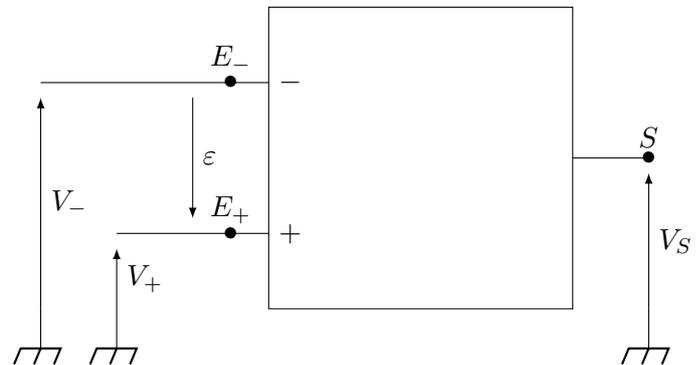
1. il doit être alimenté électriquement pour fonctionner (ce qui n'est pas le cas d'une résistance ou d'une bobine).
 2. il peut fournir de l'énergie au système \Rightarrow effet amplificateur
- ⚡⚡⚡ **Attention !** On ne précise jamais l'alimentation électrique sur un schéma de montage mais elle ne doit pas être oublié pour autant. A

► **Schéma de branchement d'un ALI**

L'ALI est modélisé par un bloc à trois connexions (tripôle) :

- ▷ une entrée "+", point E_+ , au potentiel V_+ , dite "non-inverseuse"
- ▷ une entrée "-", point E_- , au potentiel V_- , dite "inverseuse"
- ▷ une sortie, au potentiel V_S

On représente parfois un ALI par un triangle. Les deux représentations sont équivalentes.

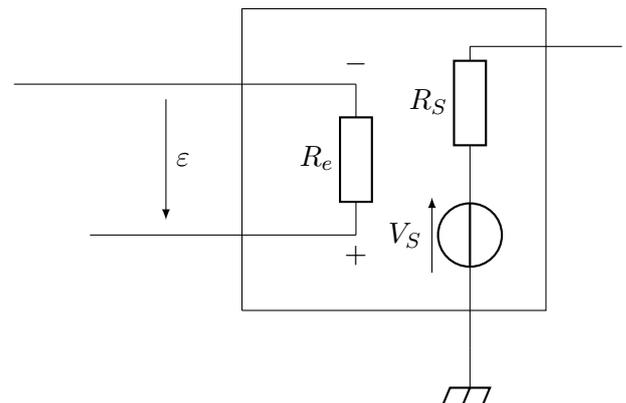


► **Circuit équivalent d'un ALI**

On appelle :

- ▷ i_+ et i_- les courant entrant dans les entrées + et -
- ▷ i_S l'intensité de sortie
- ▷ R_e la résistance d'entrée de l'ALI, représentant la résistance entre les bornes + et -
- ▷ R_S la résistance de sortie de l'ALI, représentant la résistance entre les bornes sortie et la masse

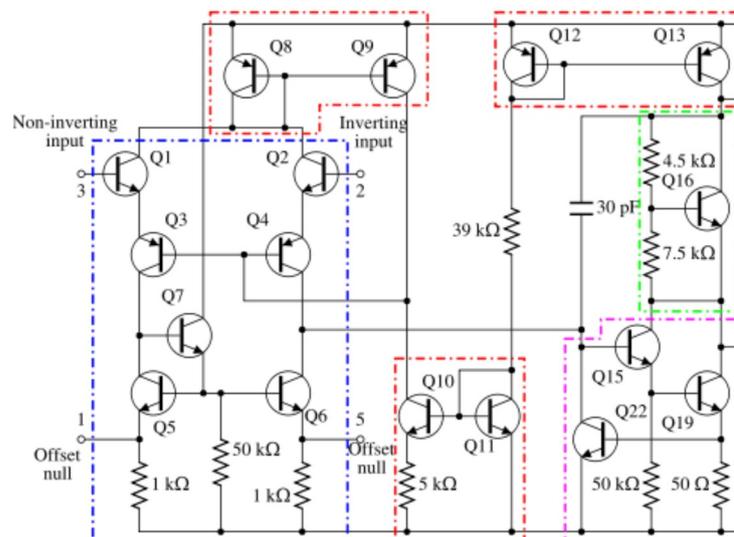
Schéma équivalent :



1.2 **Modèle idéal de l'ALI**

Une des utilités de l'ALI est de pouvoir mettre en place une boucle de rétroaction en réalisant un branchement électrique entre la sortie et une des entrées.

Suivant la boucle de rétroaction qu'on met en place, l'ALI possède deux comportements : linéaire ou saturé. La composition interne d'un ALI étant bien trop complexe (cf schéma ci-contre), on adoptera une représentation idéale de son fonctionnement.



Propriété. Modèle idéal de l'ALI

- ▷ La résistance d'entrée est infini, ainsi les courants d'entrées sont nuls : $i_+ = i_- = 0$
- ▷ La résistance de sortie est nulle
- ▷ **en cas de rétroaction de la sortie sur l'entrée négative de l'ALI**
le régime linéaire est atteint et dans ce cas :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0$$

- ▷ **en cas de rétroaction de la sortie sur l'entrée positive de l'ALI ou s'il n'y a pas de rétroaction**
le régime saturé est atteint et dans ce cas :

$$V_S = +V_{sat} \text{ si } \varepsilon > 0 \text{ et } V_S = -V_{sat} \text{ si } \varepsilon < 0$$

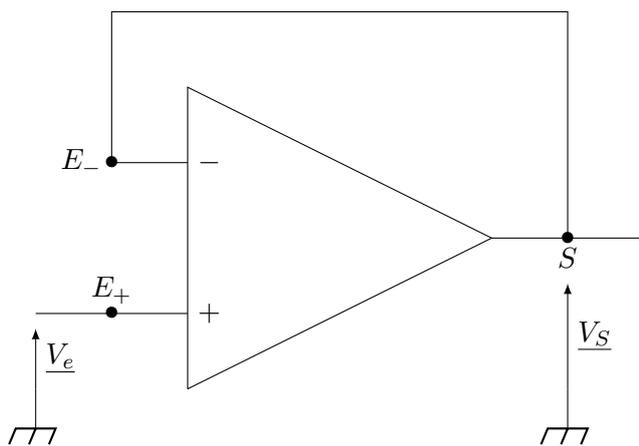
2 Filtrage actif à l'aide d'un ALI

Les montages suivants doivent être maîtrisés dans l'analyse, il n'est pas nécessaire de les apprendre par coeur.

L'objectif des montages est d'exprimer le lien entre la tension d'entrée $\underline{V_e}$ et de sortie $\underline{V_S}$.

2.1 Montage suiveur

On étudie toujours un ALI en RSF

**1) Analyser le mode de fonctionnement de l'ALI**

On parle de rétroaction si la sortie est relié par un fil ou des dipôles à une des deux entrées

- ▷ rétroaction sur l'entrée négative \Rightarrow Régime linéaire
- ▷ rétroaction sur la branche positive ou pas de rétroaction \Rightarrow Régime saturé

Ici : rétroaction sur la branche négative \Rightarrow Régime linéaire : $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$.

2) Branchement des bornes + et - :

$$\underline{V_+} = \underline{V_e} \text{ donc } \underline{V_-} = \underline{V_e}.$$

3) Analyse de la boucle de rétro-action

La sortie et l'entrée négative sont reliées par un fil : elles ont la même tension.

$$\underline{V_-} = \underline{V_S}$$

4) Fonction de transfert et analyse

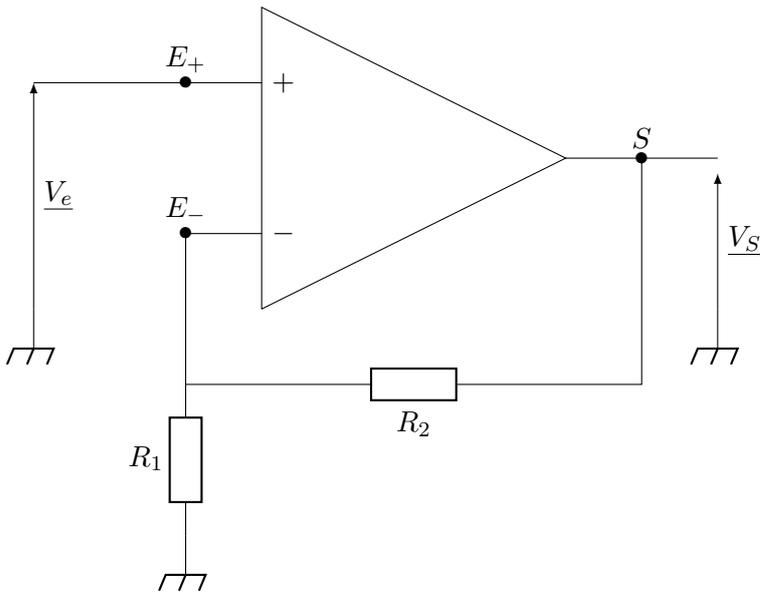
Par définition $\underline{H} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}}$. Ici

$$\underline{V_S} = \underline{V_-} = \underline{V_+} = \underline{V_e} \Rightarrow \underline{V_S} = \underline{V_e} \Rightarrow \underline{H} = 1$$

La tension de sortie est strictement identique à la tension d'entrée : on parle de montage suiveur.

*** **Attention !** Ce montage, a priori inutile, possède une utilité pratique qu'on décrira dans la partie suivante.

2.2 Montage amplificateur non-inverseur



1) Analyser le mode de fonctionnement de l'ALI

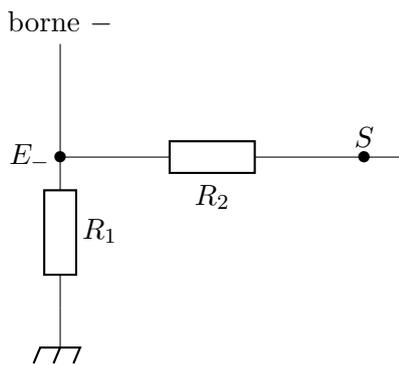
Rétroaction sur la branche négative
 ⇒ Régime linéaire : $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$.

2) Branchement des bornes + et - :

$$\underline{V_+} = \underline{V_e} \text{ donc } \underline{V_-} = \underline{V_e}$$

3) Analyse de la boucle de rétro-action

Le branchement retour est *plus compliqué* que juste un fil : on fait un schéma de branchement de la boucle de rétroaction !!

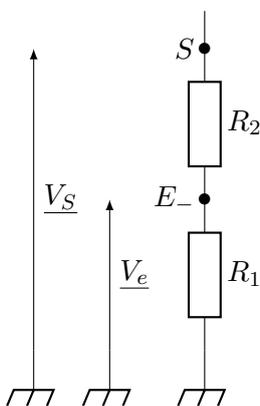


*** **Attention !** Pour le modèle idéal les courants d'entrées sont nuls : il n'y a pas de courant entrant dans la borne -.

On peut alors considéré que le fil allant à la borne - n'existe pas : il n'y pas de noeud véritable entre R_1 et R_2 .

Astuce pratique : On fera toujours TOUJOURS en sorte de représenter sur le schéma les tensions d'entrée $\underline{V_e}$ et de sortie $\underline{V_S}$

- ▷ $\underline{V_e}$ est la tension au point E_+ et donc au point E_-
- ▷ $\underline{V_S}$ est la tension au point S



Par un pont diviseur de tension :

$$\underline{V_e} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{V_S} \Rightarrow \underline{V_S} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \underline{V_e}$$

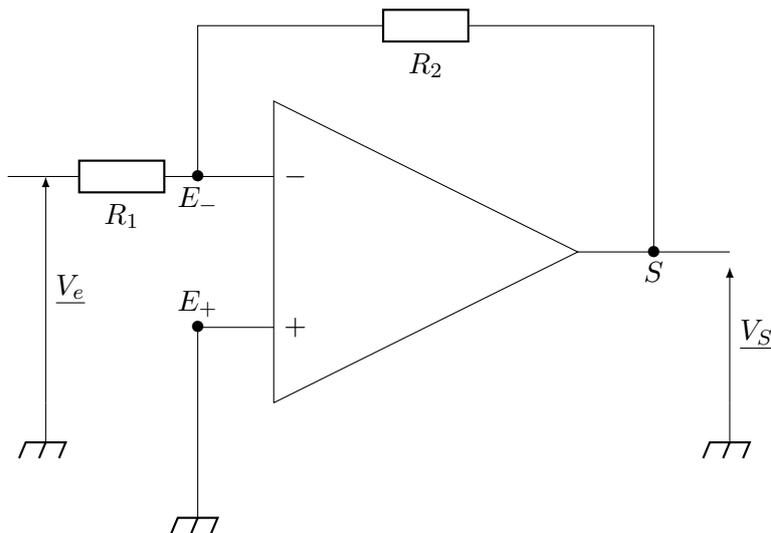
4) Fonction de transfert et analyse

$$\underline{H} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

On remarque que $(R_1 + R_2)/R_1 > 1$: le signal de sortie est identique au signal d'entrée mais amplifié.

*** **Attention !** Il y a ici un apport d'énergie : ce n'est possible que parce que l'ALI est un dipôle actif.

2.3 Montage amplificateur inverseur



1) Analyser le mode de fonctionnement de l'ALI

Rétroaction sur la branche négative
 ⇒ Régime linéaire : $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$.

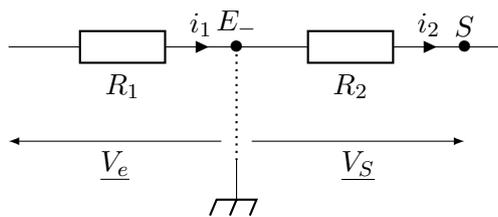
2) Branchement des bornes + et - :

Ici $V_+ = 0$ donc $V_- = 0$.

3) Analyse de la boucle de rétro-action

Dans le régime idéal, il n'y a pas de courant entrant dans la borne - : on ne la représente pas le fil allant à cette borne sur le schéma.

Le point E_+ est relié à la masse, et donc le point E_- également.



On a donc $i_1 = i_2$.

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** On représente la masse sur le schéma mais ce n'est pas un fil!!

Loi d'Ohm en RSF :

$$i_1 = V_e/R_1 \text{ et } i_2 = -V_S/R_2$$

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** R_2 est en convention générateur!!!

On a donc :

$$V_S = -\frac{R_1}{R_2}V_e$$

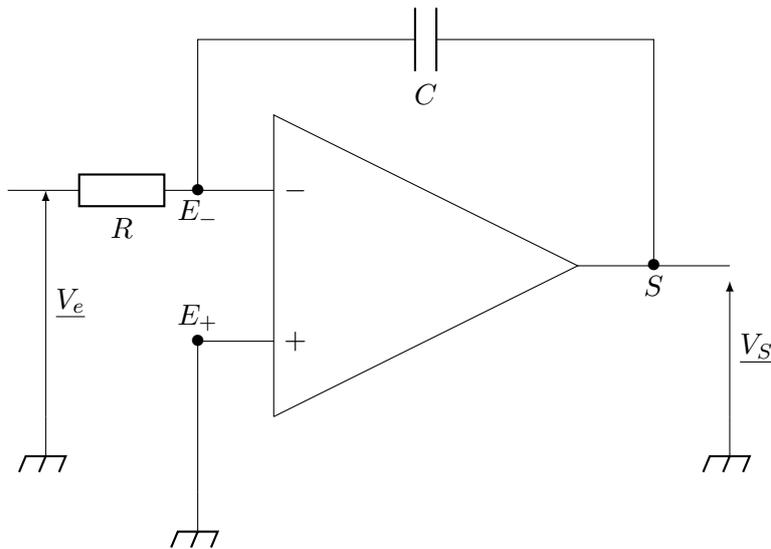
4) Fonction de transfert et analyse

$$H = -\frac{R_1}{R_2}$$

De nouveau, le signal est amplifié si $R_1 > R_2$. Mais contrairement au cas précédent, le signal de sortie est multiplié par -1 , soit un déphasage de π .

♡ *Instant math* ♡ : $-1 = e^{j\pi}$.

2.4 Montage intégrateur



1) Analyser le mode de fonctionnement de l'ALI

Rétroaction sur la branche négative
 ⇒ Régime linéaire : $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$.

2) Branchement des bornes + et - :

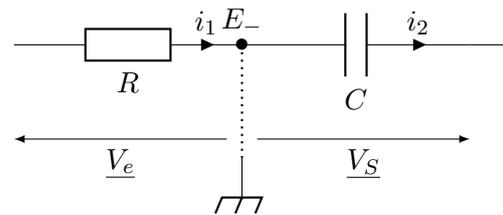
Ici $V_+ = 0$ donc $V_- = 0$.

3) Analyse de la boucle de rétro-action

On est dans un cas similaire à celui de l'amplificateur inverseur avec $R_2 \rightarrow C$.

S

Il n'y a pas de courant entrant dans la borne - : on ne la représente pas sur le schéma. On a donc $i_1 = i_2$.



Par la loi d'Ohm en RSF

$$i_1 = \frac{V_e}{R_1} \text{ et } i_2 = -\frac{C}{1/jC\omega}$$

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** C est en convention générateur!!!

On a donc :

$$V_S = \frac{V_e}{jC\omega}$$

4) Fonction de transfert et analyse

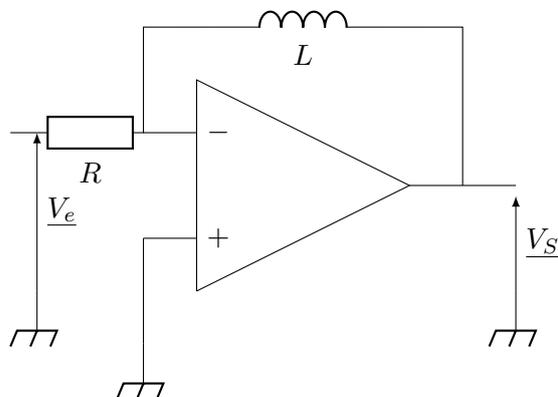
$$H = -\frac{1}{jRC\omega}$$

On reconnaît ici l'intégration en RSF :

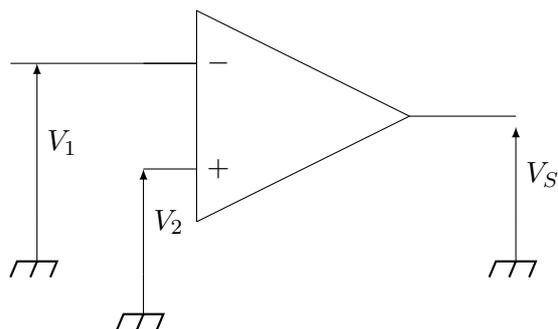
$$V_S = -\frac{V_e}{jC\omega} \Rightarrow V_S = -\frac{1}{RC} \int V_e dt$$

Application 1 : On suppose que le signal d'entrée est un signal créneau d'amplitude E_0 et de fréquence T . Représenter le signal V_S de sortie.
On précisera la valeur des pentes.

Application 2 : Quelle opération réalise le montage suivant ?



Application 3 : Donner la valeur de la tension de sortie V_S . On pourra distinguer deux cas suivant que $V_1 > V_2$ ou $V_1 < V_2$.



3 Impédance d'entrée et de sortie, montage en série de filtres

Notion de bloc en électronique

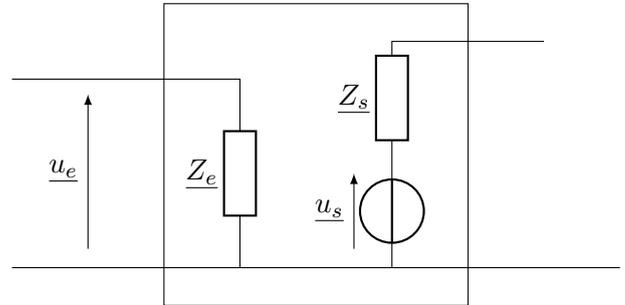
Pour simplifier la représentation des circuits et faciliter l'analyse, il est plus simple en électronique de représenter les éléments d'un circuit par des blocs qui réalisent des opérations bien spécifiques : filtrage, amplification de tension, intégration, ...

Un bloc est généralement un quadripôle qui se définit à l'aide

- ▷ une fonction de transfert qui relie la tension d'entrée et la tension de sortie.

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$$

- ▷ une impédance d'entrée \underline{Z}_e
- ▷ une impédance de sortie \underline{Z}_z



Propriété. Lien $u_e - u_s$

La tension de sortie est déterminée par la tension d'entrée du bloc et la fonction de transfert :

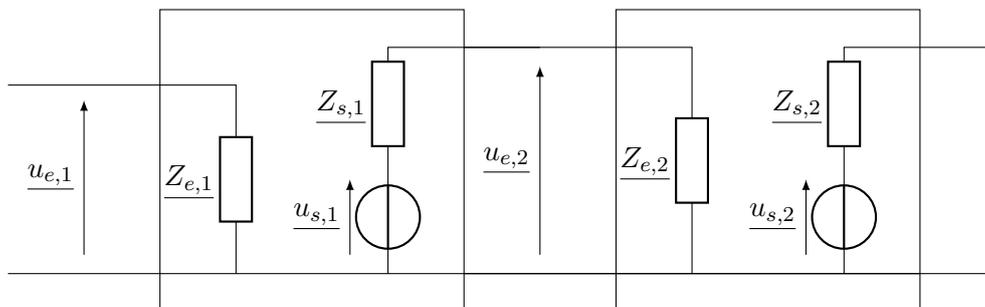
$$u_s = \underline{H}u_e$$

Influence des impédances :

- ▷ l'impédance d'entrée \underline{Z}_e représente comment le bloc influence le circuit en amont
- ▷ l'impédance de sortie \underline{Z}_z représente comment le bloc influence le circuit en aval

Chaînes de blocs

L'intérêt de la représentation en blocs est de faire des chaînes de blocs pour réaliser des montages à la fois complexe mais représenté simplement.



La tension d'entrée ressentie par le bloc 2 est $u_{e,2}$. Elle est générée par la tension de sortie du bloc 1. par un pont diviseur de tension on a :

$$u_{e,2} = \frac{Z_{e,2}}{Z_{e,2} + Z_{s,1}}$$

La tension reçue par le second bloc n'est pas la tension de sortie du premier bloc car :

- ▷ $Z_{s,1}$ modifie la tension que reçoit le bloc 2
- ▷ $Z_{e,2}$ modifie la tension que génère le bloc 1

Pour s'affranchir de ce problème il faut que :

$$|Z_{e,2}| \gg |Z_{s,1}|$$

Propriété. Blocs en cascade et impédances

Pour associer efficacement deux blocs d'électroniques il faut que l'impédance de sortie du bloc en amont soit négligeable devant l'impédance d'entrée du bloc en aval.

Propriété. Impédances idéale de sortie et d'entrée

Un bloc idéal possède :

- ▷ une impédance d'entrée infini : $Z_e = +\infty$
- ▷ une impédance de sortie nulle : $Z_s = 0$

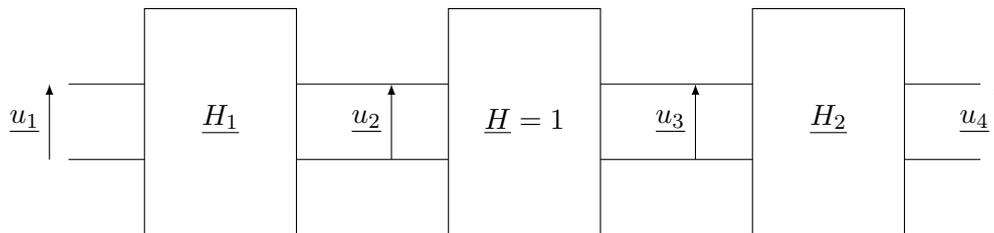
Autrement dit, dans l'idéal aucun courant ne rentre dans un bloc.

Application : filtres en cascade

Exemple 1 : On considère l'association de deux filtres telle que :

$$\underline{H}_1 = \underline{H}_2 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = 1\text{kHz}$.



1. Quel est la nature du filtre 1 ? Quel est son ordre ?
2. Donner un montage électronique simple permettant de réaliser ce filtre. On précisera la valeur des composants.
3. Quel est l'intérêt du montage suiveur ?
4. Donner l'expression de la fonction de transfert globale $\underline{H} = \frac{u_4}{u_1}$.
5. On injecte en entrée du montage un signal u_1 de la forme :

$$u_1(r) = U + u_0 \cos \omega_0 t \cos 2\omega_0 t$$

avec $U = 5\text{V}$ et $u_0 = 6\text{V}$.

- ▷ Montrer que ce signal peut s'écrire comme la somme de deux sinusoïde
- ♡ Instant math ♡

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} (\cos(p + q) + \cos(p - q))$$

- ▷ Représenter l'allure du spectre de u_4
- ▷ Déterminer le spectre du signal de sortie (on déterminera notamment les amplitudes des différentes harmoniques)
- ▷ En déduire le signal de sortie.