

Le Soulard

PCSI

Tome 4 : Physique des ondes

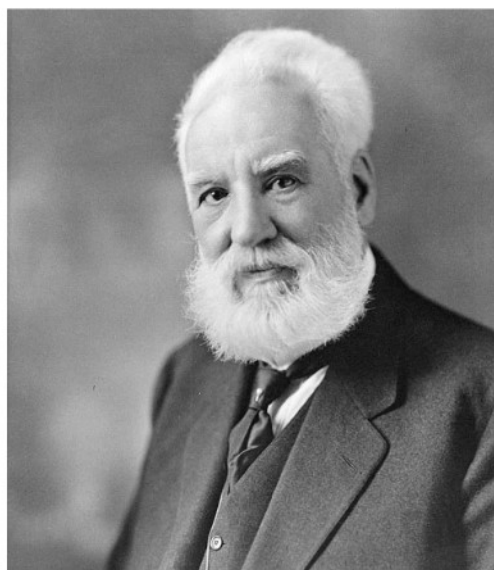
- *Ondes progressives et stationnaires*
- *Phénomènes d'interférences*
- *Introduction à la Mécanique Quantique*

***Cours de Physique
de première année
de classe préparatoire***

Lycée Louis Thuillier

Table des matières

1	Propagation d'un onde	3
1.1	Ondes et milieux de propagations	3
1.2	Ondes progressives	4
1.3	Propagation d'une onde	8
2	Ondes progressives sinusoïdales	10
2.1	Propagation d'une onde sinusoïdale	10
2.2	Caractéristiques d'une onde progressive sinusoïdale	10
2.3	Périodicité spatiale et périodicité temporelle	11
3	Ondes stationnaires	15
3.1	Forme générale des ondes stationnaires	15
3.2	Expérience de la corde de Melde : vibration d'une corde attachée aux deux extrémités . . .	15
3.3	Exercice : corde de Molde et quantification des modes de vibration	16
3.4	Notion de quantification	18
3.5	Mode propre de vibration	19
3.6	Mode de vibration d'une onde stationnaire quelconque	20



Savoirs ♥

- ▷ ♥ **Onde progressive**
 - ▷ forme mathématiques suivant la direction de propagation
 - ▷ notion de retard du à la propagation
 - ▷ célérité et vitesse de phase
 - ▷ lien avec la source émettrice
- ▷ ♥ **Onde progressive sinusoïdale**
 - ▷ forme mathématique de l'OPS
 - ▷ notion de phase
 - ▷ période spatiale et période temporelle
 - ▷ lien vecteur d'onde-pulsation et longueur d'onde-fréquence
- ▷ ♥ Notion de milieux absorbant et milieux dispersifs.
- ▷ ♥ **Onde stationnaire**
 - ▷ condition d'existence et forme mathématiques
 - ▷ notion de modes propres de vibration
 - ▷ nœuds et ventres de vibration ; écart entre deux ventres/deux nœuds successifs
 - ▷ notion de quantification et quantification des fréquences/longueurs d'onde

Savoir Faire**Propagation d'une onde**

1. A partir du signal émis par la source
 - ▷ représenter l'évolution temporelle à position fixée
 - ▷ représenter l'évolution spatiale à différents instants
2. Savoir passer d'une représentation spatiale à une représentation temporelle

**Onde progressive sinusoïdale**

- ▷ Établir à partir du signal source l'expression de l'onde dans tout l'espace
- ▷ Établir la relation entre la fréquence ; la longueur d'onde et la vitesse de phase
- ▷ Établir le déphasage entre deux ondes mesurées à deux endroits différents à l'aide du retard à la propagation

**Onde stationnaire**

1. A partir d'une forme proposée
 - ▷ utiliser les conditions aux limites pour trouver φ_n ; k_n et ω_n
 - ▷ établir la quantification des longueur d'ondes et des fréquences
 - ▷
2. A l'aide de schémas :
 - ▷ Etablir la quantification des longueurs d'ondes
 - ▷ En déduire la quantification des fréquences

1 Propagation d'un onde

1.1 Ondes et milieux de propagations

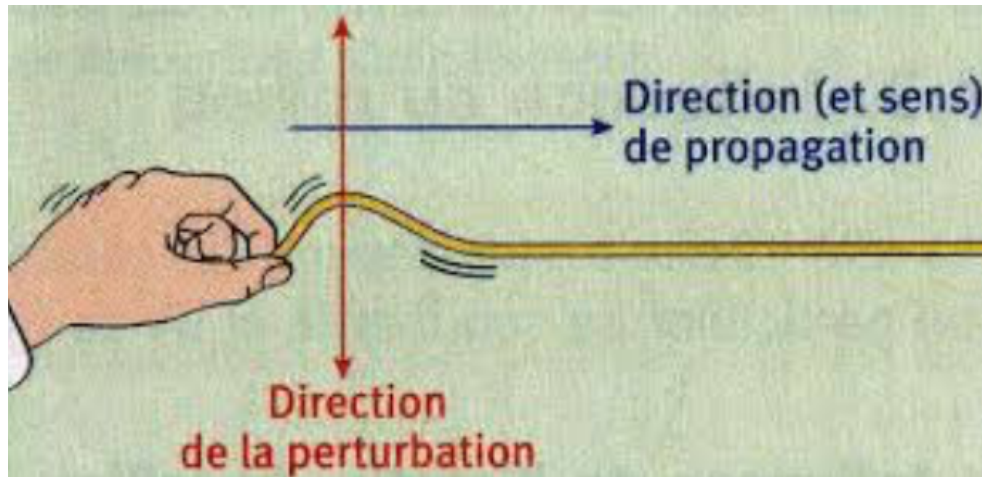
► Qu'est-ce qu'une onde

Définition. Onde

Une onde est une perturbation locale d'une grandeur physique qui se propagation de proche en proche à une vitesse appelée célérité, notée c .

Par la suite on ne considèrera uniquement des ondes se propageant suivant une seule directions. On définit l'axe (Ox) comme l'axe suivant lequel l'onde se propage.

Exemple 1 : Onde sur une corde



La perturbation créée par la main se propage le long de la corde. Elle dépend :

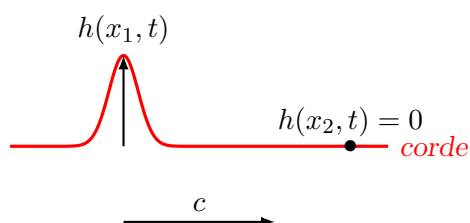
- ▷ de l'espace : en chaque point de la corde, le déplacement de cette dernière varie
- ▷ du temps : à deux instants différents, le déplacement de la corde en un point n'est pas le même

Propriété. Représentation mathématique d'une onde

Une onde unidirectionnelle se propage suivant un axe (Ox). Elle est décrite mathématiquement par un **champ** $s(x, t)$ qui correspond

- ▷ à l'amplitude s de l'onde
- ▷ au point x de l'axe
- ▷ à l'instant t

Exemple 2 :



Si on étudie la propagation d'une perturbation le long d'une corde.

- ▷ l'axe (Ox) est l'axe de la corde au repos
- ▷ la perturbation s est la hauteur de la corde, mesurée par rapport à sa position de repos, au point d'abscisse x à l'instant t : $s(x, t) = h(x, t)$

Exemple d'onde et de signal

électrique	acoustique
intensité électrique i	surpression acoustique ΔP
vague/corde vibrante	électromagnétique/lumière
écart à la position d'équilibre h	champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$

► Milieux de propagation

La propagation d'une onde dépend du milieu dans lequel elle se propage.

Définition. Absorbant et dispersif

Un milieu de propagation est

- ▷ **absorbant** si il y a une atténuation de l'onde au fur et à mesure qu'elle se propage ($\sim$ l'amplitude décroît)
- ▷ **dispersif** si il y a une déformation du profil de l'onde au fur et à mesure qu'elle se propage

On considèrera par la suite des milieux non absorbant et non dispersif.

Propriété. Propagation d'une onde dans un milieu non absorbant et non dispersif

Une onde se propage sans s'atténuer et sans se déformer : elle se retrouve alors un peu plus loin un peu plus tard.

1.2 Ondes progressives

► Définition et signal

Définition. Onde progressive

Une onde est dite progressive lorsque la perturbation initiale se déplace en moyenne dans une direction particulière.

Une onde progressive est généralement générée par une source située sur l'axe.

Propriété. Onde progressive et source

Une source placée en $x = x_S$ émet un signal $S_0(t)$. L'onde progressive générée au niveau de la source S est égal au signal émis :

$$s(x = x_S, t) = S_0(t)$$

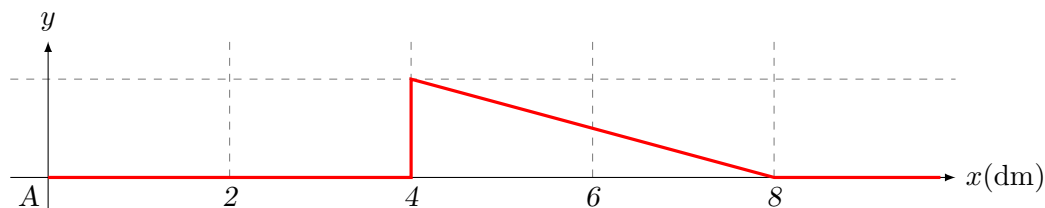
► Représentation spatiale et propagation d'une onde

Définition. Représentation spatiale

On regarde à un **temps fixé** la perturbation dans **tout l'espace**. On fixe la variable temporelle au moment de la photo $t = t_{\text{photo}}$ et on trace l'onde en fonction de la variable spatiale x .

C'est comme prendre une photographie.

Exemple 3 : Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 100 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ vers les x croissants. À $t = 0$, le signal créé au point A débute.



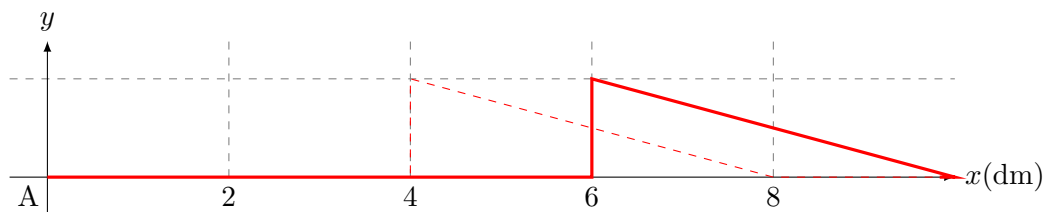
1. En utilisant la figure, déterminer
 - ▷ le front ($\sim$ début) de l'onde
 - ▷ l'instant correspondant à l'image
 - ▷ la durée de la perturbation
2. Que représente la courbe rouge :

$$s(x, t) ; s(x = 0, t) ; s(x, t = 0, 4) ; s(x, t = 0) ; s(x = 0; t = 0, 8)$$

3. Représenter la corde à $t = 1 \text{ s}$.

CORRECTION

1.
 - ▷ Le front de l'onde est en $x = 0,8\text{m}$ car l'onde se propage de la gauche vers la droite. (*si elle se propageait dans l'autre sens, le front serait en $x = 0,4\text{m}$*)
 - ▷ L'instant correspondant à l'image est $t = 0,8\text{s}$: le front de l'onde a parcouru 8dm à la vitesse $c = 1\text{m/s}$.
 - ▷ La perturbation fait $8 - 4 = 4\text{dm}$ de longueur. En se propageant à la vitesse $c = 1\text{m/s}$, elle dure $0,4/1 = 0,4\text{s}$.
2. On va étudier chacune des propositions
 - ▷ $s(x, t)$: c'est la forme générale de l'onde en tout point x et à tout instant t . On ne peut la représenter sur un graphe (*ou alors il faudrait deux axes des abscisses*)
 - ▷ $s(x = 0, t)$: c'est l'onde au niveau du point d'abscisse $x = 0$ à tout instant t . Sa représentation serait un graphe où l'axe des abscisses serait les temps t : c'est une représentation temporelle, $\sim$ un enregistrement.
 - ▷ $s(x, t = 0,4)$: c'est l'onde à l'instant $t = 0,4$ en tout point de l'espace. C'est donc bien une représentation spatiale, $\sim$ une photographie, **MAIS** l'instant n'est pas bon.
 - ▷ comme avant mais à l'instant $0,4$
 - ▷ $s(x = 0, t = 0,8)$; c'est l'onde à l'instant $t = 0,8$ au point $x = 0$. C'est un nombre, qui vaut ici 0 .
3. Pour représenter l'onde à $t = 1\text{s}$ on se base sur la représentation qu'on a de l'onde à $t = 0,8\text{s}$. Entre les deux instant l'onde se propage de $(1 - 0,8) \times c$ mètres soit $0,2\text{m} = 2\text{dm}$. On a juste représenté le même graphe (milieu non-dispersif et non absorbant) mais décalé de 2dm vers la droite.



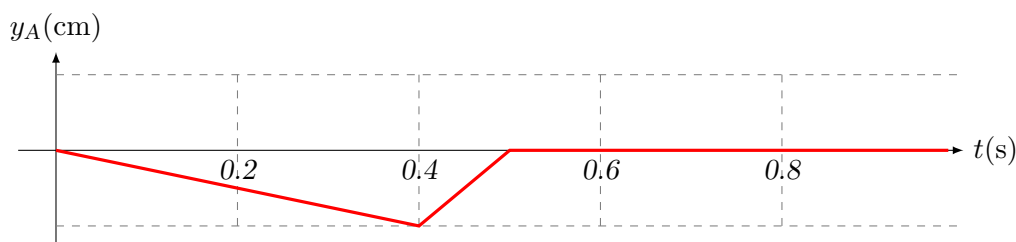
► Représentation temporelle

Définition. Représentation temporelle

On regarde à un **endroit fixé** la perturbation passer. On fixe la variable spatiale à la position du capteur $x = x_{\text{capteur}}$ et on trace l'onde en fonction de la variable temporelle t .

On se place à un endroit et on regarde l'onde passer.

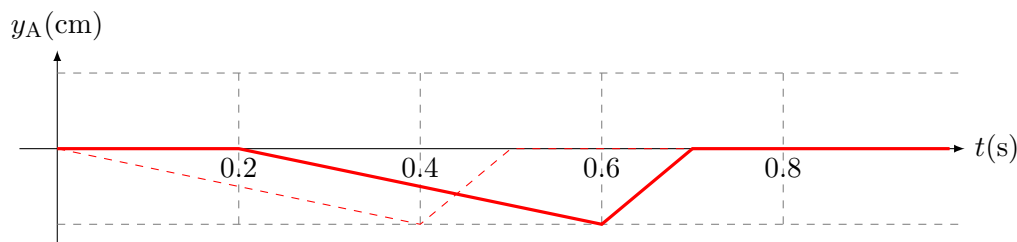
Exemple 4 : Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ vers les x croissants. En $x = 0 \text{ m}$ (point A de la corde), on crée le signal représenté sur le schéma.



- Déterminer
 - ▷ le début de la perturbation
 - ▷ la durée
 - ▷ la longueur de la perturbation
- On place un capteur au point B $x_B = 2 \text{ cm}$. Tracer le signal mesuré en B au cours du temps $y_B(t)$.

CORRECTION

- ▷ **Attention !** sur un axe temporelle, le temps s'écoule toujours de gauche à droite : le début d'une perturbation **quelque soit son sens de propagation**, est "à gauche". (*c'est évident, mais on peut se tromper bêtement*).
Début $t = 0 \text{ s}$
 - ▷ L'onde dure entre 0s et 0,5s soit une durée de 0,5s.
 - ▷ Sa longueur est alors $0,5 \times c = 5 \text{ cm}$
- Tout se qui est mesurée en A va être mesuré en B mais **avec un retard** τ correspondant au temps de propagation pour aller de $A \rightarrow B$ soit $(x_B - x_A)/c = 0,2 \text{ s}$.
On retrace alors la même courbe (milieu non-dispersif et non absorbant) décalé de 0,2s.

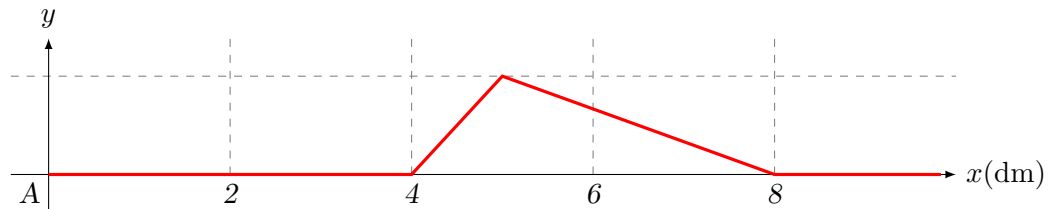


► (Pour aller plus loin) Changement de représentation

Il est parfois nécessaire de savoir passer d'une représentation spatiale à une représentation temporelle, et inversement.

Application 1 : Passage d'une représentation spatiale à une représentation temporelle

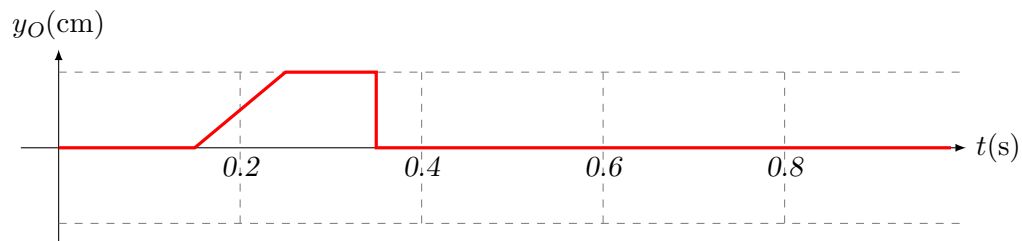
Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 100 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ vers les x croissants. À $t = 0$, le signal créé au point A débute.



Représenter le profil temporelle de l'onde au niveau de la source A, $x_A = 0$ et du point B $x_B = 8 \text{ dm}$.

Application 2 : Passage d'une représentation temporelle à une représentation spatiale

Une onde progressive se propage le long d'une corde à la célérité $c = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ vers les x croissants. À l'origine O est créé un signal représenté sur le schéma suivant :



Réaliser une représentation spatiale de la corde à $t = 2 \text{ s}$ et $t = 4 \text{ s}$.

1.3 Propagation d'une onde

► Cas d'une propagation suivant les x croissant

On étudie une onde générée par une source située en x_0 créant un signal $\mathcal{S}(t)$. L'onde se déplace suivant les x croissant à la célérité c .

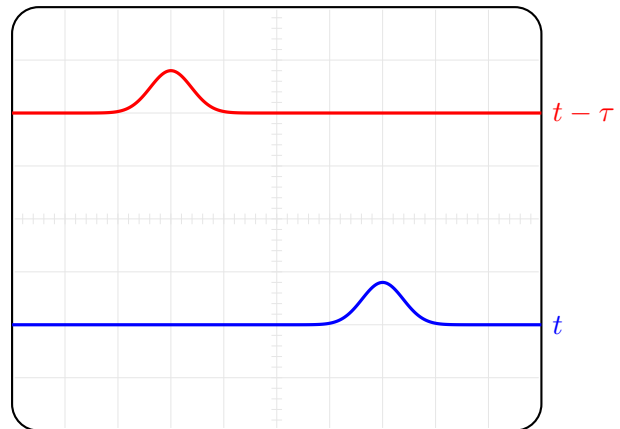
L'onde qu'on va mesurer au point x sera la même que celle émise au point S_0 mais mesuré avec un retard τ :

$$s(x, t) = s(x_0, t - \tau)$$

Ce retard temporel τ représente le temps qu'a mis l'onde pour aller de la source, situé au point x_0 , au point M , abscisse x . Donc :

$$\tau = \frac{x - x_0}{c}$$

$$\text{Ainsi : } s(x, t) = s(x_0, t - \frac{x - x_0}{c}).$$



Méthode en DS. Propagation d'une onde

Pour trouver l'expression d'une onde dans tout l'espace, on propage l'onde depuis un point où on connaît son expression, typiquement la source.

On prend comme référence la source S_0 située en x_0 on trouve finalement que

$$s(x, t) = s(0, t - \frac{x - x_0}{c})$$

Or l'onde au niveau de la source est égal au signal émis $s(0, t) = \mathcal{S}(t)$. Donc :

$$s(x, t) = s(0, t - \frac{x - x_0}{c}) = \mathcal{S}(t - \frac{x - x_0}{c})$$

Le signal s'écrit bien sous la forme d'une onde progressive qui se propage selon les x croissant.

*** **Attention !** Pour ne pas écrire d'horreurs comme $t - cx$ ou $x - \frac{t}{c}$
 $\Rightarrow$ l'HOMOGENEITE homogénéité homogeneity Homogenität est notre meilleur outil!!!

► Cas d'une propagation suivant les x décroissant

On suppose désormais que l'onde se propage suivant les x décroissant.

Le raisonnement reste le même sauf que le retard temporel sera désormais $\frac{x_0 - x}{c}$.

Astuce pratique : l'intérêt du retard temporel est qu'il est **toujours** positif. Pour ne pas se tromper quand on exprime τ on fait un **SCHEMA** de la situation.

$$\text{Ainsi : } s(x, t) = s(x_0, t - \tau) = s(x_0, t - \frac{x_0 - x}{c}).$$

$$\text{Dans notre cas on a : } s(x, t) = s(x_0, t - \frac{x_0 - x}{c}) = \mathcal{S}(t - \frac{x_0 - x}{c})$$

$$s(x, t) = \mathcal{S}(t + \frac{x}{c} - \frac{x_0}{c})$$

Comme x_0/c est une constante., on retrouve bien la forme d'une onde progressive qui se propage selon les x décroissant.

Propriété. Propagation d'une onde progressive

On considère une onde progressive se propageant suivant le sens des x . Les signaux mesurés entre deux points d'abscisses x_0 et x sont liés par :

$$s(x, t) = s(x_0, t - \tau)$$

La grandeur τ est appelé retard temporel. C'est le temps que met l'onde pour aller du point x_0 au point x :

$$\tau = \frac{|x - x_0|}{c}$$

Suivant le sens de propagation de l'onde $\tau = (x - x_0)/c$ ou $\tau = (x_0 - x)/c$.

Propriété. Forme mathématique

Une onde progressive se propageant à la célérité c selon un axe (Ox) est de la forme :

- ▷ si elle se déplace dans le sens des x croissant : $s(x, t) = f(x - ct) = F(t - x/c)$
- ▷ si elle se déplace dans le sens des x décroissant : $s(x, t) = f(x + ct) = F(t + x/c)$

🚫🚫🚫 **Attention !** Cette propriété sert à étudier la direction de propagation de l'onde une fois l'expression du signal obtenu.

Application 3 : Dans un canal d'axe (Ox) , je tape la surface de l'eau au point d'abscisse $x = 0$ créant une perturbation. La hauteur d'eau au niveau de mon doigt est :

$$h(t) = H_0 + h_0 \exp \left[-\frac{t^2}{\tau^2} \right]$$

avec H_0 la profondeur du canal au repos, $h_0 = 10\text{cm}$ et $\tau = 1\text{s}$.

Il se crée alors à la surface de l'eau une onde $s_1(x, t)$ qui se propage suivant les x croissant à la célérité $c = \sqrt{gH_0}$.

Donner l'expression de l'onde $s_1(x, t)$ en tout point et à tout instant.

2 Ondes progressives sinusoïdales

Une onde progressive sinusoïdale est une onde générée par un signal $\mathcal{S}$ sinusoïdale : $\mathcal{S}(t) = S_0 \cos \omega t$.

2.1 Propagation d'une onde sinusoïdale

Exemple 5 : L'extrémité M_0 d'une corde infiniment longue, choisit comme origine de l'axe (Ox) , est agitée sinusoïdalement. La position du point en M_0 s'écrit : $y_{M_0}(t) = A \cos(\omega t + \pi/2)$. On donne $T = 2s$.
Au bout d'un temps très long, donner l'expression de l'élongation $y(x, t)$ de la corde pour tout instant et en chaque point.

CORRECTION

Propagation de l'onde

l'onde à l'abscisse x et à l'instant t est liée à l'onde mesurée à l'origine $x = 0$ avec un retard du à la propagation

$$s(x, t) = s(0, t - \tau) \quad \text{avec } \tau = \frac{x - 0}{c}$$

donc $s(x, t) = s(0, t - x/c)$.

Onde générée au niveau de la source

au niveau de la source, l'onde est égale au signal émis : $s(0, t) = A_0 \cos \omega t + \pi/2$.

Expression de l'onde

finalement :

$$s(x, t) = A \cos(\omega(t - x/c) + \pi/2) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \pi/2\right)$$

2.2 Caractéristiques d'une onde progressive sinusoïdale

Définition. Onde sinusoïdale progressive

Une onde progressive est dite **sinusoïdale** dans le cas où le signal émis par la source S_0 est de la forme $\mathcal{S}(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$.

▷ L'onde progressive sinusoïdale se propageant suivant les x croissant a pour expression :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

▷ L'onde progressive sinusoïdale se propageant suivant les x décroissant a pour expression :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

ω et k sont deux réels positifs appelés pulsation et vecteur d'onde.

Expérience 1 : Un diapason est un instrument qui émet une note pure, c'est-à-dire que le signal sonore $\mathcal{S}$ émis est sinusoïdal de fréquence f donnée. L'onde acoustique générée est une onde progressive sinusoïdale.

💡💡💡 **Attention !** Le signe devant k détermine la direction de propagation !!!

Propriété. Lien pulsation-célérité-vecteur d'onde

La pulsation ω d'une source émettant une onde sinusoïdale progressive, la célérité c de l'onde émise et son vecteur d'onde k sont liés par :

$$c = \frac{\omega}{k}$$

On appelle c la vitesse de phase, notée parfois v_φ .

Définition. Milieu dispersif

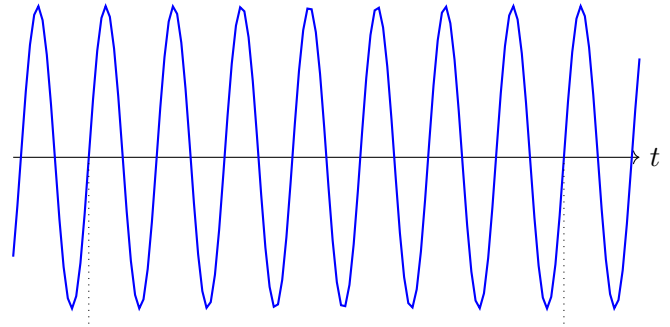
Un milieu est dit dispersif si la vitesse/vitesse de phase d'une onde sinusoïdale progressive dépend de la pulsation ω : $c = c(\omega)$.

Avec les mains :

milieu dispersif $\Rightarrow$ deux ondes de fréquence différente ne se déplace pas à la même vitesse.

2.3 Périodicité spatiale et périodicité temporelle**► Notion de périodicité spatiale**

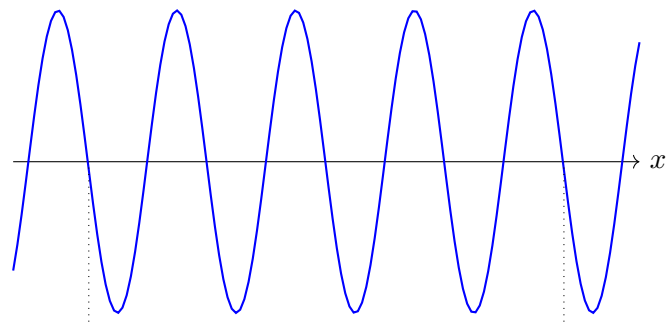
On réalise une représentation temporelle de l'onde sonore : on mesure en un point x quelconque l'évolution du signal s au cours du temps.



On mesure une période temporelle T . Cette dernière est relié à la fréquence du signal émis f , et donc ainsi qu'à la pulsation de l'onde ω :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Mais on peut réaliser également une représentation spatiale de l'onde : on prend un photographie de toute l'onde à un instant t donné.



Du fait de la forme de l'onde sinusoïdale on observe également une période mais spatiale cette fois ci : c'est la longueur d'onde, notée λ .

Astuce :

pour bien distinguer T et λ , on peut penser à la houle

▷ λ est l'écart entre deux vagues

▷ T est le temps entre le passage de deux vagues

► Lien entre λ et T

Trouver une période temporelle T :

On cherche le temps T telle que les instants t et $t + T$ donne au même point le même signal. On veut donc :

$$s(x, t) = s(x, t + T) \Rightarrow A \cos(\omega t \pm kx + \varphi) = A \cos(\omega(t + T) \pm kx + \varphi)$$

On a donc : $\omega T = 2\pi$ soit : $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Comme $\omega = 2\pi f$, on a bien $T = \frac{1}{f}$.

Trouver une période spatiale λ :

On cherche la distance λ telle qu'aux points d'abscisses x et $x + \lambda$ on mesure en tout temps le même signal. On veut donc :

$$s(x, t) = s(x + \lambda, t) \Rightarrow A \cos(\omega t \pm kx + \varphi) = A \cos(\omega t \pm k(x + \lambda) + \varphi)$$

On a donc : $k\lambda = 2\pi$ soit : $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Or vecteur d'onde pulsation sont liés via la célérité de l'onde : $c = \frac{\omega}{k}$.
On a alors :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c = Tc$$

Propriété. Lien période spatiale λ et période temporelle T

La période spatiale et temporelle d'une onde progressive sinusoïdale sont liées :

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

Astuce :

on retrouve facilement cette relation à l'aide des dimensions.

🔴🔴🔴 **Attention ! Ne pas tout confondre**

Relation temporelle :

Relation spatiale :

Relation spatio-temporelle :

$$T \leftrightarrow f \leftrightarrow \omega$$

$$\lambda (\leftrightarrow \tilde{v}) \leftrightarrow k$$

$$T \leftrightarrow k$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

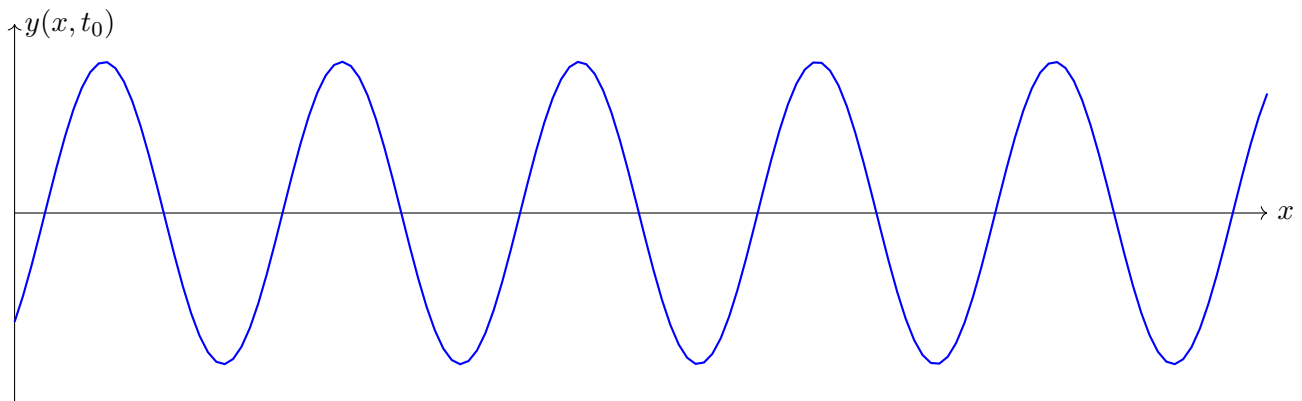
$$\lambda = \left(\frac{1}{\tilde{v}}\right) \frac{2\pi}{k}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

Application 4 :

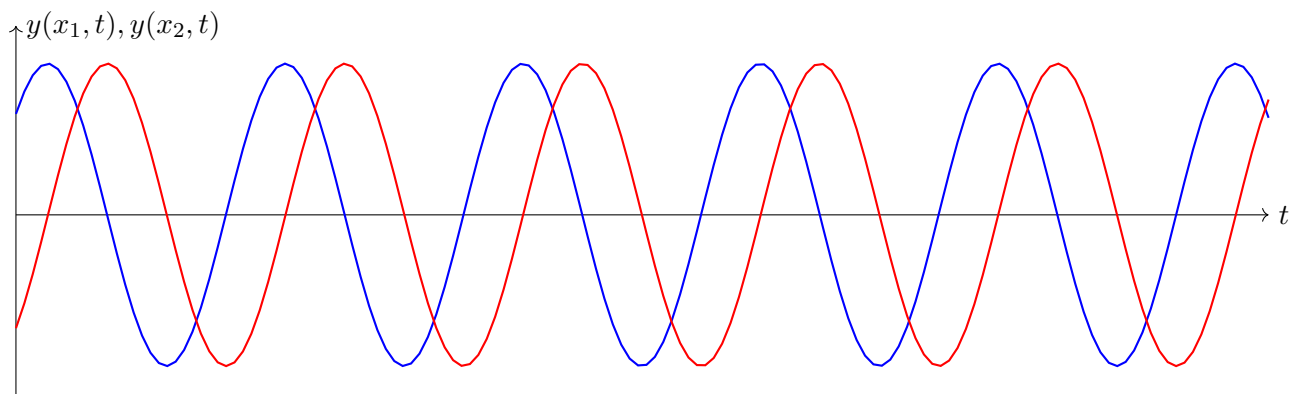
L'extrémité M_0 d'une corde infiniment longue, choisit comme origine de l'axe (Ox) est agité sinusoïdalement. La position du point en M_0 s'écrit : $y_{M_0}(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. On donne $T = 0.5s$.

L'élongation se propage sans déformation dans la direction de l'axe (Ox) de la corde avec une vitesse de phase $v_\varphi = 50cm/s$.



1. Donner l'expression de l'élongation $y(x, t)$ de la corde pour tout instant et en chaque point.
2. Donner la norme du vecteur d'onde en fonction de ω et v_φ .
En déduire l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de T et v_φ . Faire l'application numérique.
3. Pour cette question seulement, on considère que le nombre d'onde k dépend de la pulsation ω selon : $k(\omega) = a\omega + b$.
 - ▷ Donner les dimensions de a et b
 - ▷ Donner l'expression de la vitesse de phase.
 - ▷ Entre deux ondes de fréquences f_1 et f_2 , avec $f_1 < f_2$, laquelle de ces deux ondes se propagera le plus vite ?

On considère deux points d'abscisses x_1 et $x_2 > x_1$. Les profils d'élongation au cours du temps aux abscisses x_1 et x_2 sont représentés ci-dessous.



4. Lequel des deux signaux est en avance ? En déduire qui est le plus grand entre x_1 et x_2 .
5. Donner l'expression du retard τ dû à la propagation entre le signal enregistré en x_2 et celui en x_1 en fonction de x_1 , x_2 et v_φ .
6. En déduire l'expression du déphasage $\Delta\varphi$ du signal en x_1 par rapport au signal en x_2 en fonction de T , x_1 , x_2 et v_φ .
7. Pour quelles distances d entre x_2 et x_1 le signal en x_2 est-il en phase avec le signal en x_1 ? Que vaut la plus petite de ces distances ?
Retrouver alors la relation entre λ et T .
8. Pour quelles distances d entre x_2 et x_1 le signal en x_2 est-il en opposition de phase avec le signal en x_1 ?

CORRECTION

1. On propage l'onde depuis le point M_0 d'abscisse x_0 .

$$s(x, t) = s(x_0, t - \tau) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{x - x_0}{v_\varphi} \quad \text{car} \quad M_0 \rightarrow M$$

$$\text{Donc } s(x, t) = A \cos(\omega(t - \tau) + \varphi) = A \cos\left(\omega t - \omega \frac{x - x_0}{v_\varphi} + \varphi\right).$$

On prend l'origine des axes en M_0 , $x_0 = 0$ et donc :

$$s(x, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v_\varphi} x + \varphi\right)$$

2. On remarque alors par identification entre la forme obtenu (cf ci-dessus) et la forme canonique $\cos \omega t \pm kx + \Phi_0$ que
 - ▷ l'onde se propage suivant les x croissant, du au -
 - ▷ le vecteur d'onde est : $k = \omega/v_\varphi$
 Comme $k = 2\pi/\lambda$ et $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ on a $\lambda = v_\varphi T$.
3. ▷ par analyse dimensionnelle $[k] = [a][\omega]$ et $[k] = [b]$ donc $[a] = [k]/[\omega] = L^{-1}/T^{-1} = T/L$ et $[b] = L^{-1}$.
▷ la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$. Ici

$$v_\varphi = \frac{\omega}{a\omega + b} \quad \text{la vitesse dépend de la pulsation, le milieu est dispersif}$$

- ▷ On remarque que $v_\varphi[\omega]$ est une fonction croissante. Donc si $f_1 < f_2$ alors $\omega_1 < \omega_2$ et $v_\varphi[f_1] < v_\varphi[f_2]$.
L'onde de fréquence f_2 se propagera plus vite.
4. Le signal bleu atteint ses maxima en premier : il est en avance de phase. Comme l'onde se propage suivant les x croissant alors elle passe d'abord en x_1 puis en x_2 donc $x_1 < x_2$.
 5. Le retard est le temps de parcours de $x_1 \rightarrow x_2$ soit $\tau = \frac{x_2 - x_1}{v_\varphi}$.
 6. tout comme on propage les signaux, on peut propager les phases :

$$\varphi(x_2, t) = \varphi(x_1, t - \tau) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{x_2 - x_1}{v_\varphi} \quad (\text{similaire à } s(x_2, t) = s(x_1, t - \tau))$$

donc $\varphi(x_2, t) = \omega t - \frac{\omega}{v_\varphi}(x_2 - x_1) + \Phi_1$, avec Φ_1 la phase l'origine en x_1 . On a alors :

$$\varphi(x_2, t) = \underbrace{\omega t + \Phi_1}_{\text{phase en } x_1 : \varphi(x_1, t)} - \underbrace{\frac{\omega}{v_\varphi}(x_2 - x_1)}_{\text{déphasage } \Delta\varphi}$$

Donc $\Delta\varphi = -\omega\tau = -\frac{\omega}{c}(x_2 - x_1) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$ (suivant la situation une expression sera plus utile que les autres)

7. Signaux en phase : $\Delta\varphi = 2n\pi$ donc :

$$\frac{\omega}{c}(x_2 - x_1) = 2n\pi \text{ soit } x_2 - x_1 = n \frac{2\pi c}{\omega}$$

La plus petite distance est alors $x_2 - x_1 = \frac{2\pi c}{\omega}$. Or par définition, la plus petites distance séparant deux points où les signaux sont en phases ($\sim$ identique) est la longueur d'onde. Donc : $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = Tc$.

8.

9. Signaux en opposition phase : $\Delta\varphi = \pi + 2n\pi$ donc :

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \pi + 2n\pi \text{ soit } x_2 - x_1 = (n + 1/2)\lambda$$

3 Ondes stationnaires

3.1 Forme générale des ondes stationnaires

La propagation d'ondes progressives telles que toutes celles qui ont été envisagées jusqu'ici suppose que le milieu de propagation soit infini (ou tout du moins très grand).

Si on attache l'extrémité $x = L$ d'une corde vibrante, à ce point là :

1. l'onde ne peut plus continuer à avancer : elle va se réfléchir
2. la corde ne peut pas se déplacer : on impose donc au signal de s'annuler en $x = L$.

Dans de telles conditions, une onde progressive ne peut plus se propager. : se créer alors une onde stationnaire.

Définition. Onde stationnaire

Une onde stationnaire est une onde pour laquelle on ne peut pas définir de direction de propagation moyenne.

Une onde stationnaire se crée lorsque le milieu de propagation est limité.

Propriété. Forme générale d'une onde stationnaire

Une onde stationnaire peut s'écrire comme le produit d'une fonction qui dépend du temps t et d'une fonction qui dépend de la coordonnée spatiale x :

$$s(x, t) = f(x)g(t)$$

- ▷ f décrit la vibration temporelle
- ▷ g décrit l'enveloppe de l'onde

Propriété. Conditions aux limites

La forme d'une onde stationnaire est fixée en plusieurs points par les conditions de l'expérience : on dit que **des conditions aux limites** sont imposées à l'onde.

Conditions initiales

à $t = 0$, $f(x, t = 0) = F_0$.
 $\Rightarrow$ la forme de l'onde à l'instant initial

Conditions aux limites

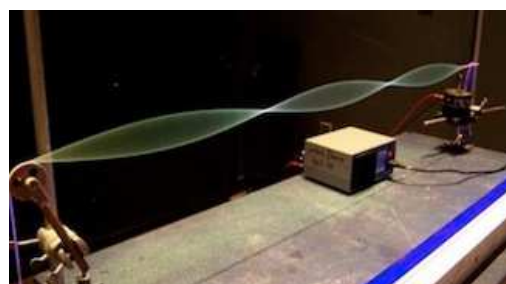
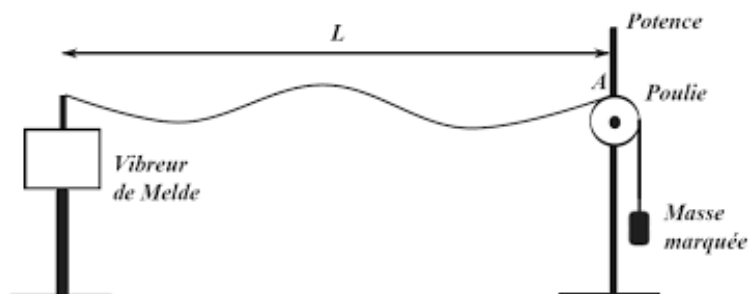
au point $x = L$, $f(t, x = L) = K$
 $\Rightarrow$ la forme de l'onde à une extrémité

Toute onde stationnaire qui existe dans le système doit satisfaire les conditions aux limites.

3.2 Expérience de la corde de Melde : vibration d'une corde attachée aux deux extrémités

► Montage

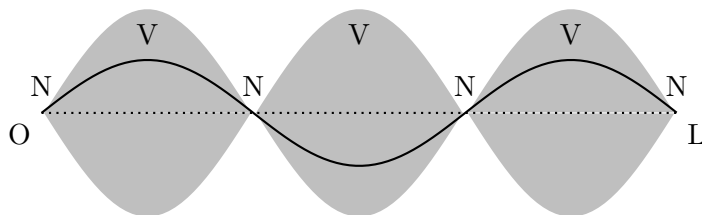
Expérience 2 : On considère l'expérience dite de la corde de Melde. On impose comme conditions aux limites deux nœuds en $x = 0$ et $x = L$.



On fait ensuite vibrer la corde à l'aide d'un vibreur : le vibreur impose à l'onde sur la corde une fréquence f . C'est de la _ _ _

► Constatation expérimentale

- ▷ pour des fréquences particulières, l'amplitude des oscillations de la corde sont importantes
- ▷ pour ces fréquences particulières, il apparaît un nombre entier de fuseaux



Définition. Nœud et ventre de vibration

- ▷ nœuds (N) : positions pour lesquelles l'onde stationnaire est nulle
 - ▷ ventres (V) : positions pour lesquelles l'onde stationnaire est maximale
- ▷ on constate également que ces fréquences sont multiples l'une de l'autre : $f_n = n f_1$.

3.3 Exercice : corde de Molde et quantification des modes de vibration

C'est, de façon détaillé, l'exercice *ULTRA-CLASSIQUE* des ondes stationnaires. Il convient de bien le maîtriser.

Essayons de comprendre analytiquement et de quantifier ce phénomène. On va chercher à expliciter la quantification des modes propres via

- ▷ une étude graphique
- ▷ une étude analytique

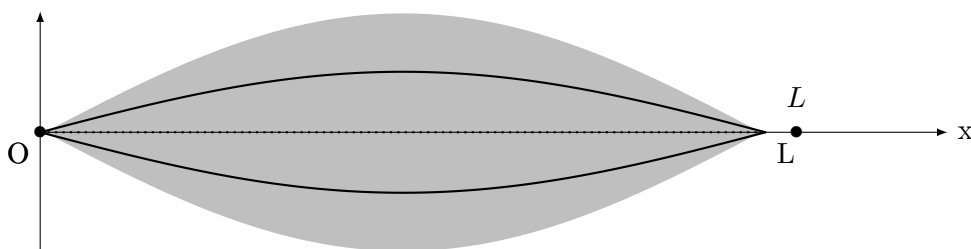
► Étude graphique

Le vibreur forçant la corde à vibrer de façon sinusoïdale, on va chercher la corde sous la forme d'une fonction sinusoïdale.

Conditions aux limites

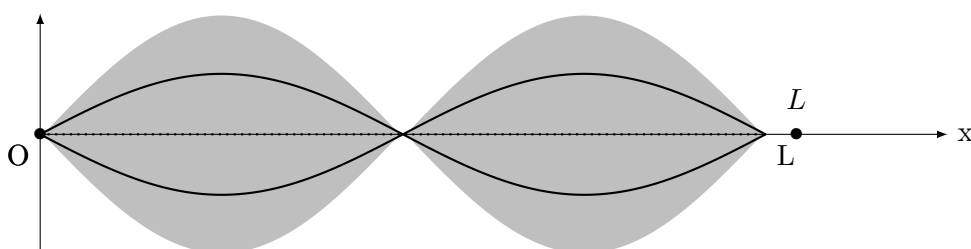
La corde est attachée au deux bouts : son amplitude doit être nulle à gauche et nulle à droite

Mode 1



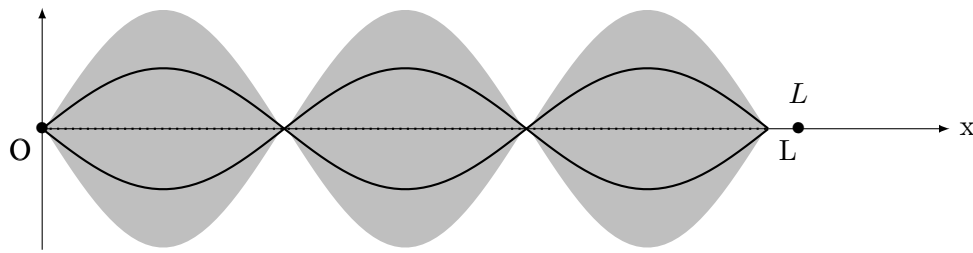
Ici $L = \frac{\lambda}{2}$ soit $\lambda = 2L$.

Mode 2



Ici $L = \lambda$ soit $\lambda = L$.

Mode 3



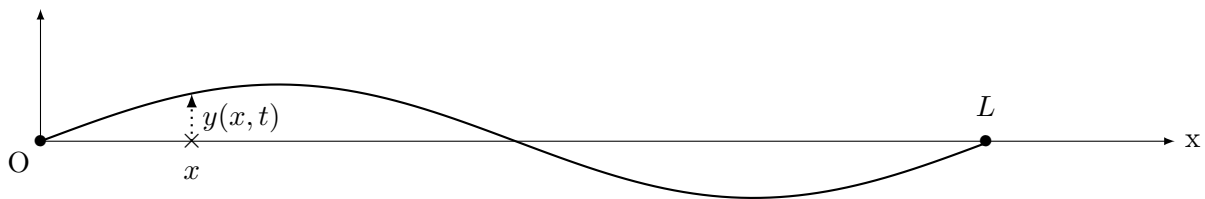
Ici $L = \lambda + \frac{\lambda}{2}$ soit $\lambda = \frac{2L}{3}$.

Généralisation On remarque alors que la longueur d'onde dépend du numéro du mode : $\lambda \rightarrow \lambda_n$.

On conjecture que $\lambda_n = \frac{2L}{n}$.

► Étude analytique

On envisage une onde stationnaire vibrant dans la corde. On note $y(x, t)$ le déplacement vertical, par rapport à la corde au repos, d'un point d'abscisse x à l'instant t . Comme c'est une onde stationnaire, on la décompose en deux : $s(x, t) = f(t)g(x)$.



Forme de l'onde

Le vibreur qui crée l'onde fournit une oscillation sinusoïdale de pulsation ω . On cherche alors la vibration temporelle sous la forme d'un signal sinusoïdal de pulsation ω :

$$f(t) = A \cos \omega t$$

Au vu de la forme de la corde, on va chercher une enveloppe de la forme $g(x) = \cos(kx + \psi)$. Donc :

$$s(x, t) = A \cos(\omega t) \cos(kx + \psi)$$

Astuce : souvent l'énoncé nous imposera/proposera cette forme.

Objectif : on cherche la phase de l'enveloppe ψ et le vecteur d'onde k .

Utilisation des conditions aux limites

Une onde stationnaire peut apparaître lorsque le milieu de propagation est **limité**. Ce sont donc les **conditions aux limites** qui vont nous permettre de trouver la forme des ondes stationnaires.

Objectif : on cherche la phase de l'enveloppe ψ et le vecteur d'onde k .

► Condition à l'extrémité gauche

Le point tout à gauche est repéré par l'abscisse $x = 0$:

$$s(x = 0, t) = 0 \implies A \cos(\omega t) \cos(\psi) = 0 \implies \cos(\psi) = 0 \implies \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

On prend arbitrairement $\psi = -\pi/2$.

L'enveloppe s'écrit alors : $\cos(kx + \pi/2) = \sin(kx)$ On a donc

$$y(x, t) = A \cos \omega t \sin(kx)$$

► **Condition à l'extrémité droite :**

Le point à droite est repéré par l'abscisse $x = L$:

$$y(x = L, t) = 0 \implies A \cos(\omega t) \sin(kL) = 0 \implies \sin(kL) = 0 \implies kL = 0[\pi] .$$

On a donc :

$$k_n = n \frac{\pi}{L}$$

3.4 Notion de quantification

Définition. Quantification

Lorsqu'une grandeur physique ne peut prendre qu'un nombre discret de valeur, on dit qu'elle est quantifiée.

Exemple 6 :

- la vitesse d'une balle :
elle peut prendre toutes les valeurs possibles entre 0 et c . Elle n'est pas quantifiée.
- la charge électrique :
une charge électrique est forcément un multiple de la charge élémentaire. Elle est quantifiée.

► **Quantification des vecteurs d'ondes**

On se rend alors compte que le nombre d'onde k ne peut prendre qu'un certain nombre de valeurs :

$$k_1 = \frac{\pi}{L} ; k_2 = 2 \frac{\pi}{L} ; k_3 = 3 \frac{\pi}{L} ; \dots$$

On dit que le nombre d'onde est **quantifié**.

La quantification des vecteurs d'onde s'illustrent bien avec celle des longueur d'onde.

► **Quantification des longueurs d'ondes : analyse graphique**

Le nombre d'onde est relié à la longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$$

On a alors $\lambda_n = \frac{2L}{n}$. On retrouve le résultat graphique.

A cause des conditions limites, la longueur d'onde de l'onde qui existe sur la corde ne peut prendre que des valeurs discrètes : elle est quantifiée.

► **Quantification des fréquences de vibration**

On a observé que l'apparition de ces nœuds de vibration n'arrive que pour des fréquences f du vibreur bien particulière.

La fréquence f , ou la pulsation ω , sont reliées au nombre d'onde k par la célérité de l'onde c .

$$\omega = 2\pi f = ck$$

Comme la célérité de l'onde est fixe et que le nombre d'onde est quantifié, la pulsation l'est aussi. Finalement :

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

Les fréquences sont également quantifiées :

- seule certaine valeur de fréquence permettent d'observer une onde stationnaire
- elles sont toutes un multiple d'une même fréquence $f_0 = \frac{c}{2L}$

C'est ce qu'on avait remarquer lors de l'expérience.

3.5 Mode propre de vibration

► Mode propre d'une corde vibrante

Définition. Mode propre de vibration

On considère une corde vibrante attachée à ses deux extrémités.

Les modes propres de vibration sont les seules ondes sinusoïdales qui peuvent exister sur la corde.

$$\text{mode propre : } y_n(x, t) = \underbrace{A_n \cos(k_n x + \varphi)}_{\text{enveloppe}} \times \underbrace{\cos(2\pi f_n t)}_{\text{partie vibrante}} \quad \text{avec } 2\pi f_n = ck_n = \frac{2\pi}{\lambda} c$$

Propriété. Quantification des modes propres

La fréquence d'un mode propre de vibration est un multiple d'une fréquence fondamentale, notée f :

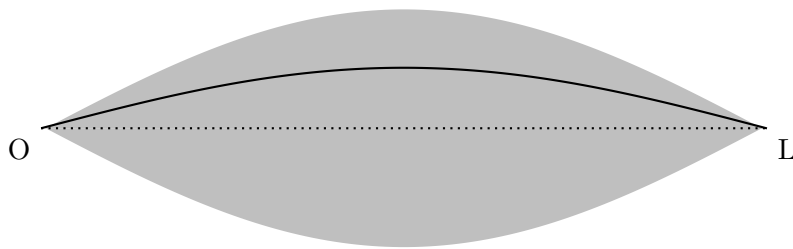
$$f_n = n f \quad \text{avec } f_1 = \frac{c}{2L}$$

Les f_n sont appelées les fréquences propres du système et f le fondamental.

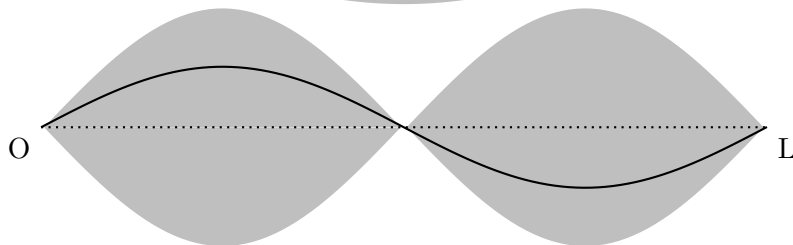
Les ondes $y_n(x, t)$ sont appelées modes propres n de vibration ou harmonique de rang n .

Seules certaines fréquences (ou certaines longueurs d'onde) peuvent donner naissance à une onde stationnaire.

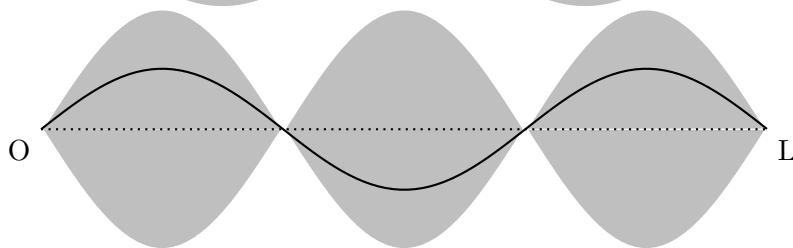
Les modes propres (ou harmoniques) représentent les différentes façon dont peut vibrer la corde.



Fondamental : $\lambda = 2L$
mode propre $n = 1$



Seconde harmonique : $\lambda = L$
(mode propre $n = 2$)

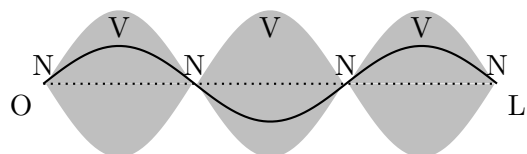


Troisième harmonique : $\lambda = \frac{2L}{3}$
(mode propre $n = 3$)

Propriété. Distance noeud-ventre

distance entre deux noeuds successifs : $\lambda_n/2$

distance entre un ventre et le noeud : $\lambda_n/4$



3.6 Mode de vibration d'une onde stationnaire quelconque

► Décomposition d'une onde : théorème de Fourier

Dans l'expérience de la corde de Melde, le vibreur permet de forcer une fréquence de vibration et donc un seul mode propre.

Lorsqu'on pince une corde et qu'on la laisse vibrer librement, il n'y a aucune sélection *a priori*.

Propriété. Onde stationnaire quelconque

Lorsqu'une onde stationnaire s apparaît dans un milieu fini et vibre de façon libre (pas de forçage extérieur sinusoïdal), elle se décompose comme la somme de tous les modes propres de vibration.

$$\text{Onde stationnaire quelconque} = \sum_n \text{Harmoniques de rang } n$$

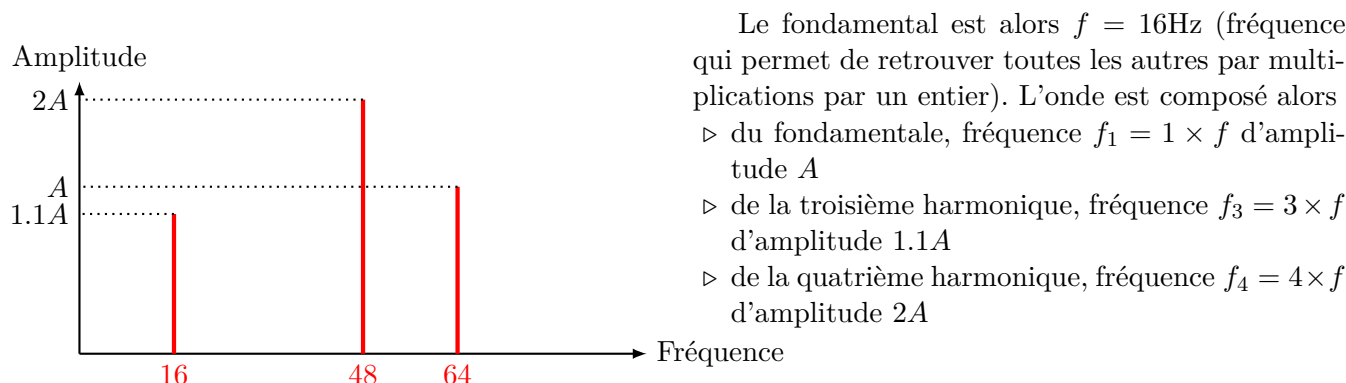
avec :

$$\text{harmonique de rang } n = A_n \cos(2\pi n f + \phi_n) \times \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

et $\lambda_n = c/f_n$.

Remarque : Cette écriture rappelle la décomposition de Fourier d'un signal périodique : c'est normal c'est le même principe !

On va alors plutôt utiliser une représentation spectrale : on va représenter par un graphe tous les modes propres de vibration qui composent l'onde stationnaire.



Propriété. Fréquence d'une vibration quelconque

Le fondamentale f (qui redonne tous les $f_n = n \times f$) représente **LA** fréquence de vibration de l'onde.

Propriété. Énergie transportée par d'une onde

Une onde transporte une énergie $\mathcal{E}$ proportionnelle à la somme au carrée de amplitudes des harmoniques qui la composent

$$\mathcal{E} \propto \sum_n A_n^2$$

Avec les mains : plus il y a d'amplitude, plus le son est fort et mélodieux.

► **Note de musique et duel piano vs clavecin**

Une note jouée par un instrument de musique provient d'une onde stationnaire :

- ▷ instrument à corde (*violon, piano, ...*) : corde vibrante
- ▷ instrument à vent (*clarinette, orgue, ...*) : colonne d'air vibrante

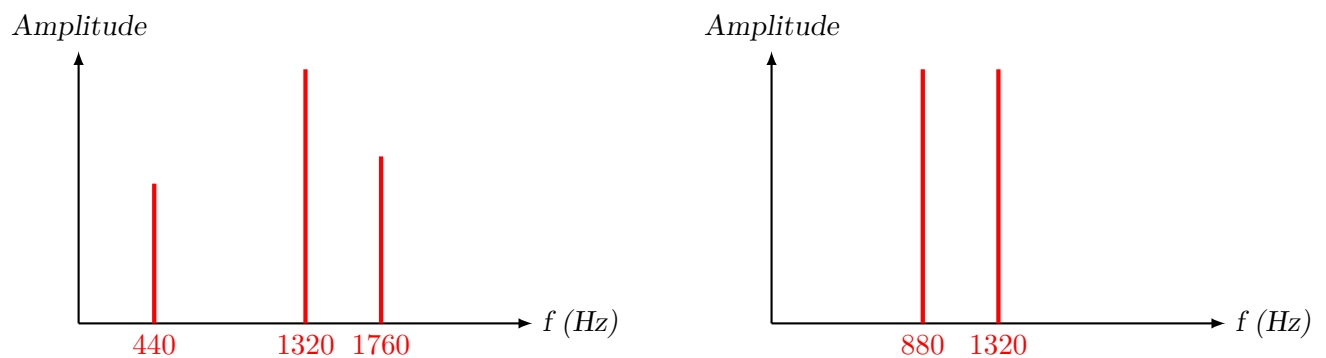
$$\text{onde vibrante} = \sum_n \text{harmoniques de rang } n$$

et les fréquences des harmoniques f_n seront $f_n = nf$, avec f le fondamentale.

Propriété. Fréquence du son

La fréquence d'un son généré par une onde stationnaire est celle du fondamentale de l'onde f .

Deux sons peuvent avoir la même fréquence ($\sim$ même note jouée) mais apparaître différent à l'oreille car ils ne sont pas composés des mêmes harmoniques.

Exemple 7 :

Les deux ondes possèdent le même fondamentale $f_0 = 440\text{Hz}$: on joue la même note (un *La*). Mais elle ne possède pas les mêmes harmoniques : elles sont jouées par deux instruments différents.

RIP le clavecin

La même note, jouée par un piano et un clavecin, produit des sensations différentes chez l'auditeur car les deux instruments n'ont pas le même nombre d'harmoniques :

- ▷ le piano, qui est à corde frappées, voit l'amplitude A_n de ses harmoniques décroître comme $1/n$
- ▷ le clavecin, qui est à corde pincée, voit l'amplitude A_n de ses harmoniques décroître comme $1/n^2$

Les harmoniques du clavecin décroissent plus rapidement que celle du piano. La note du piano possède plus d'harmonique, c'est à dire un timbre plus riche. Ce qui s'entend à l'oreille et qui a permis au piano de supplanter le clavecin.



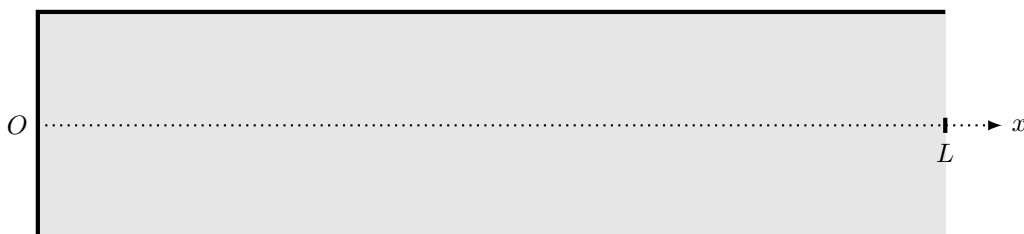
Vibration d'une colonne d'air

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (orgue, trompette, ...) vibre suivant des modes propres correspondant à des conditions aux limites données. Dans une modélisation très simple on envisage deux types de conditions aux limites :

- ▷ le tuyau est ouvert : la surpression acoustique, notée $p(x, t)$, est nulle à cette extrémité
 - ▷ le tuyau est fermé : l'amplitude de la surpression acoustique est maximale à cette extrémité
- On appelle c la vitesse du son dans l'air.

On modélise un tuyau d'orgue par un tuyau de longueur L ouvert à une de ses deux extrémités (à droite) et fermé à l'autre (à gauche).



Etude graphique

1. Représenter schématiquement les trois premiers modes propres de vibration de la surpression acoustique.
2. Donner pour chacun des modes l'expression de la longueur d'onde λ_n en fonction de L .
En déduire la longueur d'onde λ_1 du fondamentale. Exprimer alors la longueur d'onde λ_n du mode n en fonction de λ_1 et n .
3. En déduire les fréquences f_n . Montrer que seuls des harmoniques impairs sont joués avec un tel instrument.
4. Calculer la longueur minimale d'un tuyau d'orgue produisant un Do de fréquence 34Hz.
On prendra $c = 340\text{m/s}$.

Etude analytique

On suppose qu'une onde stationnaire existe dans un tel tuyau sous la forme :

$$s(x, t) = A \cos \omega t \cos(kx + \psi)$$

5.
 - ▷ En exprimant les conditions limite en $x = 0$, donner la valeur de ψ
 - ▷ En exprimant la condition limite en $x = L$, montrer que le produit kL est égal à : $kL = \pm\pi/2 + n\pi$
 - ▷ Montrer que les longueurs d'ondes sont quantifiées.
 - ▷ Pour le mode fondamental, que vaut le n ? En déduire alors l'expression de k_n , vecteur d'onde du mode propre n .
6. Retrouver la relation entre λ_n et λ_1 trouvée lors de l'étude graphique.

On perce un trou à une distance $d = L/4$ de l'extrémité gauche. Cela force en $x = L/4$ une surpression nulle.

7. Donner la nouvelle fréquence propre de vibration de la colonne d'air et en déduire la fréquence de la note jouée.
8. Expliquer avec les mains le principe d'une flute à bec (ou d'une clarinette, flute traversière ...).



Vibration d'une colonne d'air

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Etude graphique

1.

Méthode en DS. Analyse graphique

(a) Tracer les modes propres

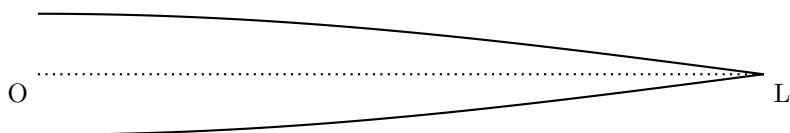
- ▷ pour tracer les modes propres, on représente graphiquement les deux conditions aux limites 🚫🚫🚫 **Attention !** il n'y en a que 4 possibles : max/max ; max/nulle ; nulle/max ; nulle/nulle
- ▷ on les relie en faisant le moins de passage possible par l'axe des abscisses : mode $n = 1$.
- ▷ on fait osciller l'onde à chaque fois une fois de plus pour trouver le mode suivant

(b) Trouver les λ_n

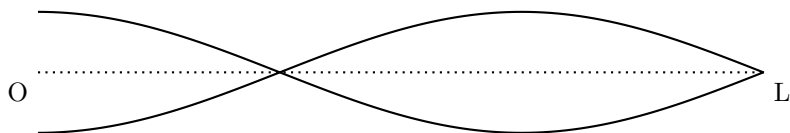
- ▷ 🚫🚫🚫 **Attention !** on exprime **EN PREMIER** L en fonction de $\lambda/2$ (distance noeud $\leftrightarrow$ noeud ; distance ventre $\leftrightarrow$ ventre) ou $\lambda/4$ (distance noeud $\leftrightarrow$ ventre)
- ▷ **PUIS** on en déduit λ_n

On va représenter les 3 premiers modes propres de vibration en fixant l'onde comme :

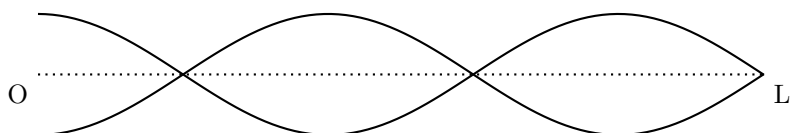
- ▷ maximale à gauche
- ▷ nulle à droite



Mode propre $n = 1$
 $L = \frac{\lambda_1}{4} \Rightarrow \lambda_1 = 4L$



Mode propre $n = 2$
 $L = \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4L}{3}$



Mode propre $n = 3$
 $L = \frac{\lambda_3}{4} + 2\frac{\lambda_3}{2} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{4L}{5}$

2. Cf ci-dessus

On remarque alors que $\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$, le fondamentale est alors $\lambda_1 = 4L$.

3. Les fréquences propres sont alors : $f_n = c/\lambda_n$ soit :

$$f_n = \frac{c}{4L} \times (2n-1) = \text{fondamentale} \times \text{un entier}$$

Le fondamental est alors $c/4L$ et on remarque que $2n-1$ est forcément un entier impair : seul les harmoniques impairs existent.

Remarque : 🚫🚫🚫 Attention ! à la définition du fondamentale !

f_n d'une harmonique = fondamentale $\times$ un entier

Exemple : si on trouve : $f_n = (n+1/2)\frac{c}{2L}$ alors le fondamentale **n'est pas** $c/2L$ car $n+1/2$ n'est pas un entier !!

Il faudra alors écrire :

$$f_n = (n+1/2)\frac{c}{2L} = (2n+1)\frac{c}{4L}$$

pour trouver le fondamentale $\frac{c}{4L}$.

4. Pour jouer un Do de fréquence 34Hz, le fondamentale des modes propres de vibration doit être de 34Hz. Donc $f_1 = c/4L = 34$ soit $L = c/4f_1 = 2,5\text{m}$ (d'où la taille des tuyaux d'orgues!)

Etude analytique**Méthode en DS. Etude analytique avec les conditions limites**

- (a) identifier les grandeurs qu'on va chercher avec les conditions limites : vecteur d'onde k (ou longueur d'onde λ) et phase à l'origine **de la partie de l'onde en x**
- (b) appliquer les CL en $x = 0$ et $x = L$ le bout à droite. Deux cas à chaque fois :
- ▷ amplitude nulle $s(\dots, t) = 0$ et donc $\cos(\dots) = 0$
 - ▷ amplitude max $s(\dots, t) = A \cos \omega t$ donc $\cos(\dots) = \pm 1$ 🚫🚫🚫 **Attention !** c'est **plus ou moins 1!!**
- Astuce* : on n'oublie pas de dessiner un petit **cercle trigonométrique** pour trouver les différentes valeurs possibles!!

5. ▷ **Condition limite en $x = 0$**

amplitude maximale donc $s(0, t) = \max$ soit $\cos(\psi) = \pm 1$ donc $\psi = k\pi$

- ▷ **Condition limite en $x = L$**

amplitude nulle donc $s(L, t) = 0$ soit $\cos(kL + \psi) = 0$ donc $kL + \psi = \pi/2 + n\pi$ soit $kL = \pi/2 + (n - k)\pi$. Comme $n - k$ est un entier on peut le réécrire comme $kL = \pi/2 + n\pi$.

- ▷ On a donc

$$k = \frac{\pi/2 + n\pi}{L} \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi/2 + n\pi}{L} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{2L}{1/2 + n}$$

🚫🚫🚫 **Attention !** $1/2 + n$ n'est pas un entier!!! On réécrit λ comme $\frac{\text{tatata}}{\text{un entier}}$ soit :

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n + 1} \quad \text{et on a bien} \quad \lambda_1 = 4L$$

- ▷ On remarque que pour le fondamental $n = 0$: il n'y a pas un lien direct entre les entiers n ou k qu'on utilise et le numéro de l'harmonique! Le rang d'une harmonique est définie par le rapport de f_n/f où f_n est la fréquence de l'harmonique et f le fondamentale (*i.e.* la fréquence de l'harmonique de rang 1).

6. OK ça marche!

7. En perçant le trou en $L/4$, on force l'onde à s'annuler en ce point. Finalement tout se passe alors comme si $L \rightarrow \frac{L}{4}$ et donc $\lambda_1 = L$ et $f_1 = c/L$. Le nouveau son joué sera alors de fréquence $c/4L$, soit 4 fois plus aiguë.

8. Un instrument à vent fonctionne sur le même principe : en bouchant ou débouchant des trous placé judicieusement sur l'instrument, le jouer de musique fait varier la longueur de la colonne d'air qui vibre et ainsi joue des sons de fréquences différentes. Les trous sont placés à des points particuliers permettant à la fréquence des sons joués de correspondre à une note "normale" de musique.

1 Ondes progressives : retour au lycée

Exercice 1 - Séismes :

Un séisme produit deux types d'ondes sismiques : les ondes P, longitudinales, qui se propagent avec la célérité c_P et les ondes S, transversales, qui se propagent avec la célérité $c_S < c_P$.

Lors d'un séisme, on commence à détecter les premières à l'instant de date t_P et les secondes à l'instant de date t_S . On appelle Δ la distance à l'épicentre du séisme.

1. Exprimer τ_P et τ_S le temps de propagation des deux ondes en fonction de Δ , c_S et c_P .
2. Exprimer $t_S - t_P$.
3. Montrer qu'on peut déduire de la mesure de $t_S - t_P$, connaissant c_P et c_S , la distance Δ entre le foyer du séisme et l'appareil. ainsi que la date du début du séisme.
4. Application numérique : on donne les vitesses $c_S = 4.50 \text{ km/s}$ and $c_P = 7.80 \text{ km/s}$. La station sismique reçoit les deux ondes avec un retard de 17.3 s.

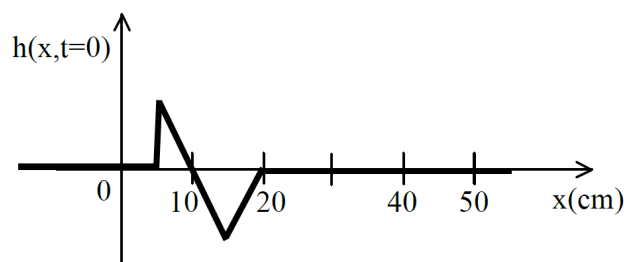
Exercice 2 - Ondes à la surface de l'eau :

Un enfant jette un caillou dans l'eau. A l'instant $t = 0$ qu'on fixe comme origine des temps, on observe l'allure de la perturbation représentée ci-contre en fonction de la position x . La perturbation se propage dans le sens des x croissants à la célérité $c = 10 \text{ cm/s}$.

1. Représenter la forme de l'onde à l'instant $t = 2 \text{ s}$.

Un poisson se situe à l'abscisse $x_0 = 50 \text{ cm}$.

2. Au bout de combien de temps le poisson perçoit-il le début de la vague ?
3. Au bout de combien de temps le poisson perçoit-il la fin de la vague ?
4. Représenter, en fonction du temps t , l'évolution de la surface de l'eau au niveau du poisson (en $x_0 = 50 \text{ cm}$).



2 Ondes progressives sinusoïdales

Exercice 3 - Onde progressive sinusoïdale :

On considère une onde progressive à une dimension dont le signal s'exprime par la formule :

$$s(x, t) = 3 \cos(2,4 \times 10^3 \pi t - 7,0 \pi x + 0,3 \pi) \quad (2.1)$$

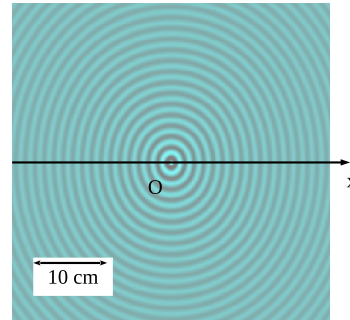
où l'on a exprimé le temps t en secondes et la distance x en mètres.

1. Quelle est la fréquence, la pulsation, le vecteur d'onde et la longueur d'onde de cette onde ?
2. Dans quel sens se propage-t-elle ?
3. Quelle est sa vitesse de propagation ?

- Exprimer la différence de phase entre deux points situés aux abscisses x et $x + d$.
- Pour quelles valeurs de d , les deux ondes sont en phases ? En opposition de phase ? En quadrature de phase ?
- Au vu de sa fréquence et de sa vitesse de propagation, de quel type d'onde pourrait-il s'agir ?

Exercice 4 - Cuve à ondes :

La figure représente la surface d'une cuve à onde éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est engendrée par un vibreur de fréquence $f = 18$ Hz. L'image est claire là où la surface de l'eau est haute, foncée là où elle est basse.



- Est-ce une onde unidimensionnelle ? Justifier.
- En mesurant sur la figure, déterminer la longueur d'onde.
- On réalise une série de mesure en faisant varier la fréquence f du vibreur. On mesure à chaque fois la longueur d'onde λ .

f (Hz)	10	15	20	25	30	40	50	60	70
λ (mm)	24	16	10	8	7	6.5	6.3	6.3	6.4

- Rappeler le lien entre la fréquence d'une onde et sa longueur d'onde.
 - Quel graphe faut-il pour vérifier expérimentalement cette loi ? Réaliser le tracé à l'aide de votre calculatrice.
 - Le milieu est-il dispersif ? On pourra distinguer deux cas de figure.
 - Dans la partie non-dispersif, donner la vitesse de l'onde.
- Le mouvement du vibreur modifie la hauteur d'eau au niveau de l'origine du repère : $h_0(t) = z_0 + A \cos 2\pi ft$.
Écrire le signal $s(r, t)$ de l'onde en un point situé à une distance r de la source.

Exercice 5 - Effet Doppler :

Une onde sinusoïdale sonore est émise par une source qui délivre un signal $S(t) = A \cos 2\pi ft$. On appelle c la vitesse du son dans l'air. La source se déplace avec une vitesse v suivant les x croissant. Elle est initialement en O .

On place un observateur en x_1 et dans un premier temps on suppose que la source mobile se trouve avant x_1 sur l'axe.

- Donner la position $x_S(t)$ de la source au cours du temps.
- Écrire le signal $s(x_1, t)$ perçu par l'observateur.
- En déduire l'expression de la fréquence f' pour l'observateur. Comparer f' et f : le son paraît plus aigu ou plus grave
- Reprendre les questions précédentes mais on suppose désormais que la source a dépassé l'observateur et s'en éloigne alors.
- Vous marchez dans la rue et un camion de pompier, sirène en marche, arrive de derrière et vous dépasse. Qu'entendez-vous ?

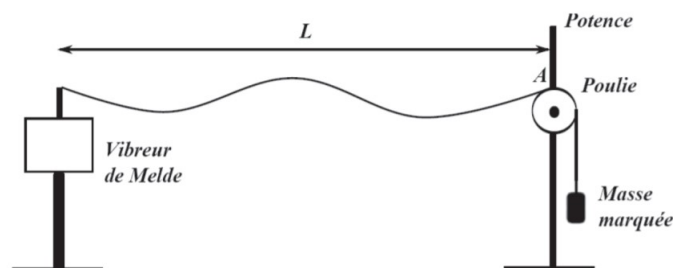
3 Ondes stationnaires

Exercices classiques, réviser le cours

Exercice 6 - Ondes statiques sur la corde de Melde :

On considère le dispositif de la corde de Melde. On appelle L la distance entre le vibreur et la poulie. Les points au niveau des extrémités de la corde sont supposés fixes.

On admet que la vitesse des ondes dans la corde est $c = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$, avec m la masse accrochée au bout de la corde et μ la masse linéique de la corde.



Initialement la corde est horizontale au repos et, pour certaine fréquence particulière d'oscillation du vibreur, apparaît des ondes stationnaires.

1. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, donner les unités de μ . Proposer alors une expression reliant la masse d'une corde m_c et la longueur l de cette dernière.

► Analyse graphique

2. Représenter graphiquement les 3 premiers modes propres de la corde $n = 1, n = 2, n = 3$. Par extrapolation, proposer un lien entre longueur d'onde λ du mode propre n et la longueur L de la corde.
3. En déduire les expressions des fréquences f_n des modes propres.

► Expression analytique des modes propres

L'élongation y associée à une onde stationnaire sur la corde s'écrit comme :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

4. Rappeler le lien entre pulsation et période, entre le vecteur d'onde et la longueur d'onde. Rappeler le lien entre pulsation et vecteur d'onde.
5. Que peut-on dire de l'élongation y au point $x = 0$ et $x = L$?
6. Montrer que $\psi = \pm\pi/2$.
On prendra par la suite $\psi = -\pi/2$.
7. Montrer que la longueur d'onde λ ne peut prendre qu'une série discrète de valeurs λ_n , que l'on exprimera en fonction de n et d'un entier n .
8. En déduire que ω ne peut prendre que des valeurs discrètes, dites pulsations propres ω_n , qu'on exprimera en fonction de L , n et c .
9. Exprimer l'élongation y_n , du mode propre n , en fonction de son amplitude A_n , de sa phase φ_n , de la pulsation du fondamentale ω_1 , ainsi que de x , L , n et t .

Exercice 7 - Fréquences propres d'un tuyau sonore :

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (flûte, clarinette, orgue ...) vibre selon des modes propres correspondant à des conditions aux limites données.

Dans une modélisation simple, on envisage deux types de conditions :

- ▷ si l'extrémité du tuyaux est ouverte, la surpression acoustique à cette extrémité est nulle
- ▷ si l'extrémité du tuyaux est fermée, l'amplitude de la surpression acoustique à cette extrémité est maximale

Données : vitesse du son dans l'air $c = 340\text{m/s}$.

1. On considère un tuyaux de longueur L ouvert à ses deux extrémités.
 - (a) Représenter schématiquement les trois premiers modes propres de la surpression dans le tuyaux.
 - (b) Déterminer les longueurs d'ondes et les fréquences de ces trois premiers modes propres.
 - (c) On veut créer un tuyau pour jouer un Do grave, fréquence 34Hz . Calculer la longueur minimale du tuyau.
2. Le tuyau est percé au niveau du centre, imposant une surpression nulle en $L/2$.
 - (a) Justifier que le précédent mode propre $n = 1$ n'est plus possible.
 - (b) Quels sont les seules modes propres restant ?
 - (c) Quelle est alors la nouvelle fréquence du son joué par le tuyau ?
3. On s'intéresse à un tuyaux fermé au niveau de l'origine et ouvert à l'autre extrémité.
 - (a) Représenter schématiquement les trois premiers modes propres de la surpression dans le tuyaux.
 - (b) Déterminer les longueurs d'ondes et les fréquences de ces trois premiers modes propres.
 - (c) Montrer qu'un tel tuyau ne comprend que les harmoniques impairs.

Dans de nombreux instruments à vent, on peut boucher ou non des trous situés à des intervalles régulier le long du tuyau. On ouvre un trou à une distance $L/3$ de l'origine $\Delta P(x = L/3, t) = 0$.

- (d) Déterminer la nouvelle fréquence du son émis par le tuyau ?

Exercice 8 - Spectre de signaux :

On donne les spectres en amplitude et en phase d'un signal temporel $s(t)$, avec s homogène à une distance.

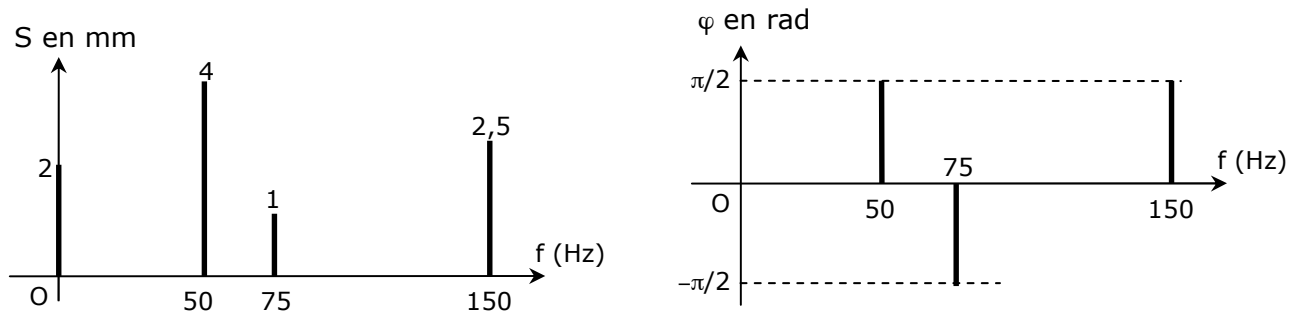


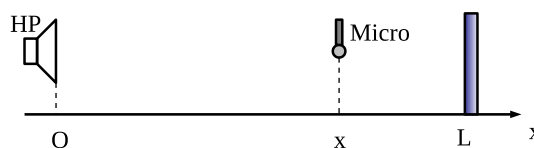
Fig. 1 – Spectre d'une note jouée au piano.

- 1.a) Donner la fréquence fondamentale f_0 du signal.
- b) Donner l'expression de $s(t)$ en fonction de f_0
- c) Donner les spectres en amplitude et en phase de la dérivée temporelle du signal.
2. Le signal se propage sous la forme d'une onde plane progressive de célérité $c=15\text{ m/s}$ vers les x croissants. Donner alors l'expression de $s(x,t)$ et calculer les longueurs d'onde présentes.

Pour aller plus loin

Exercice 9 - Superposition onde incidente/réfléchie, création d'une onde stationnaire :

On considère le montage expérimental de la figure ci-contre permettant d'étudier la réflexion d'une onde sonore sur le matériau placé à l'abscisse $x = L$.



Un haut-parleur, sur lequel un GBF envoie un signal sinusoïdal de fréquence f , crée une onde sonore incidente $a_i(x, t)$, sinusoïdale et de même fréquence f . On note c la vitesse du son dans l'air. On prend comme origine O d'un axe (Ox) la position du haut-parleur.

On prend comme origine des phases celle de l'onde émise par le haut-parleur en O, de sorte que l'on puisse écrire $a_i(0, t) = A_0 \cos(\omega t)$.

1. Donner l'expression de l'onde sonore incidente $a_i(x, t)$.
2. On considère que l'obstacle, situé en $x = L$, est parfaitement absorbant : pour une onde incidente dont la surpression en $x = L$ est $a_i(L, t)$, l'onde réfléchie $a_r(x, t)$ est telle que $a_r(L, t) = -a_i(L, t)$ à tout instant. En déduire l'expression de l'onde réfléchie $a_r(x, t)$.
3. Exprimer l'onde résultante $a(x, t) = a_i(x, t) + a_r(x, t)$ sous la forme d'un **produit** de deux fonctions sinusoïdales. De quel type d'onde s'agit-il ? Donner la position x_n des ventres en fonction de L , λ est d'un entier n .
4. Représenter les 3 premiers modes de vibrations. En déduire que, pour que cette onde existe, la fréquence du HP doit être un multiple entier d'une fréquence que l'on exprimera en fonction de L et c .
5. (*option*) Reprendre les questions précédentes mais avec un obstacle parfaitement réfléchissant où $a_r(L, t) = a_i(L, t)$

1 Ondes progressives : célérité et retard

Exercice 1 - Séismes :

1. Les ondes se propageant à vitesse constante :

$$\tau_P = \Delta/c_P \text{ et } \tau_S = \Delta/c_S.$$

2. On appelle t_0 l'instant du séisme (on peut prendre par simplicité $t_0 = 0$). On a : $t_P = t_0 + \tau_P$ et $t_S = t_0 + \tau_S$. Donc :

$$t_S - t_P = \Delta \left(\frac{1}{c_S} - \frac{1}{c_P} \right)$$

3. On a facilement $\Delta = \frac{t_S - t_P}{\frac{1}{c_S} - \frac{1}{c_P}}$.

Exercice 2 - Ondes à la surface de l'eau :

1. On repère les différents points de l'onde (front, sommet, queue, ...). Entre les instants $t_0 = 0$ et $t = 2s$, l'onde se propagera de $10 \times 2 = 20cm$. Comme le milieu est non-dispersif et non-absorbant, on a représenté l'onde identique mais décalée de 20cm.
2. Le début de la vague à $t = 0$ se situe à la position $x_f = 20cm$, c'est-à-dire à 30cm du poisson. Ce dernier percevra le début de l'onde à $t = t_0 + (x_0 - x_f)/c$ soit 3s.
3. Même raisonnement mais la fin de l'onde est à la position 5cm, soit à 45cm du poisson. La fin de l'onde passera au dessus du poisson à $t = 4,5s$.
4. Représenter, en fonction du temps t , l'évolution de la surface de l'eau au niveau du poisson (en $x_0 = 50cm$).
5. On repère les différents temps de passage de l'onde : début $t = 3s$, milieu $t = 4s$ fin $t = 4,5s$ et on peut tracer son allure.

🚨🚨🚨 **Attention !** aux axes et à l'onde "à l'envers!!".

2 Ondes progressives sinusoïdales

Exercice 3 - Corde vibrante :

1. 🚨🚨🚨 **Attention !** pas le droit de "mesurer" sur le dessin.
On compte 3 longueurs d'onde entre le vibreur et le début de l'onde. Par conséquent $t_1 = 3T$ donc $T = 20ms$.
Lien période-célérité-longueur d'onde : $c = \lambda/T$ donc $\lambda = cT = 4cm$. L'onde a alors parcouru 12cm.
2. Au début de l'onde (à droite), le déplacement est vers le bas. Au début, le vibreur s'est déplacé vers le bas.

Exercice 4 - Onde progressive sinusoïdale : 1. Une onde sinusoïdale s'écrit

$$\cos(2\pi ft \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0) \text{ ou } \cos(\omega t \pm kx + \varphi_0)$$

On identifie alors (🚨🚨🚨 **Attention ! UNITES!!!**) : $\omega = 2,4\pi \cdot 10^3 = 7,5 \cdot 10^3 rad/s$, $f = 1,2 \cdot 10^3 Hz$, $k = 7,0\pi = 22m^{-1}$ et $\lambda = 1/3,5 = 0,29m$

2. Elle s'écrit en $-kx$: propagation suivant les x décroissant.
3. Lien fréquence-vitesse-longueur d'onde : $c = \lambda f$ donc $c = 342\text{m/s}$
4. C'est la vitesse de propagation du son dans l'air. Une fréquence de 1200Hz correspond (entre autre) à la voix humaine.

Exercice 5 - Cuve à ondes :

1. L'onde se propage suivant deux directions de propagations : c'est une onde bi-dimensionnelle.
2. On mesure une dizaine de longueur d'onde et, avec l'échelle, on trouve λ .
3. (a) Lien fréquence-vitesse-longueur d'onde : $c = \lambda f$
 (b) Comme $\lambda = c/f$ pour vérifier cette relation il faut tracer λ en fonction de $1/f$.
 (c) Si on fait le graphe on réalise que pour les premières mesures, les points s'alignent suivant une droite. Mais les derniers brise "l'alignement" : pour les "basses" fréquences, on a bien une relation $\lambda = c/f$ avec c constante mais pour les "hautes" fréquences, ce n'est plus vrai. La vitesse de propagation dépend de la fréquences aux hautes fréquences. Le milieu est donc non-dispersif aux basses fréquences et dispersif aux hautes fréquences.
 (d) Mon mesure la pente et on a c .
4. Même si c'est une onde bi-dimensionnelle on propage l'onde de la même façon :

$$s(r, t) = s(0, t - \tau) \text{ avec } \tau = \frac{r}{c} \Rightarrow s(r, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Exercice 6 - Effet Doppler :

Une onde sinusoïdale sonore est émise par une source qui délivre un signal $S(t) = A \cos 2\pi f t$. On appelle c la vitesse du son dans l'air. La source se déplace avec une vitesse v suivant les x croissant. Elle est initialement en O .

On place un observateur en x_1 et dans un premier temps on suppose que la source mobile se trouve avant x_1 sur l'axe.

1. Avance à vitesse constante : $x_S(t) = vt$
2. Propagation du signal : $s(x_1, t) = s(x_S, t - \tau)$ avec $\tau = \frac{x_1 - x_S}{c}$. Donc :

$$s(x_1, t) = A \cos 2\pi f \left(t - \frac{x - vt}{c} \right) = A \cos 2\pi f \left(1 + \frac{v}{c} \right) t - \frac{2\pi f}{c} x$$

💡💡💡 **Attention !** à bien regrouper ensemble tous les termes dépendant du temps t !!

3. La fréquence est alors $f' = f \left(1 + \frac{v}{c} \right) > f$: le son paraît plus aigu.
4. On refait pareil et on trouve $f' = f \left(1 - \frac{v}{c} \right) < f$
5. Au début le camion se rapproche : le son est plus aigu. Puis el camion s'éloigne, le son paraît plus grave. D'où le niooooooooooooooooooon (à imaginer)

3 Ondes stationnaires

Exercices classiques, réviser le cours

Exercice 7 - Ondes statiques sur la corde de Melde : Cf cours : c'est vraiment tout pareil ...

Exercice 8 - Fréquences propres d'un tuyau sonore : Cf cours : c'est vraiment tout pareil ...

Pour aller plus loin

Exercice 9 - Superposition onde incidente/réfléchi (*):

Un haut-parleur, sur lequel un GBF envoie un signal sinusoïdal de fréquence f , crée une onde sonore incidente $a_i(x, t)$, sinusoïdale et de même fréquence f . On prend comme origine O d'un axe (Ox) la position du haut-parleur.

On prend comme origine des phases celle de l'onde émise par le haut-parleur en O, de sorte que l'on puisse écrire $a_i(0, t) = A_0 \cos(\omega t)$.

1. Propagation : $a_i(x, t) = A_0 \cos(\omega t - \omega/c x)$

2. $a_i(L, t) + a_r(L, t) = 0$ donc $a_r(L, t) = -A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}L\right) = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}L + \pi\right)$

Propage depuis $x = L$: $a_r(x, t) = A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x - 2\frac{\omega}{c}L + \pi\right)$

3. On utilise $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ et on trouve :

$$a(x, t) = 2A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}L + \pi/2\right) \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \frac{\omega}{c}L + \pi/2\right)$$

Il s'agit alors d'une onde de la forme $f(t)g(x)$: onde stationnaire !

On cherche x_n où $a(x_n, t) = \max$ donc

$$\frac{2\pi}{\lambda}x_n - \frac{2\pi}{\lambda}L + \pi/2 = n\pi \text{ soit } x_n = \frac{\lambda}{4}(2n-1) - L$$

4 Spectres

Exercice 10 - Spectre de signaux :

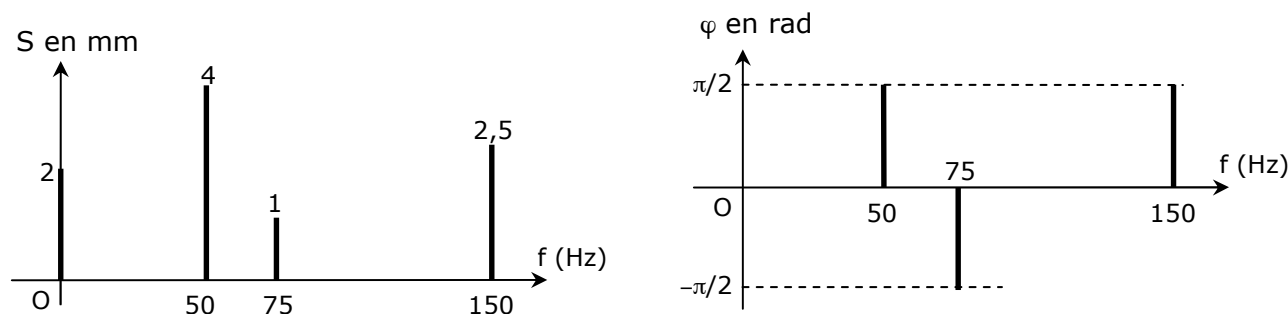


Fig. 1 – Spectre d'une note jouée au piano.

1.a) $f_0 = 25 \text{ Hz}$

b) $s(t) = 2 + 4 \cos(4\pi f_0 t + \pi/2) + 1 \cos(6\pi f_0 t - \pi/2) + 2,5 \cos(12\pi f_0 t + \pi/2)$ c) Dériver un signal $\cos \omega t = -\omega \sin \omega t = \omega \cos \omega t + \pi/2$

$$s'(t) = 2 + 16\pi f_0 \cos(4\pi f_0 t + \pi) + 6\pi f_0 \cos(6\pi f_0 t + \pi/2) + 30\pi f_0 \cos(12\pi f_0 t - \pi/2)$$

2. On propage chaque signal sinusoïdal à partir de $s(t)$ (en enlevant la composante continue) :

$$s(x, t) = 4 \cos\left(4\pi f_0 t - \frac{4\pi f_0}{c}x + \pi/2\right) + 1 \cos\left(6\pi f_0 t - \frac{6\pi f_0}{c}x - \pi/2\right) + 2,5 \cos\left(12\pi f_0 t - \frac{12\pi f_0}{c}x + \pi/2\right)$$

Table des matières

1	Interférences entre deux sources synchrones : ondes mécanique	3
1.1	Mise en évidence expérimentale.	3
1.2	Déphasage et différence de marche	4
1.3	Interférences constructives et destructives	7
1.4	Exemple d'interférences d'ondes sonores	8
2	Interférences entre deux sources lumineuses	11
2.1	Intensité moyenne et chemin optique.	11
2.2	Expérience des fentes d'Young : répartition de l'intensité lumineuse.	14
3	Deux autres phénomènes d'interférences	18
3.1	Phénomènes de battements	18
3.2	La diffraction	19



Savoirs ♥

- ▷ ♥ **Phénomène d'interférences d'ondes mécaniques**
 - ▷ définition d'un phénomène d'interférence
 - ▷ notion de sources synchrones et condition d'interférences
 - ▷ déphasage entre deux ondes et notion de différence de marche ; lien entre les deux
 - ▷ condition d'obtention d'interférences constructives
 - ▷ condition d'obtention d'interférences destructives
- ▷ ♥ **Interférence lumineuse**
 - ▷ condition d'interférences lumineuses
 - ▷ notion de chemin optique et lien avec la différence de marche
 - ▷ principe de l'expérience des trous d'Young
- ▷ ♥ **Phénomènes de battement**
 - ▷ condition d'obtention du phénomène
 - ▷ double périodicité du signal et lien graphique
 - ▷ expression de la fréquence rapide et de la fréquence de l'enveloppe

Savoir Faire

-  *Utiliser le phénomène de battement pour mesurer une différence de fréquences à partir d'un enregistrement*
-  **Interférences à deux ondes mécaniques**
 - ▷ Etablir la différence de marche de deux ondes mécaniques en un point
 - ▷ Trouver les sites d'interférences constructives et destructives
 - ▷ Obtenir l'amplitude de l'onde résultante à l'aide du déphasage entre les deux signaux
-  **Interférences d'ondes lumineuses**
 - ▷ exprimer le chemin optique d'une onde lumineuse
 - ▷ exprimer la différence de marche entre deux ondes lumineuses
 - ▷ utiliser la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition de l'intensité lumineuse

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié deux types d'ondes : les ondes progressives (qui avancent dans une direction) et les ondes stationnaires (qui font du surplace). Nous avons pu voir que ces modélisations permettent de décrire des phénomènes très variés : vibration d'une corde, propagation du son, lumière, ...

Dans ce chapitre nous allons étudier le phénomène caractéristiques des ondes : **les interférences**.

Définition. Interférence

Un phénomène d'interférence apparaît lors de la superposition de plusieurs ondes. On observe alors que l'amplitude de l'onde résultante n'est pas la somme des amplitudes des différentes ondes.

Propriété. Nature ondulatoire

Un phénomène physique possède une nature ondulatoire si il peut mener à un phénomène d'interférences.

1 Interférences entre deux sources synchrones : ondes mécanique

Ondes mécaniques : tout sauf la lumière ! Son, vagues, vibration corde, ...

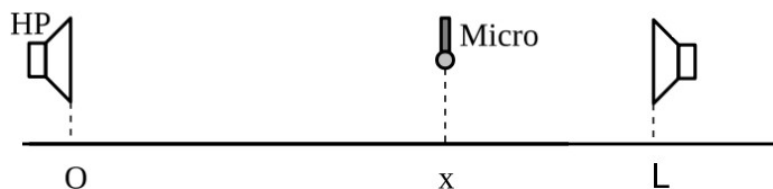
Propriété. Superposition des ondes

Soient deux ondes de même nature $s_1(x, t)$ et $s_2(x, t)$. L'onde totale $s_{\text{tot}}(x, t)$ observée dans le milieu est la somme de s_1 et s_2 :

$$s_{\text{tot}} = s_1 + s_2$$

1.1 Mise en évidence expérimentale

Expérience 1 : Interférences d'onde sonore :



Deux émetteurs à ultrason sont placés à une même distance d'un récepteur. En observant le signal sur un oscilloscope, on remarque que l'amplitude du signal reçu diminue lorsqu'on rapproche le récepteur d'un des émetteurs. Si on continue de le rapprocher, on remarque que l'amplitude ré-augmente de nouveau, puis re-diminue et ainsi de suite.

Définition. Sources synchrones

Des sources synchrones sont deux sources vibrant à la **même fréquence**.

Propriété. Interférences et sources synchrones

Pour observer des interférences, les ondes doivent provenir de deux sources synchrones (ou de la même source).

1.2 Déphasage et différence de marche

► Propagation à partir d'une source

On considère une source (haut parleur) situé en O , origine d'un axe (Ox) qui émet un signal sinusoïdale de pulsation ω : $\mathcal{S}(t) = A \cos(\omega t + \Phi_0)$.
On note c la vitesse du son dans l'air.



On va chercher à propager **la phase**.

L'onde progressive créée sera une onde progressive sinusoïdale qui se propage. La phase au niveau du point M est

$$\varphi(t) = \underbrace{(\omega t + \Phi_0)}_{\text{phase de la source}} - \underbrace{\left(\frac{2\pi}{\lambda} SM\right)}_{\text{déphasage dû à la propagation}}$$

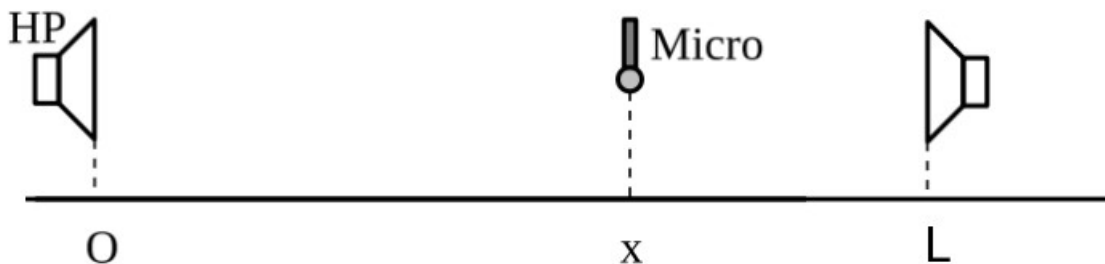
► Superposition de deux ondes

On place désormais au point d'abscisse $x = L$ une deuxième source, synchrone avec la première.

▷ source située en S_1 , $x_1 = 0$: $\mathcal{S}_1(t) = A \cos(\omega t + \Phi_G)$

▷ source située en S_2 , $x_2 = L$: $\mathcal{S}_2(t) = A \cos(\omega t + \Phi_D)$

Chaque source 1 et 2 va fournir une onde sinusoïdale progressive s_1 et s_2 . Essayons d'estimer la phase de chacune.



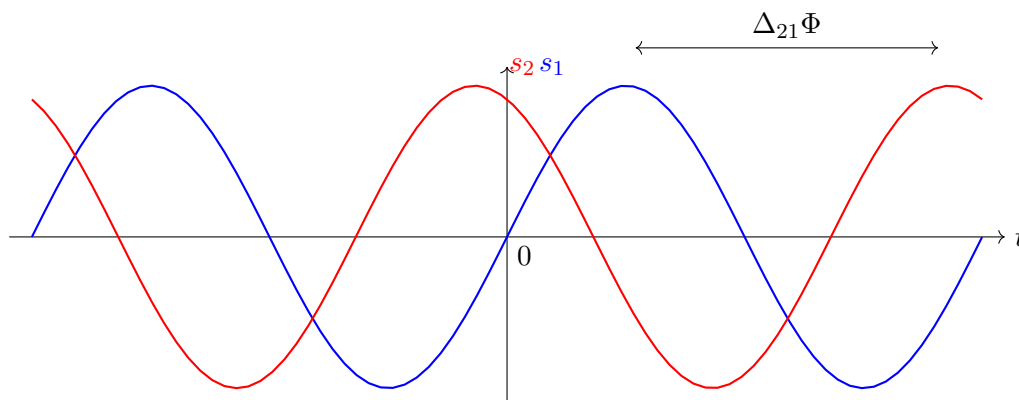
▷ Onde arrivant de la gauche :

$$\varphi_1 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M + \Phi_G$$

▷ Onde arrivant de la droite :

$$\varphi_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M + \Phi_D$$

Le signal obtenu au niveau du micro sera la somme des deux ondes.



Deux cas particuliers :

▷ les deux signaux sont en phase :

$$\Delta_{21}\Phi = 2n\pi$$

Ils "travaillent" ensemble, créant un signal dont l'amplitude est la somme de l'amplitude de chaque signal.

▷ les deux signaux sont en opposition de phase :

$$\Delta_{21}\Phi = n\pi$$

Ils "travaillent" ensemble, créant un signal dont l'amplitude est la différence de l'amplitude de chaque signal.

► Déphasage entre deux ondes

Pour chaque onde :

▷ onde issu de la source 1 :

$$\Phi_1(t) = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M + \Phi_G$$

▷ onde issu de la source 2 :

$$\Phi_2(t) = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M + \Phi_D$$

Finalement :

$$\Delta_{21}\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M + \Phi_G - \Phi_D$$

$$\Delta_{21}\Phi = \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M - S_1 M)}_{\text{déphasage du à la propagation}} + \underbrace{\Phi_G - \Phi_D}_{\text{déphasage entre les sources}}$$

► Différence de marche

Définition. Différence de marche

La différence de marche δ entre deux ondes s_1 et s_2 en un point M du plan est égale à :

$$\delta = S_2 M - S_1 M$$

avec S_1 et S_2 les sources qui ont émis les ondes 1 et 2.

🔴🔴🔴 **Attention !** La différence de marche dépend du point du plan M où on se place : $\delta = \delta(M)$!!!

Propriété. Déphasage et différence de marche

Le déphasage $\Delta_{21}\Phi$ en un point M de l'espace entre deux ondes 1 et 2 émise par deux source S_1 et S_2 est :

$$\Delta_{21}\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \Delta\Phi_0$$

avec

▷ δ la différence de marche : $\delta = S_2 M - S_1 M$.

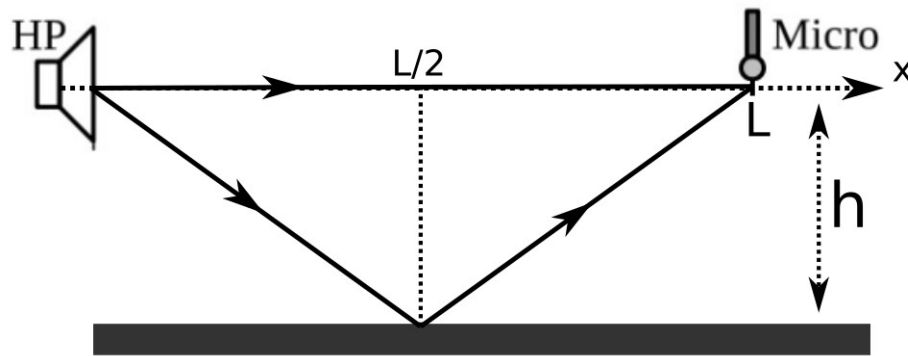
▷ $\Delta\Phi_0$: la différence des phases à l'origine des sources.

Cas particulier :

Si les deux sources ont la même phase à l'origine OU si les deux ondes proviennent de la même source : $\Delta\Phi_0$ et donc :

$$\Delta_{21}\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

Exemple 1 : On prend deux ondes provenant de la même source. Mais l'une des deux rebondit contre un mur avant d'arrivée au niveau du microphone.



1. estimer la différence de marche δ entre les deux ondes
2. estimer le déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux ondes

CORRECTION

SCHEMA

1. $\triangleright$ Chemin parcouru par l'onde 1 : $SM = L$
 $\triangleright$ Chemin parcouru par l'onde 2 : $SM = SI + IM$ avec I le point où l'onde rebondit. Par symétrie $SI = IM$.

Il faut trouver $SI \Rightarrow 2$ choix : géométrie ou repère ! Ici pas de repère donc géométrie **DU TRIANGLE RECTANGLE!!!!**

- $\triangleright$ un angle et une longueur $\Rightarrow$ trigonométrie
- $\triangleright$ deux longueurs $\Rightarrow$ Pythagore

Ici $SI = \sqrt{(L/2)^2 + h^2}$. Finalement :

$$\delta = 2\sqrt{(L/2)^2 + h^2} - L = L \left(\sqrt{1 + 4\frac{h^2}{L^2}} - 1 \right)$$

2. Les deux ondes proviennent de la même source : $\Delta\Phi_0 = 0$ donc

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} L \left(\sqrt{1 + 4\frac{h^2}{L^2}} - 1 \right)$$

1.3 Interférences constructives et destructives

► Les interférences constructives

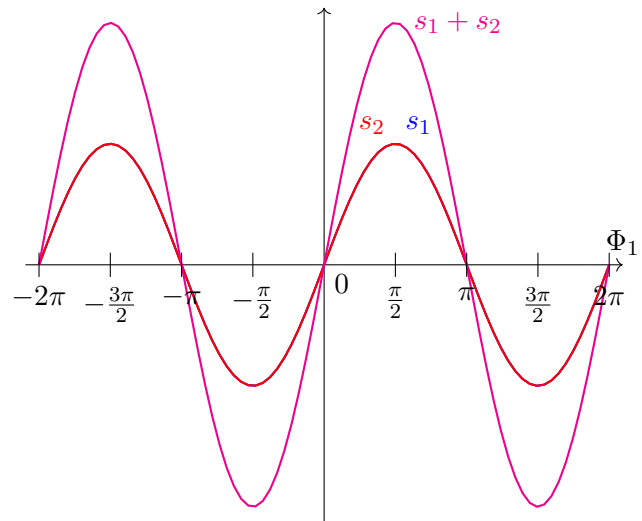
Définition. Interférences constructives

Les deux signaux sinusoïdaux interfèrent et l'onde résultante est d'amplitude maximale.

Conditions d'obtentions :

- ▷ Les deux ondes qui interfèrent proviennent de deux sources synchrones
- ▷ Le déphasage entre les deux ondes est

$$\Delta_{21}\Phi = 2n\pi .$$



Cas particulier :

Si les deux sources ont la même phase à l'origine alors les interférences constructives s'obtiennent si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde :

$$\delta = n\lambda .$$

► Les interférences destructives

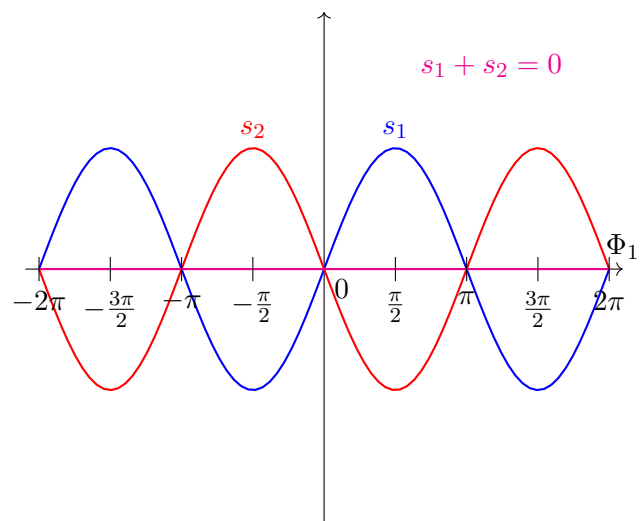
Définition. Interférences destructives

Les deux signaux sinusoïdaux interfèrent et l'onde résultante est d'amplitude minimale.

Conditions d'obtentions :

- ▷ Les deux ondes qui interfèrent proviennent de deux sources synchrones
- ▷ Le déphasage entre les deux ondes est

$$\Delta_{21}\Phi = \pi + 2n\pi .$$



Cas particulier :

Si les deux sources ont la même phase à l'origine alors les interférences constructives s'obtiennent si la différence de marche est un multiple de la longueur d'onde :

$$\delta = (n + \frac{1}{2})\lambda .$$

► (Pour aller plus loin) Amplitude de l'onde résultante

On écrit les deux ondes en terme de phase :

$$s_1(t) = S_0 \cos \phi_1(t) \text{ et } s_2(t) = S_0 \cos \phi_2(t)$$

En introduisant le déphasage $\Delta_{21}\phi$ on a : $s_2(t) = S_0 \cos(\phi_1(t) + \Delta_{21}\phi)$.

L'onde résultante est la somme des deux ondes :

$$s_{tot}(t) = s_1(t) + s_2(t) = S_0 \cos \phi_1(t) + S_0 \cos(\phi_1(t) + \Delta_{21}\phi) =$$

♡ *Instant math* ♡ :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Soit :

$$s_{tot}(t) = 2S_0 \cos\left(\frac{\Delta_{21}\phi}{2}\right) \times \cos\left(\phi_1(t) + \frac{\Delta_{12}\Phi}{2}\right)$$

Propriété. Amplitude de l'onde résultante

Si deux sources synchrones de même amplitude S_0 interfèrent en un point, l'amplitude de l'onde résultante est :

$$S_{tot} = 2S_0 \cos \frac{\Delta_{21}\phi}{2} = 2S_0 \cos \frac{\pi}{\lambda} \delta$$

avec $\Delta_{21}\phi$ le déphasage entre les deux ondes en ce point et δ la différence de marche.

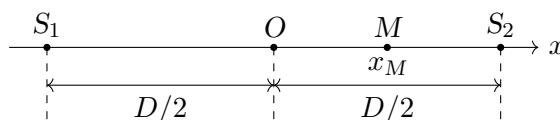
💣💣💣 **Attention !** Les interférences destructives ou constructives sont une situation pas un instant t !

1.4 Exemple d'interférences d'ondes sonores

Application 1 :

Deux petits haut-parleurs sont disposés à une distance $D = 1$ m l'un de l'autre le long d'un axe Ox , symétriquement par rapport à O . On les alimente avec un même signal sinusoïdal de fréquence $f = 500$ Hz et d'amplitude A_0 .

On place également sur cet axe un micro au point M d'abscisse x_M , entre les deux haut-parleurs. On visualise sur un oscilloscope la tension délivrée par le microphone après l'avoir amplifiée.



1. Les deux haut-parleurs sont-ils des sources synchrones ? Ont-ils la même phase à l'origine ?
2. Exprimer l'onde s_1 , émise par la source 1 au point M . Même question pour s_2 , l'onde émise par S_2 .
3. Exprimer la différence de phase entre s_1 et s_2 au point M . On fera apparaître δ , la différence de marche.
4. Quelle est la nature (destructive ou constructive) des interférences au point O ?
5. Exprimer la position des maxima et des minima d'amplitude de l'intensité le long de l'axe Ox en fonction de la longueur d'onde λ .
6. Lorsqu'on déplace le microphone le long de l'axe Ox en partant du point O , l'amplitude du signal commence par décroître, puis elle augmente avant de passer par un maximum en $x_1 \approx 340$ mm. Interpréter cette observation et en déduire la vitesse du son dans l'air à la température de l'expérience.
7. Combien y-a-t-il de maxima entre les sources ?
8. On suppose dans cette question que la source S_2 délivre un signal de même pulsation que S_1 mais déphasé de φ_0 .
 - ▷ Donner la valeur de φ_0 pour observer des interférences destructives en O
 - ▷ Donner alors la position du site d'interférence constructive le plus proche de O .

Méthode en DS. Résoudre un exercice d'interférences d'ondes mécanique

1. **Schéma** du dispositif où on fait apparaître les deux trajets des ondes
2. Sources synchrones ?
3. **Différence de phase** au point étudié :

$$\Delta\varphi = \Delta\Phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

- ▷ $\Delta\Phi_0$ la différence des phases à l'origine entre les sources $\Delta\Phi_0 = \Phi_{0,2} - \Phi_{0,1}$
- ▷ δ la différence de marche $\delta = S_2M - S_1M$

4. **Différence de marche**

- ▷ de la géométrie (*triangles rectangles*)
- ▷ les coordonnées (1D : axes ou 2D : cf *trous d'Young*)

5. **Conditions d'interférences :**

- ▷ constructives : $\Delta\varphi = 2n\pi$
- ▷ destructives : $\Delta\varphi = \pi + 2n\pi$

On cherche ensuite une condition sur nos coordonnées.

on peut ensuite lire la première question de l'exercice ...

CORRECTION

1. Les deux sources sont alimentées par le même signal : elles ont donc la même fréquence, $\sim$ sources synchrones, et la même phase à l'origine, $\Delta\Phi_0 = 0$.
2. On propage l'onde s_1 depuis la source S_1 :

$$s_1(x_M, t) = s_1(-D/2, t - \tau) \text{ avec } \tau = \frac{x_M - (-D/2)}{c} \Rightarrow s_1(x_M, t) = A_0 \cos 2\pi f \left(t - \frac{x_M + D/2}{c} \right)$$

$$\text{On a alors } s_1(x_M, t) = A_0 \cos \underbrace{2\pi f t - \frac{2\pi f}{c}x_M - \frac{2\pi f D}{c} \frac{D}{2}}_{\varphi_1}.$$

$$\text{De la même façon on a pour } s_2 : s_2(x_M, t) = A_0 \cos \underbrace{2\pi f t + \frac{2\pi f}{c}x_M - \frac{2\pi f D}{c} \frac{D}{2}}_{\varphi_2}.$$

3. On a donc : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\Delta\varphi = \left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c}x_M - \frac{2\pi f D}{c} \frac{D}{2} \right) - \left(2\pi f t + \frac{2\pi f}{c}x_M - \frac{2\pi f D}{c} \frac{D}{2} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda}2x_M$$

On retrouve bien la différence de marche $S_2M - S_1M = (D/2 + x_M) - (D/2 - x_M) = 2x_M$.

💣💣💣 **Attention !** Dans un exercice, si rien ne nous ait demandé on donne directement l'expression du déphasage $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \Delta\Phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

4. Au niveau du point O $x_M = 0$ et donc $\delta = 0$ et $\Delta\varphi = 0$. C'est un multiple de 2π : on a des interférences constructives.

5. ▷ **Maxima d'amplitude** x_n

interférences constructives donc $\Delta\varphi = 2n\pi$ donc : $\frac{2\pi}{\lambda}2x_n = 2n\pi$ soit $x_n = n\lambda/2$.

On peut tester les premières valeurs : 0, $\pm\lambda/2$, $\pm\lambda$, ...

- ▷ **Minima d'amplitude** $\tilde{x}_n$

interférences destructives donc $\Delta\varphi = \pi + 2n\pi$ donc : $\frac{2\pi}{\lambda}2\tilde{x}_n = \pi + 2n\pi$ soit $\tilde{x} = (n + 1/2)\lambda/2$.

On peut tester les premières valeurs : $\pm\lambda/4$, $\pm3\lambda/4$, ...

6. On part de 0 : maximum d'amplitude. Le signal décroît jusqu'à $\tilde{x}_1 = \lambda/4$, minimum d'amplitude. Il réaugmente de nouveau jusqu'à $x_1 = \lambda/2$, maximum d'amplitude.
Donc $x_1 = \lambda/2 = 340\text{mm}$ d'où $\lambda = 680\text{mm}$.

Si j'ai λ j'ai c/f via $c = \lambda f$. Ici $f = 500\text{Hz}$ donc $c = 340\text{m/s}$.

7. On remarque que $x_1 = 340\text{mm}$, $x_2 = 680\text{mm}$, $x_3 = 1020\text{mm} > D$. Avec x_0 il y a 5 maxima.

8. En $x = 0$, le déphasage est $\Delta\varphi = \Delta\Phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ et $\delta = 0$. Donc $\Delta\varphi = \varphi_0$.

Pour avoir des interférences destructives $\varphi_0 = \pi + 2n\pi$.

9. Les sites d'interférences constructives x_n sont tels :

$$\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}2x_n = 2n\pi \Rightarrow x_n = -n\lambda/2 + \frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda$$

Le plus petit est alors pour $n = 0$, soit $\frac{\varphi_0}{2\pi}\lambda$.

*** **Attention !** Point méthode !

Ici les premières questions nous demandait d'exprimer les ondes. Dans un exercice d'interférences "purs" (~ sans question sur la propagation des ondes), avant même de lire la première question :

2 Interférences entre deux sources lumineuses

La lumière est une onde, il est donc possible d'observer des interférences lumineuses. Néanmoins, du fait du mode de fonctionnement des détecteurs lumineux et de la fréquences des ondes lumineuse, il est nécessaire d'introduire un autre formalisme.

2.1 Intensité moyenne et chemin optique

► Appareil de mesure et puissance moyenne

Définition. Mesure d'un détecteur de lumière

Un détecteur de lumière mesure l'intensité I d'une onde lumineuse moyenné sur un temps τ .
Typiquement : $\tau \sim 10^{-12}\text{s}$.

Problème :

La fréquence typique de vibration de la lumière est de $f \sim 10^{15}$ Hz. L'onde lumineuse oscille 100 fois au cours de la mesure.

⇒ un détecteur de lumière ne peut mesurer la valeur de l'onde lumineuse en un instant t : il ne mesure que la valeur moyenne de l'intensité lumineuse en un point.

Propriété. Interférences lumineuses et intensité

Lorsqu'on étudie des interférences lumineuses, on n'étudie pas le signal s de l'onde mais directement l'intensité $I \sim s^2$.

► Formule de Fresnel et interférence lumineuse

Propriété. Intensité lumineuse en un point

L'intensité I en un point M de l'onde lumineuse résultant de la superposition de deux ondes d'intensités I_1 et I_2

- ▷ provenant de la même source
- ▷ de longueur d'onde λ **dans le vide**

est donnée par la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)$$

où $\delta(M)$ est la différence de chemin optique entre les deux ondes lumineuses au point M .

Exemple 2 : Donner l'intensité lumineuse si les deux ondes ont la même intensité I_0 .

$$I(M) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = I_0(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M))$$

► Notion de chemin optique

Propriété. Propagation de la lumière dans un milieu matériel

- ▷ Dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite à la célérité c .
- ▷ La vitesse c de propagation de la lumière dans un milieu matériel est :

$$c = \frac{c_0}{n}$$

avec c_0 la vitesse de propagation de la lumière dans le vide et n l'indice optique du milieu.

Exemple 3 : Exprimer τ , le temps que met la lumière à parcourir une distance L dans un milieu d'indice n .

$$\tau = \frac{L}{c} = \frac{L}{c_0} n$$

Plus l'indice optique est grand, plus la lumière met de temps à se propager.

Définition. Chemin optique

Le chemin optique entre deux points S et M dans un milieu homogène et isotrope d'indice n est :

$$(SM) = nSM$$

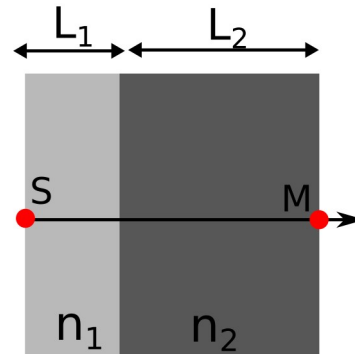
Propriété. Chemin optique et milieux d'indice différent

Le chemin optique d'un rayon traversant plusieurs milieux d'indice optique différent est la somme des chemins optiques dans chacun des milieux.

Exemple 4 :

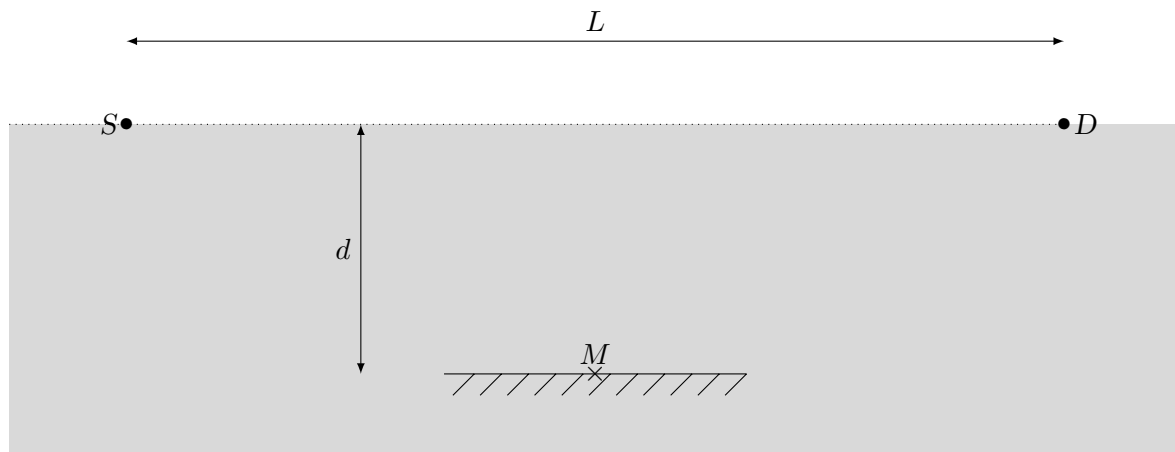
Calcule le chemin optique (SM) de la traversée des deux milieux d'indice n_1 et n_2 .

$$(SM) = (SM_1) + (M_1M) = n_1L_1 + n_2L_2$$



Exemple 5 : On dispose une source ponctuel monochromatique ($\sim$ LASER) de longueur d'onde $\lambda = 650\text{nm}$ à la surface d'une cuve d'eau. On dispose un détecteur de lumière D à une distance $L = 50\text{cm}$ du LASER. On place ensuite un miroir M et on observe l'intensité lumineuse obtenue au point D .

On donne $n_{\text{air}} = 1$ et $n_{\text{eau}} = 1,33$.



Pour quelle longueur d observera-t-on :

- ▷ une intensité maximale au niveau du détecteur
- ▷ une intensité nulle au niveau du détecteur

Méthode en DS. Résoudre un exercice d'interférences d'ondes lumineuses

1. **Schéma** du dispositif où on fait apparaître les trajets des deux rayons lumineux

2. Même source ?

3. **Formule de Fresnel :**

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right)$$

avec δ la différence de chemin optique ($(SM) \sim SM \times n$, indice optique)

4. **Différence de chemin optique**

- ▷ de la géométrie (*triangles rectangles*)
- ▷ les coordonnées (1D : axes ou 2D : cf *trous d'Young*)

5. **Conditions d'interférences :**

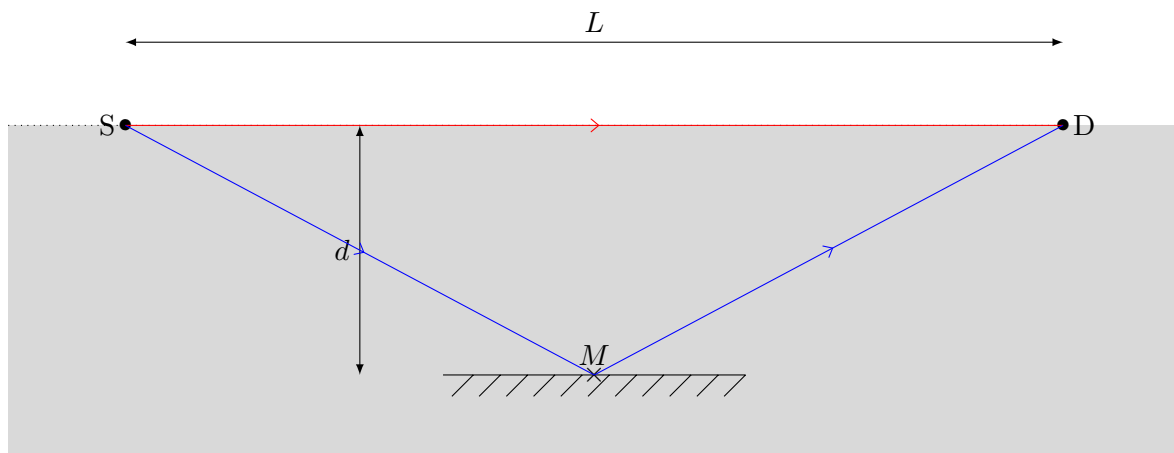
- ▷ constructives (*franges brillantes*) : $I = I_{max}$ donc $\frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2n\pi$
- ▷ destructives (*franges sombres*) : $I = I_{min}$ donc $\frac{2\pi}{\lambda} \delta = \pi + 2n\pi$

On cherche ensuite des conditions sur nos paramètres.

on peut ensuite lire la première question de l'exercice ...

CORRECTION

Deux rayons différents peuvent atteindre le détecteur : celui se propageant tout droit à la surface de l'eau, et celui rebondissant sur le miroir.



On calcule la différence de chemin optique :

$$\delta = (SD)_2 - (SD)_1$$

$$\triangleright (SD)_1 = n_{air} L$$

$$\triangleright (SD)_2 = (SM) + (MD) = 2(SM) = 2n_{eau} SM$$

Avec de la géométrie $SM = \sqrt{L^2/4 + d^2}$.

$$\delta = 2n_{eau} \sqrt{L^2/4 + d^2} - n_{air} L$$

$$\triangleright \text{Intensité maximale : } I = 4I_0 \text{ donc } \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 1 \text{ donc } \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2k\pi \text{ soit :}$$

$$\delta = k\lambda \Rightarrow 2n_{eau} \sqrt{L^2/4 + d^2} - n_{air} L = k\lambda$$

$$\text{Plus qu'à résoudre : } \sqrt{L^2/4 + d^2} = \frac{k\lambda + n_{air} L}{2n_{eau}} \text{ donc } d^2 = \left(\frac{k\lambda + n_{air} L}{2n_{eau}} \right)^2 - \frac{L^2}{4}.$$

▷ Intensité minimale : $I = 0$ donc $\cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta = -1$ donc $\frac{2\pi}{\lambda} \delta = \pi + 2k\pi$

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + k\lambda \Rightarrow 2n_{eau} \sqrt{L^2/4 + d^2} - n_{air} L = \frac{\lambda}{2} + k\lambda$$

On résout comme avant et on trouve $d^2 = \left(\frac{\lambda/2 + k\lambda + n_{air} L}{2n_{eau}} \right)^2 - \frac{L^2}{4}$.

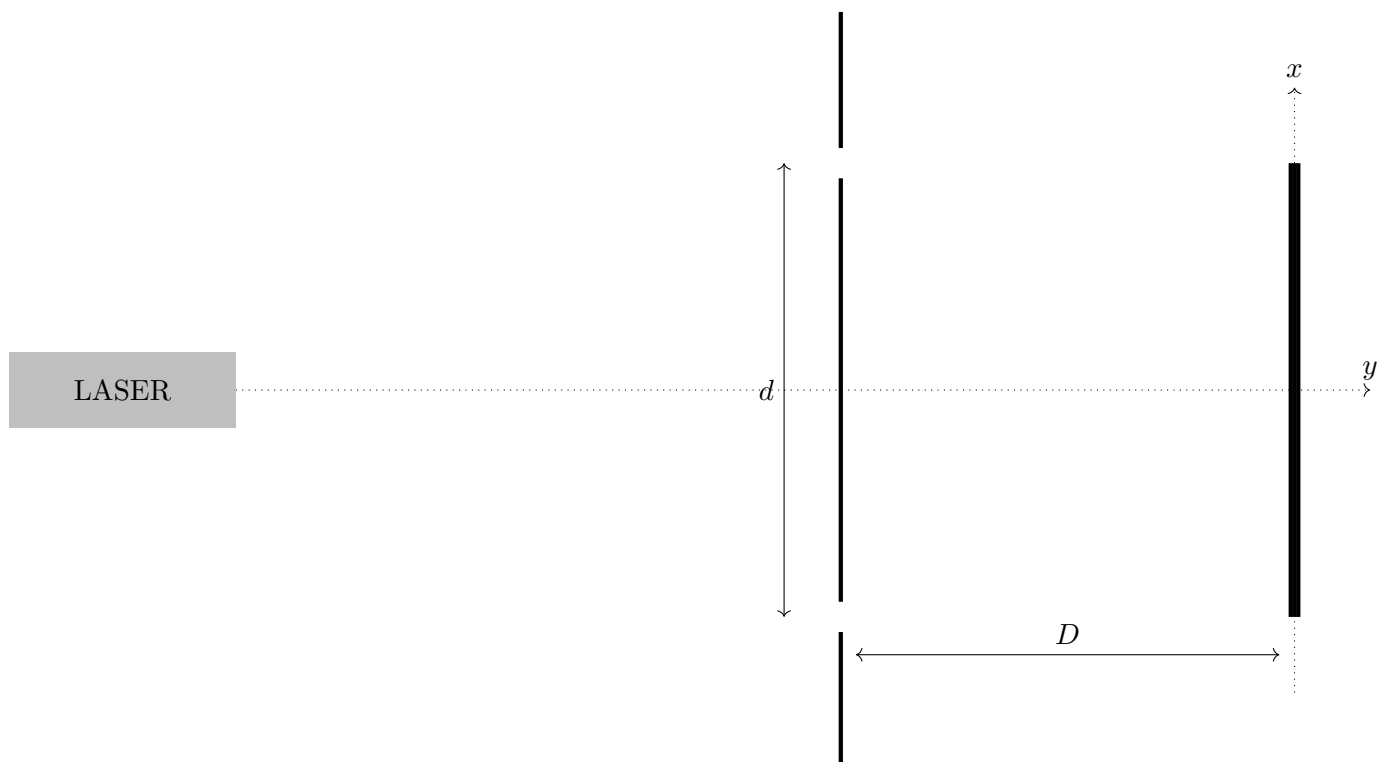
2.2 Expérience des fentes d'Young : répartition de l'intensité lumineuse

Cette partie se présente sous la forme d'un exercice, néanmoins le principe de l'expérience des Trous d'Young est à connaître.

► Dispositif expérimental et analyse qualitative

On étudie ici un dispositif qui permet de réaliser des phénomènes d'interférences avec des ondes lumineuses. Ce dispositif est constitué de deux trous T_1 et T_2 de diamètre $a = 10\mu\text{m}$ percés dans un écran opaque. On note $d = 50\mu\text{m}$ la distance les séparant.

On éclaire les deux trous par une onde lumineuse de longueur d'onde $\lambda = 500\text{nm}$. L'onde provient d'un LASER S située à une distance $d = 1\text{m}$ des trous. La source lumineuse émet une lumière d'intensité I_0 et on la place de telle sorte qu'elle soit à équidistance de T_1 et T_2 .



Lorsque la lumière passe à travers un trou de petite dimension, un phénomène de diffraction a lieu (voir fin de chapitre) : le faisceau en sortie du trou émerge dans un cône de demi-angle au sommet $\theta \sim \lambda/2r$. La faible valeur du diamètre a des trous conduit à des faisceaux de grande ouverture permettant aux ondes émergentes de T_1 et T_2 de se superposer et de créer des phénomènes d'interférence. Pour les observer on place à une distance $D = 1\text{m}$ des trous un écran. On y observe des interférences qui se manifestent par une alternance de zones de forte intensité, appelées **franges brillantes**, et de zones de faible intensité, appelées **franges sombres**.

Exemple 6 : Analyse qualitative de l'expérience

1. Quel nom donne-t-on à l'axe (Oy) qui représente le sens de propagation de la lumière ?
2. Associer aux franges brillantes et aux franges sombres le caractère constructif ou destructif de l'interférence lumineuse.
3. Justifier qu'il n'y a pas de différence de chemin optique du au trajet source $\rightarrow$ trou.
4. Justifier que la frange situé au niveau de l'axe (Oy) est une frange brillante.

CORRECTION

1. C'est l'axe de propagation de la lumière : c'est l'axe optique!!
2. $\triangleright$ franges brillantes $\Rightarrow$ maxima d'intensité $\Rightarrow$ interférences constructives
 $\triangleright$ franges sombres $\Rightarrow$ minima d'intensité $\Rightarrow$ interférences destructives
3. Chemin optique $\simeq$ Distance $\times$ indice optique donc même chemin optique veut dire :
 $\triangleright$ même distance parcourue
 $\triangleright$ même indice optique n ($\sim$ même milieu)
4. au niveau de l'axe (Oy), on a le même chemin optique pour les deux rayons (même distance + même n)
 $\Rightarrow$ interférences constructives $\Rightarrow$ frange brillante

► Analyse quantitative : différence de chemin optique**Exemple 7 : Différence de chemin optique**

On considère un point M sur l'écran qu'on repère par son abscisse x .

1. Reproduire le schéma de l'expérience des trous d'Young en représentant dessus le trajet suivi par les rayons issus de T_1 et T_2 qui arrivent en M .
 En déduire la différence de chemin optique $\delta(M)$ en M entre deux ondes provenant de T_1 et T_2 .

2. Montrer que

$$T_1M = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}$$

3. Après avoir exprimé T_2M , exprimer la différence de marche $\delta(M)$.

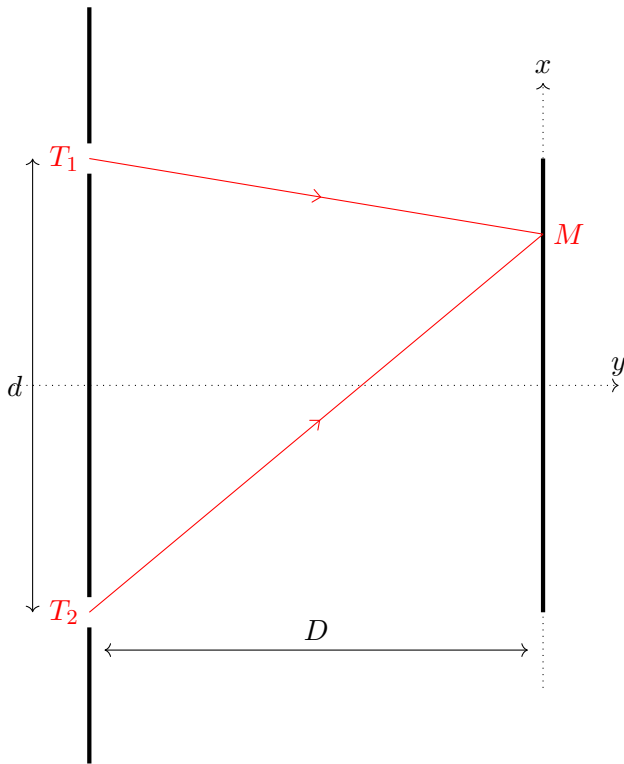
Pour une grandeur $\varepsilon \ll 1$, on peut faire l'approximation suivante : $(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$.

4. En déduire que $\delta(M)$ s'exprime comme :

$$\delta(M) = \frac{ad}{D}$$

CORRECTION

🔴 🔴 🔴 **Attention !** En plus de son intérêt scientifique, la configuration de l'expérience des trous d'Young se retrouve dans plein d'exemple (même avec des ondes mécaniques) : il s'agit donc de bien maîtriser les calculs et **les méthodes** qui vont suivre !!

1. Un **SCHEMA** est toujours **INDISPENSABLE**

Pour obtenir des distances lorsqu'on utilise un système d'axes, on utilise les coordonnées !!

♥ *Instant math* ♥

soit deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) alors

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Ici on a donc :

$$M = (x, 0) ; T_1 = (d/2, -D) ; T_2 = (-d/2, -D)$$

donc

$$T_1M = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + D^2}$$

2. De la même façon on trouve $T_2M = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + D^2}$ et donc

$$\delta = n_{air} \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + D^2} - n_{air} \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + D^2}$$

On prendra par la suite $n_{air} = 1$.

3. **Faire apparaître la forme du DL**

On va chercher à faire apparaître ε , la grandeur très petite devant 1. Ici on a $T_2M = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + D^2}$.

Pour faire apparaître une forme $\sqrt{1 + \varepsilon}$, il va falloir factoriser $\Rightarrow \varepsilon$ va être une fraction $\varepsilon = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$.

Comme $D \gg d, x, y$, pour que $\varepsilon \ll 1$, il faut mettre D au dénominateur donc factoriser la racine carrée par D^2 .

$$T_2M = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + D^2} = \sqrt{R^2 \left(1 + \frac{(d/2 + x)^2}{R^2}\right)} = R \sqrt{1 + \frac{(d/2 + x)^2}{R^2}}$$

on reconnaît alors $\varepsilon = \frac{(d/2 + x)^2}{R^2}$ donc :

$$T_2M = R \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = R \left(1 + \frac{(d/2 + x)^2}{2R^2}\right)$$

En raisonnant de façon similaire pour T_1M on trouve : $T_1M = R \left(1 + \frac{(-d/2 + x)^2}{2R^2}\right)$.

La différence de chemin optique est donc :

$$\delta = R \left(1 + \frac{(x + d/2)^2}{2R^2}\right) - R \left(1 + \frac{(x - d/2)^2}{2R^2}\right) = R \left(1 + \frac{d^2}{8R^2} + \frac{x^2}{2R^2} + \frac{xd}{2R^2}\right) - R \left(1 + \frac{d^2}{8R^2} + \frac{x^2}{2R^2} - \frac{xd}{2R^2}\right)$$

Soit : $\delta = \frac{d}{D}x$.

► **Interfrange**

Exemple 8 : Intensité lumineuse et interfrange

1. A l'aide de la formule de Fresnel, donner une expression de l'intensité I en fonction de l'abscisse x du point d'observation de l'écran.

Expliquer l'alternance de franges sombres et brillantes.

On appelle **interfrange**, notée i , la distance déparant deux franges brillantes sur l'écran.

2. Déterminer une expression de l'interfrange i et calculer sa valeur numérique ici.

CORRECTION

Exemple 9 :

1. Formule de Fresnel : $I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right)$ donc

$$I[x] = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{D} x \right)$$

On remarque alors que :

▷ frange brillante $\Rightarrow$ interférences constructives $\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{D} x_n = 2n\pi$ donc

$$x_n = \frac{D}{d} \lambda n \quad \left(x_0 = 0 ; x_1 = \frac{D}{d} \lambda ; x_2 = 2 \frac{D}{d} \lambda ; \dots \right)$$

▷ frange sombre $\Rightarrow$ interférences destructives $\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{D} \tilde{x}_n = \pi + 2n\pi$ donc

$$\tilde{x}_n = \frac{D}{d} \lambda (n + 1/2) \quad \left(\tilde{x}_0 = \frac{D}{2d} \lambda ; x_1 = 3 \frac{D}{2d} \lambda ; x_2 = 5 \frac{D}{2d} \lambda ; \dots \right)$$

2. Interfrange : écart entre deux franges brillantes ou sombres. Ici on trouve $x_{n+1} - x_n = \lambda D/d$.

3 Deux autres phénomènes d'interférences

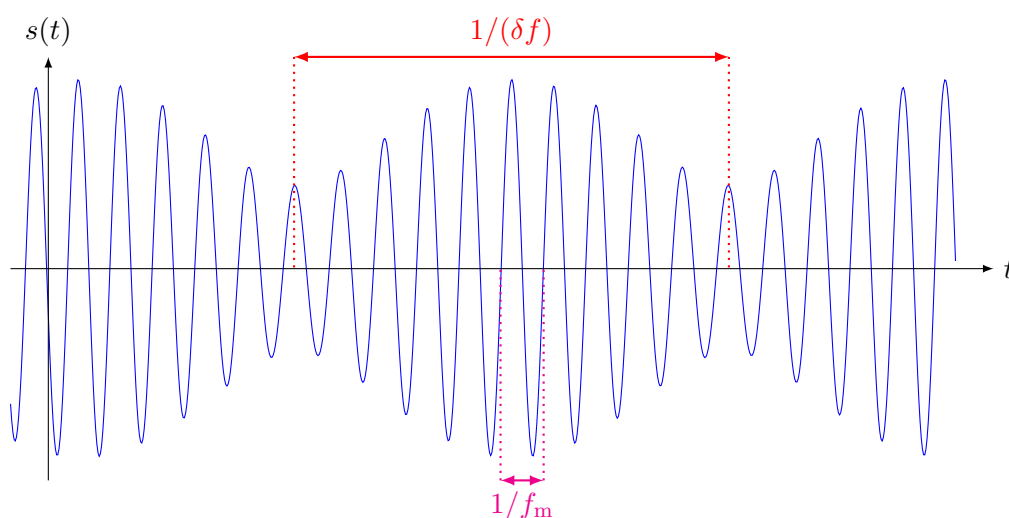
3.1 Phénomènes de battements

On s'intéresse cette fois ci à la superposition de deux ondes de fréquences f_1 et f_2 légèrement différentes ($f_1 \neq f_2$ mais $f_1 \simeq f_2$).

► Désaccord de diapason

| **Expérience 2** : Deux diapasons dont l'un est légèrement désaccordé

Considérons deux signaux sonores d'amplitude A créés par deux diapasons dont l'un des deux a été légèrement désaccordé. On appelle f_1 la fréquence du premier et f_2 la fréquence du second. On enregistre le signal sonore que l'on observe à l'oscilloscope.



On observe un signal sinusoïdale qui oscille rapidement (grande fréquence f , petite période) à l'intérieur d'une enveloppe qui oscille lentement (petite fréquence δf , grande période).

► Calcul du phénomène de battement (pour aller plus loin)

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Les deux diapasons ne sont pas synchrones ! Nous ne sommes pas dans le cadre décrit précédemment.

Dans ce cas, les deux signaux sont des notes pures, et donc sinusoïdaux. On ne prend pas en compte la différence de marche.

$$s_1(t) = A \cos(\omega_1 t) = A \cos(2\pi f_1 t) \quad \text{et} \quad s_2 = A \cos(\omega_2 t) = A \cos(2\pi f_2 t) .$$

Le signal mesuré, est donc la somme de ces deux signaux : $s = s_1 + s_2$.

$$s(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + A \cos(2\pi f_2 t)$$

♡ *Instant math* ♡ :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Donc ici :

$$s(t) = 2A \cos(\pi \delta f t) \cos(2\pi f_m t) .$$

avec $f_m = (f_1 + f_2)/2$ la fréquence moyenne et $\delta f = f_2 - f_1$ la différence de fréquence.

$$s(t) = \underbrace{2A \cos(\pi \delta f t)}_{\text{Enveloppe du signal}} \times \cos(2\pi f_m t)$$

Si l'on suppose que les deux fréquences sont très proches dans ce cas on a $f_m \approx f_1 \approx f_2$ et la différence de fréquence $\delta f = f_1 - f_2 \ll f_m$. Il s'agit du phénomène de **battements**.

Le signal oscille rapidement entre $+2A \cos(\pi \delta f t + \Delta \phi_0)$ et $-2A \cos(\pi \delta f t + \Delta \phi_0)$. Si on trace les deux limites de l'enveloppe du signal, on observe que l'amplitude de cette enveloppe oscille à la fréquence δf .

On observe donc un signal oscillant rapidement à la fréquence f_m dans une enveloppe évoluant lentement à la fréquence δf , où $\delta f \ll f_m$.

► Phénomène de battements

Propriété.

Soient deux sources s_1 et s_2 possédant deux fréquences f_1 et f_2 très proches avec $f_2 > f_1$. On définit :

$$\begin{cases} \text{la fréquence moyenne } f_m = (f_1 + f_2)/2 \simeq f_1 \\ \text{l'écart en fréquence } \delta f = f_2 - f_1 \ll f_m \end{cases}$$

Le signal résultant de la somme des deux signaux possède alors une double périodicité :

- ▷ une période courte $T_m = 1/f_m$ d'oscillations rapides
- ▷ une période longue $T_{\text{bat}} = 1/\delta f$ d'oscillation lente

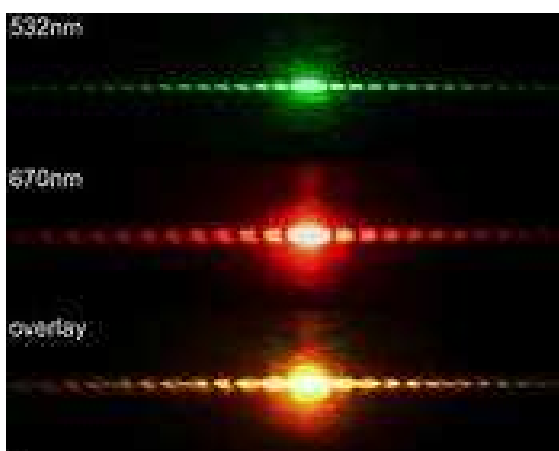
Au cours du temps, le signal oscille rapidement à la fréquence f_m dans une enveloppe qui oscille lentement à la fréquence δf .

Remarque : Ce phénomène, que l'on peut repérer à l'oreille, est utilisé pour accorder les instruments de musiques.

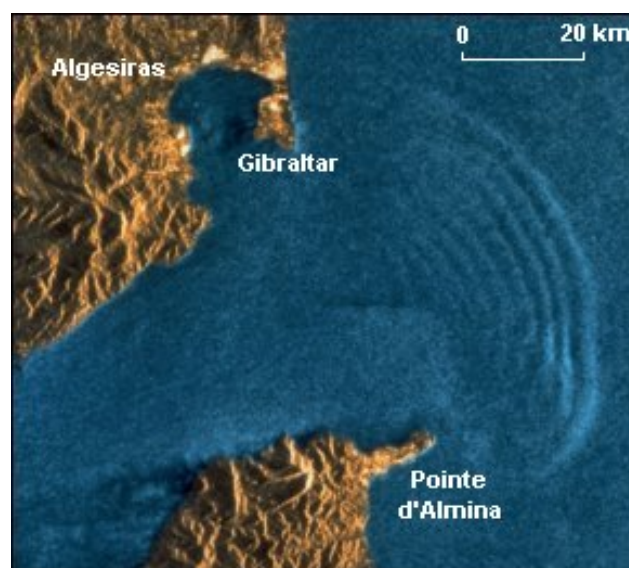
3.2 La diffraction

► Mise en évidence expérimentale

Lorsqu'une onde incidente rencontre une ouverture, ou un obstacle, dont les dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde, il se produit un étalement de l'onde : en traversant l'obstacle, elle semble se ré-émettre dans toutes les directions.



Figures de diffractions de laser de différentes longueurs d'ondes sur un trou.



Diffraction d'onde océaniques à travers le détroit de Gibraltar.



Diffraction bidimensionnelle de la lumière à travers les mailles d'un rideau.

► Schéma de la diffraction

Propriété. Diffraction par une fente mince

Lorsqu'une onde de longueur d'onde λ traverse une ouverture de taille d , elle est ré-émise dans un cône de diffraction de demi-angle d'ouverture θ .

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

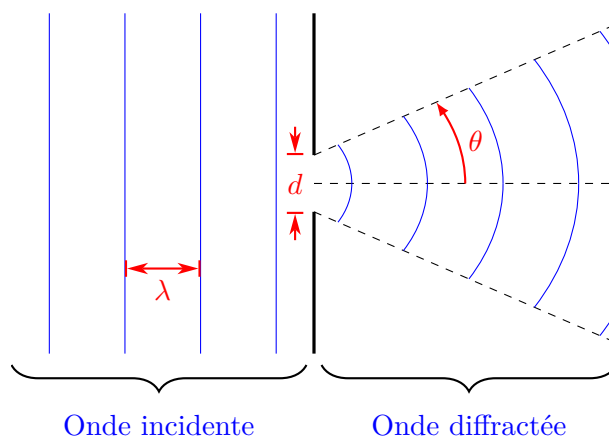


Fig. 1 – Les traits bleus représentent les positions des maxima de l'onde.

En général, les angles considérés sont faibles et $\sin \theta \approx \theta$

Exemple 10 : On envoie un faisceau laser sur une fente de largeur a et observe une figure de diffraction en plaçant un écran à la distance D derrière l'obstacle. On note λ la longueur d'onde la taille de l'ouverture.

Quelle est la taille de la tâche centrale Δx de la figure de diffraction sur l'écran :

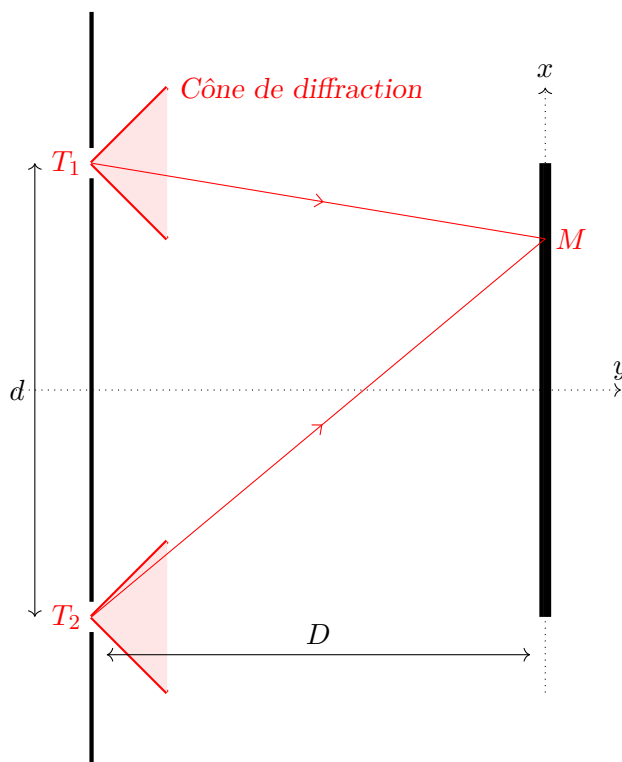
- ▷ si $a = 10^3 \lambda$
- ▷ si $a = \lambda$

Propriété. Diffraction ou pas diffraction

Le phénomène de diffraction est négligeable dans les cas où le diamètre de l'ouverture largement supérieur à la longueur d'onde de l'onde

Remarque : Le phénomène de diffraction s'observe également si une l'onde lumineuse arrive non pas sur une ouverture mais également sur un obstacle de diamètre d , de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

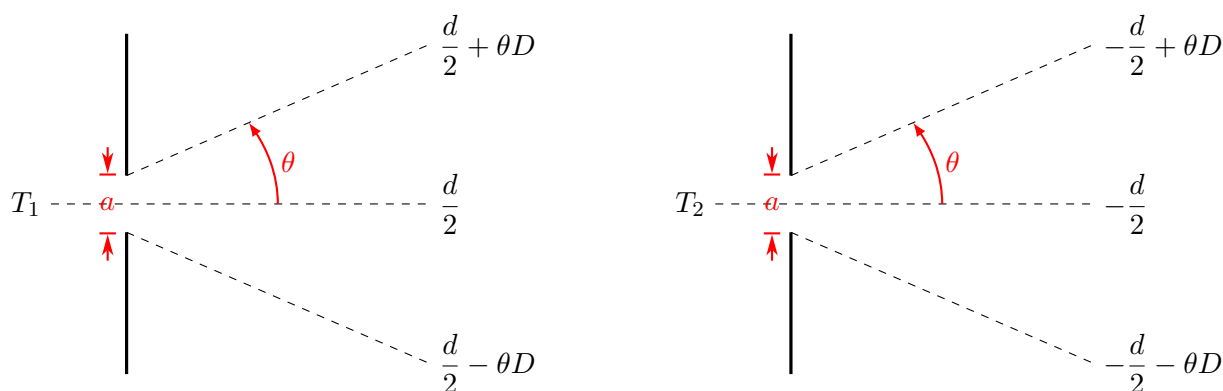
Exemple 11 : La diffraction est au coeur du dispositif des trous d'Young. C'est grâce à elle que les rayons issus des trous T_1 et T_2 ne continuent pas tout droit et sont "déviés" vers le point M .



CORRECTION

1. Exprimer l'angle θ du cône de diffraction en T_1 et T_2 .
2. Donner la taille de la zone de l'écran où les deux ondes lumineuses vont se superposer.
3. En déduire le nombre de franges qu'on observera.
On rappelle l'expression de l'interfrange $i = \lambda D/d$.

1. Au niveau des trous T_1 et T_2 la lumière repart dans "toutes" les directions grâce à un phénomène de diffraction. Chaque trou éclaire une zone comprise dans son cône de diffraction, d'angle au sommet $\theta = \lambda/a$, avec a la largeur du trou.



La zone où on observera des interférences est donc celle sur l'écran où les deux cônes de T_1 et T_2 se superposent.

- ▷ zone éclairée par T_1 : $\left[d/2 - \frac{\lambda}{d}D ; d/2 + \frac{\lambda}{d}D \right]$
 ▷ zone éclairée par T_2 : $\left[-d/2 - \frac{\lambda}{d}D ; -d/2 + \frac{\lambda}{d}D \right]$

Donc la zone où se superposent les deux cônes est de taille :

$$r = \text{haut de la zone du bas (due à } T_2) - \text{bas de la zone du haut (due à } T_1)$$

$$r = \left(-d/2 + \frac{\lambda}{d}D\right) - \left(d/2 - \frac{\lambda}{d}D\right) -$$

$$r = -d + \frac{2\lambda D}{d}$$

Le nombre de franges est alors $N = r/\lambda = -\frac{d^2}{\lambda D} + 2$

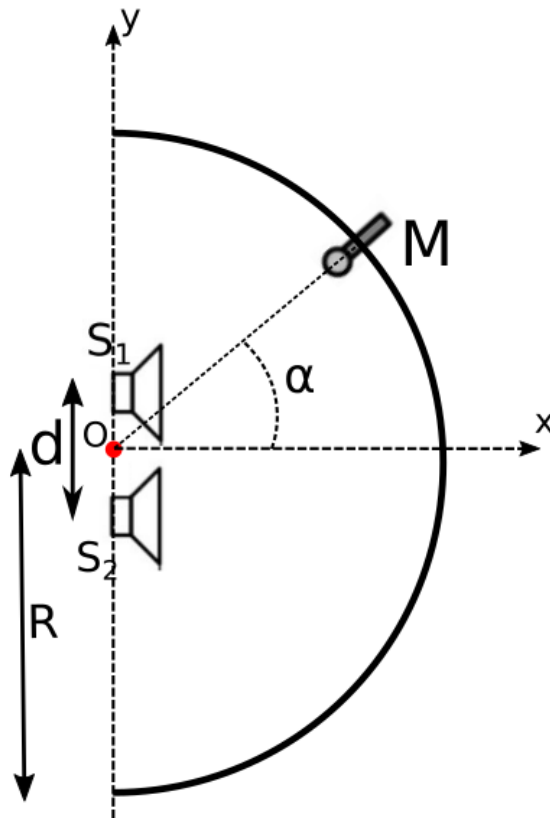


Interférences à deux émetteurs

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Ce μDM a pour objectif de préparer le TP sur les interférences. Néanmoins, comme on le verra au cours de ce sujet, il traite d'une configuration **extrêmement courante** lorsqu'on fait des interférences.

Deux émetteurs sont posés côte à côte et écartés d'une distance d . On note O le milieu des deux émetteur, choisi comme centre d'un système de coordonnées. On s'intéresse à l'intensité du signal sonore au niveau d'un micro M situé à une distance R fixe du centre O . On repère la position du micro avec l'angle α que fait le segment OM avec l'axe (Ox) .



Les deux émetteurs sont alimentés avec un signal sinusoïdal de 40kHz. On note $c = 340\text{m/s}$ la vitesse du son dans l'air.

1. A quelle expérience bien connue cela vous fait-il penser ?
2. Exprimer en fonction de α et R les coordonnées du point M du micro. En déduire les distances S_1M et S_2M .
3. Exprimer la différence de marche δ au niveau du micro en fonction de S_1M , S_2M et des caractéristiques de l'onde.

On suppose que $d \sin \alpha, d \ll R$ (même si dans l'expérience ce n'est pas vrai ...).

4. Montrer que

$$S_1M \simeq R \left(1 + \frac{d^2}{8R^2} - \frac{d \sin \alpha}{2R} \right)$$

Astuce : $\varepsilon = \frac{d^2/4 \pm Rd \sin \alpha}{R^2}$

5. En déduire une expression simplifiée de δ :

$$\delta \simeq d \sin \alpha$$

6. Donner alors les angles α_n où on observe des maxima d'intensité. Combien y en a-t-il ?

⚠⚠⚠ **Attention !** $-\pi/2 < \alpha < +\pi/2$

7. Donner alors les angles $\tilde{\alpha}_n$ où on observe des minima d'intensité. Combien y en a-t-il ?

⚠⚠⚠ **Attention !** $-\pi/2 < \alpha < +\pi/2$



Interférences à deux émetteurs

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

1. C'est les trous d'Young!!!
2. Avec un triangle rectangle on trouve $x_M = R \cos \alpha$ et $y_M = R \sin \alpha$. On a alors :

$$S_1 M = \sqrt{(R \cos \alpha - 0)^2 + (R \sin \alpha - d/2)^2} ; S_2 M = \sqrt{(R \cos \alpha - 0)^2 + (R \sin \alpha + d/2)^2}$$

On développe :

$$S_1 M = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha + d^2/4 - Rd \sin \alpha} ; S_2 M = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha + d^2/4 + Rd \sin \alpha}$$

On simplifie via $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$:

$$S_1 M = \sqrt{R^2 + d^2/4 - Rd \sin \alpha} ; S_2 M = \sqrt{R^2 + d^2/4 + Rd \sin \alpha}$$

3. La différence de marche est $\delta = S_2 M - S_1 M$ soit :

$$\delta = \sqrt{R^2 + d^2/4 + Rd \sin \alpha} - \sqrt{R^2 + d^2/4 - Rd \sin \alpha}$$

4. On factorise par la "grande quantité", ici R :

$$S_2 M = R \sqrt{1 + d^2/4R^2 + \frac{d}{R} \sin \alpha} ; S_1 M = R \sqrt{1 + d^2/4R^2 - \frac{d}{R} \sin \alpha}$$

on fait le DL avec $\varepsilon = d^2/4R^2 \pm \frac{d}{R} \sin \alpha$.

$$S_2 M = R \left(1 + d^2/8R^2 + \frac{d}{2R} \sin \alpha \right) ; S_1 M = R \left(1 + d^2/8R^2 - \frac{d}{2R} \sin \alpha \right)$$

5. On a alors : En déduire une expression simplifiée de δ :

$$\delta = R \left(1 + d^2/8R^2 + \frac{d}{2R} \sin \alpha \right) - R \left(1 + d^2/8R^2 - \frac{d}{2R} \sin \alpha \right)$$

Les termes se simplifient et on a :

$$\delta \simeq d \sin \alpha$$

6. Maxima d'intensité $\Rightarrow$ interférences constructives donc :

$$\Delta\varphi = 2k\pi \text{ avec } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + 0$$

Donc $\delta = k\lambda$ et donc $\sin \alpha_k = \frac{\lambda}{d} k$ soit :

$$\alpha_k = \arcsin \left(\frac{\lambda}{d} k \right)$$

Le nombre de solution dépend du rapport de λ/d .

7. Minima d'intensité $\Rightarrow$ interférences destructives donc :

$$\Delta\varphi = \pi + 2k\pi \text{ avec } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + 0$$

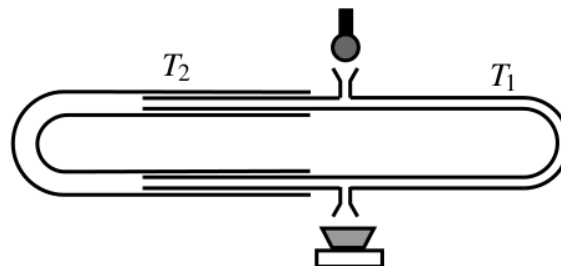
Donc $\delta = \frac{\lambda}{2} + k\lambda$ et donc $\sin \alpha_k = \frac{\lambda}{2d} + \frac{\lambda}{d} k$ soit :

$$\alpha_k = \arcsin \left(\frac{\lambda}{2d} + \frac{\lambda}{d} k \right)$$

1 Interférences mécaniques

Exercice 1 - Trombone de Koenig et mesure de la vitesse du son :

Le trombone de Koenig est un dispositif de laboratoire permettant de faire interférer deux ondes sonores ayant suivi des chemins différents. Le haut-parleur, alimenté par un générateur de basses fréquences, émet un son de fréquence $f = 1500 \text{ Hz}$.



On mesure le signal à la sortie avec un microphone branché sur un oscilloscope. En déplaçant la partie mobile T_2 , on allonge la branche de gauche d'une longueur d .

On fait varier d de 0 à 11.5cm. L'amplitude du signal observé passe par :

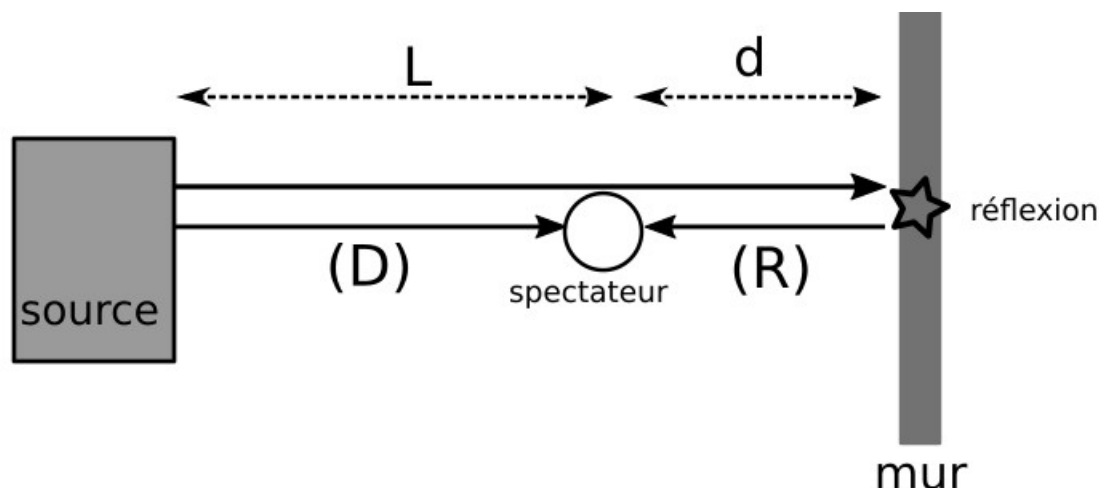
- ▷ un maximum pour $d = 0$
- ▷ un minimum d_1
- ▷ un maximum d_2
- ▷ un minimum $d_3 = 11.5 \text{ cm}$

1. Expliquer qualitativement la variation de l'amplitude du signal observé.
2. Exprimer la différence de marche δ entre les deux ondes au niveau du récepteur.
3. En déduire la célérité des ondes sonores dans l'air.
4. En déduire la valeur de d_1 et d_2 .

Exercice 2 - Acoustique d'une salle de concert :

Dans une salle de concert, le son qu'entend un spectateur provient d'un orchestre/chanteur/enceinte situé à un bout de la salle. L'onde se propage depuis la source jusqu'au spectateur. Mais il arrive que l'onde rebondisse sur le mur du fond de la salle et revienne jusqu'aux oreilles du spectateur.

On considère les deux ondes qui arrivent au niveau du spectateur. On appelle (D) l'onde provenant directement depuis la source et (R) l'onde réfléchie sur le mur.



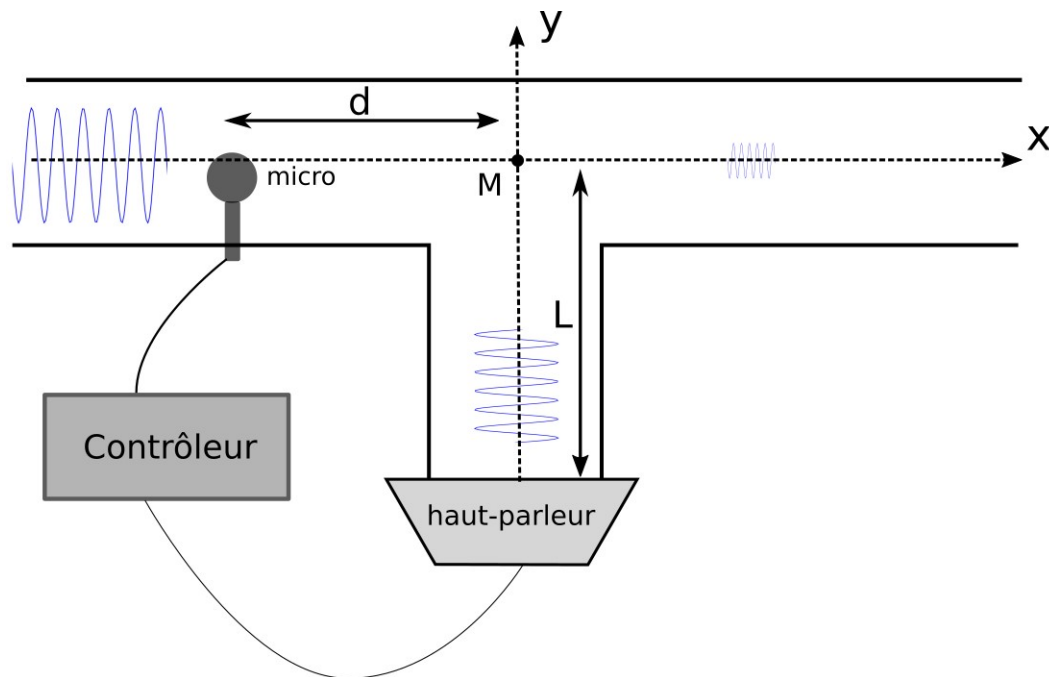
On appelle d la distance entre le spectateur et le mur et L la distance entre le spectateur et la source. On rappelle la vitesse du son dans l'air $c = 340\text{m/s}$.

1. Justifier pourquoi un phénomène d'interférences à lieu.
2. Donner le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux ondes au niveau du spectateur.
3. Expliquer pourquoi alors certaines fréquences sonores sont fortement atténuées.
Déterminer ses fréquences en fonction de c , d et un entier n .
4. Montrer que pour éviter que les fréquences atténuées soient dans le domaine audible, d ne doit pas dépasser une certaine valeur limite. Est-ce réalisable dans une salle de concert ?
5. Comment éviter qu'un tel phénomène se produise ?

Exercice 3 - Filtrage actif du bruit :

On considère une conduite ($\sim$ un tuyaux) au bout duquel est généré un bruit régulier : bruit de ventilateur, pompe, marteau piqueur, ... On cherche à créer un dispositif qui permet d'atténuer ce bruit au niveau du point M par phénomènes d'interférences destructives. Pour cela :

- ▷ le bruit est mesuré par un micro qui envoie un signal électrique vers un contrôleur
- ▷ le contrôleur traite le signal et génère un signal électrique qui va piloter un haut-parleur
- ▷ le haut-parleur émet un signal sonore qui va se propager et interférer destructivement au point M avec le bruit incident



On rappelle la vitesse du son dans l'air $c = 340\text{m/s}$. On néglige le temps de propagation des signaux électriques dans les câbles reliant le micro au contrôleur et le contrôleur au haut-parleur.

On prendra $d = 1\text{m}$ et $L = 10\text{cm}$. On suppose par la suite que le bruit est une onde progressive sinusoïdale de fréquence f .

1. Quelle doit être la fréquence de l'onde émise par le haut parleur pour qu'il y ait des interférence destructives en M .

On mesure Φ_m la phase de l'onde A_0 l'amplitude de l'onde au niveau du micro.

2. Exprimer la phase à l'origine Φ_{hp} que doit appliquer le contrôleur afin que l'interférence soit destructrice en M .

On l'exprimera en fonction de Φ_m , L , d , c et f .

3. Quelle amplitude donner à l'onde au niveau du haut-parleur ?

On suppose désormais que le bruit n'est plus un signal sinusoïdal mais un signal périodique de fréquence f .

- Représenter le spectre d'un signal sinusoïdal de fréquence f et celui d'un signal périodique de fréquence f .
- On donne le bruit mesuré au niveau du haut parleur :

$$p_b(x=0, t) = A_0 \cos(2\pi ft) + \frac{A_0}{2} \cos(8\pi ft + \pi/2) + 2A_0 \cos(100\pi ft + \pi/4)$$

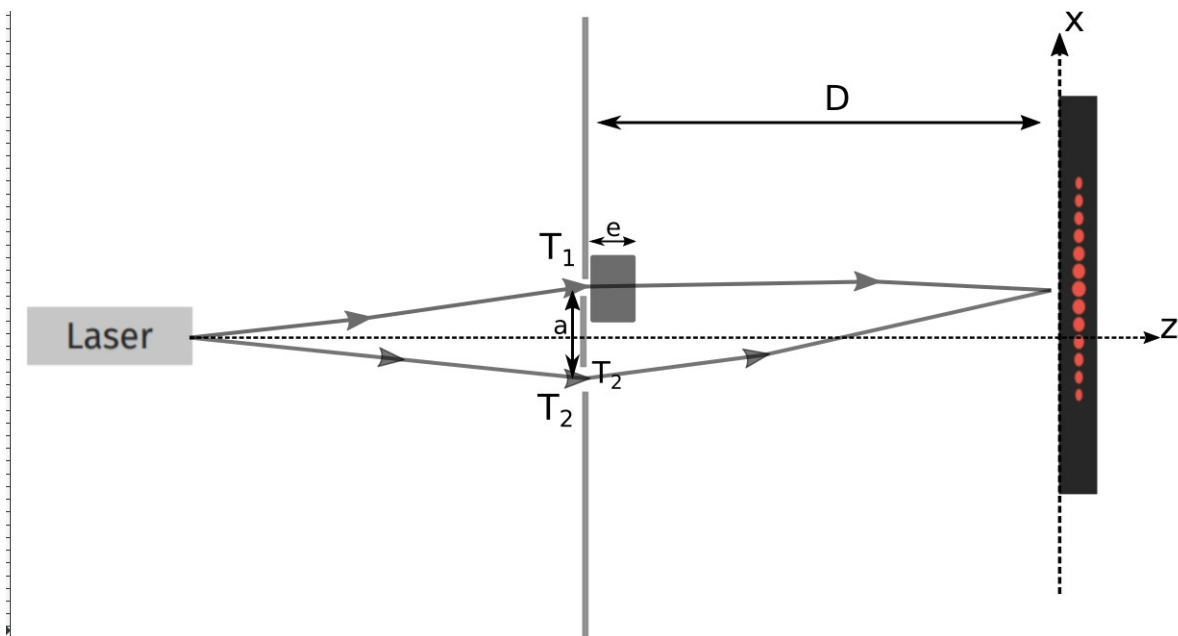
Donner l'expression du signal $p_{hp}(y=0, t)$ au niveau du haut parleur pour que le bruit soit atténué.

Interférences lumineuses

Exercice 4 - Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre par interférence :

On considère un dispositif d'interférence des trous d'Young, où les deux trous T_1 et T_2 sont séparés d'une distance $a = 100\mu\text{m}$. Le dispositif est éclairé par une source ponctuelle monochromatique ($\sim$ un LASER) de longueur d'onde $\lambda = 532\text{nm}$ situé sur l'axe optique. La figure d'interférence est observée sur un écran situé à une distance $d = 1,00\text{m}$ des trous.

L'indice optique de l'air est supposé égal à 1 et on se place dans l'approximation $x, a \ll D$.



- On considère un point M d'abscisse x sur l'écran. Donner, en absence de lame de verre, la différence de marche $\delta(M)$ en ce point entre les ondes lumineuses émises par le trou T_1 et celle du trou T_2 .

On dispose désormais au niveau du trou T_1 une lame de verre, d'épaisseur e et d'indice n_v . On suppose que $e \ll D$ si bien qu'on peut considérer que les rayons lumineux traversent la lame de verre perpendiculairement.

- Montrer que la différence de marche $\delta(M)$ est désormais égale à :

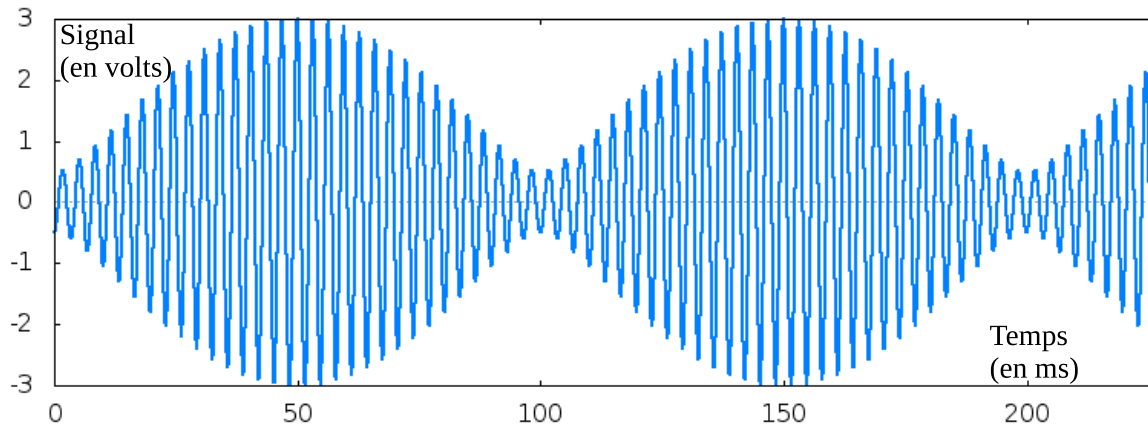
$$\delta(M) = \frac{ax}{D} - (n_v - 1)e$$

- Donner la position x_0 de la frange centrale correspondant à $\delta = 0$. De quelle distance s'est-elle déplacée par rapport au cas où la lame de verre est absente.
- On mesure $x_0 = 28.5\text{cm}$. Donner e .
En déduire l'intérêt d'un tel dispositif pour mesurer l'épaisseur d'une lame de verre

2 Phénomènes de battements

Exercice 5 - Signal enregistré :

La figure ci-dessous présente l'enregistrement des battements de deux signaux sinusoïdaux produits par deux générateurs de basses fréquences. On demande de déterminer les fréquences des deux signaux et leurs amplitudes.



Exercice 6 - Signal et intensité :

Nous supposons ici que l'onde lumineuse (x, t) émise par un laser est monochromatique. Un détecteur est éclairé par deux lasers quasi-identiques de même éclairement (ou intensité). Leurs longueurs d'onde sont très voisines de $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ et l'écart en fréquence vaut $\Delta\nu = 1 \text{ MHz}$.

1. Donner l'allure du signal lumineux $\mathcal{S}(t)$ mesuré au niveau du détecteur (on choisira une phase à l'origine quelconque).
2. En déduire celui de l'éclairement $I(t) = \alpha \mathcal{S}^2(t)$, qu'on représentera sur un graphe différent.

1 Interférences mécaniques

Exercice 1 - Trombone de Koenig et mesure de la vitesse du son :

Analyse : On applique la méthode des interférences d'ondes mécanique puis on lit la première question

1. **Schéma :** on ajoute le trajet des deux ondes!!!

2. Source synchrones : oui car c'est la même source

3. **Différence de phase :** $\Delta\varphi = 0 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ car $\Delta\Phi_0 = 0$ (même source)

4. **Différence de marche :** l'onde a droite parcourt en plus une distance $+d$ lors de "l'aller" et $+d$ lors du "retour". Donc $\delta = 2d$.

5. **Condition d'interférence :**

▷ Constructives : $\delta = n\lambda$ donc $d = n\frac{\lambda}{2}$

▷ Destructives : $\delta = (n + 1/2)\lambda$ donc $d = (n + 1/2)\frac{\lambda}{2}$

Maintenant on peut lire les questions

1. On augmente d donc on modifie δ : on crée successivement des interférences constructives et destructives. Notamment :

▷ $\delta = 0$ pour $d = 0$: constructives $\Rightarrow$ max

▷ $\delta = \lambda/2$ $d = d_1 = \lambda/4$: destructives $\Rightarrow$ min

▷ $\delta = \lambda$ $d = d_3 = \lambda/2$: constructives $\Rightarrow$ max

▷ $\delta = 3\lambda/2$ $d = d_4 = 3\lambda/4$: destructives $\Rightarrow$ min

2. Déjà fait

3. Avec d_3 on a $3\lambda/4 = 11.5\text{cm}$ donc $\lambda = 15,3\text{cm}$ et $c = \lambda f$ soit $c \simeq \dots\text{m/s}$

4. un peu de calcul mental ...

Exercice 2 - Acoustique d'une salle de concert :

Analyse : On applique la méthode des interférences d'ondes mécanique puis on lit la première question

1. **Schéma :** on ajoute le trajet des deux ondes!!!

2. Source synchrones : oui car c'est la même source

3. **Différence de phase :** $\Delta\varphi = 0 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ car $\Delta\Phi_0 = 0$ (même source)

4. **Différence de marche :** l'onde qui rebondit parcourt en plus une distance $2d$ donc $\delta = 2d$.

5. **Condition d'interférence :**

▷ Constructives : $\delta = n\lambda$ donc $d = n\frac{\lambda}{2}$

▷ Destructives : $\delta = (n + 1/2)\lambda$ donc $d = (n + 1/2)\frac{\lambda}{2}$

Maintenant on peut lire les questions

1. Deux ondes issues de la même source mais ayant eu des trajets différents se retrouvent au même point.

- Déterminer le retard τ au niveau du spectateur entre l'onde (R) qui s'est réfléchi sur le mur et l'onde (D) qui arrive directement.
- En déduire le déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux ondes au niveau du spectateur.
- Expliquer pourquoi alors certaines fréquences sonores sont fortement atténuées. Déterminer ses fréquences en fonction de c , d et un entier n .
- Montrer que pour éviter que les fréquences atténuées soient dans le domaine audible, d ne doit pas dépasser une certaine valeur limite. Est-ce réalisable dans une salle de concert ?
- Comment éviter qu'un tel phénomène se produise ?

Exercice 3 - Filtrage actif du bruit :

Analyse : On applique la méthode des interférences d'ondes mécanique puis on lit la première question

1. **Schéma :** on ajoute le trajet des deux ondes !!!

2. Source synchrones : elles doivent avoir la même fréquence

3. **Différence de phase :** $\Delta\varphi = \Delta\Phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ avec $\Delta\Phi_0 = \Phi_m - \Phi_{hp}$

4. **Différence de marche :** l'onde passant par le micro parcourt d , celle depuis le haut-parleur L , donc $\delta = d - L$.

5. **Condition d'interférence :**

▷ Constructives : $\varphi = 2n\pi$

▷ Destructives : $\varphi = \pi + 2n\pi \Rightarrow (\Phi_m - \Phi_{hp}) - \frac{2\pi}{\lambda}(d - L) = \pi + 2n\pi$

Maintenant on peut lire les questions

- A cause de la différence entre d et L , les deux ondes n'ont pas le même temps de propagation depuis leur sources (micro et haut-parleur) jusqu'au point M . Il y a un décalage

$$\Delta t = \frac{d}{c} - \frac{L}{c}, \text{ si } d > L \text{ qui permet au contrôleur de générer l'onde au niveau du haut parleur}$$

- Sources synchrones donc même fréquence
- En utilisant la condition d'interférences destructives :

$$(\Phi_m - \Phi_{hp}) - \frac{2\pi}{\lambda}(d - L) = \pi + 2n\pi \text{ donc } \Phi_m - \Phi_{hp} = \pi + \frac{2\pi}{\lambda}(d - L) + 2n\pi$$

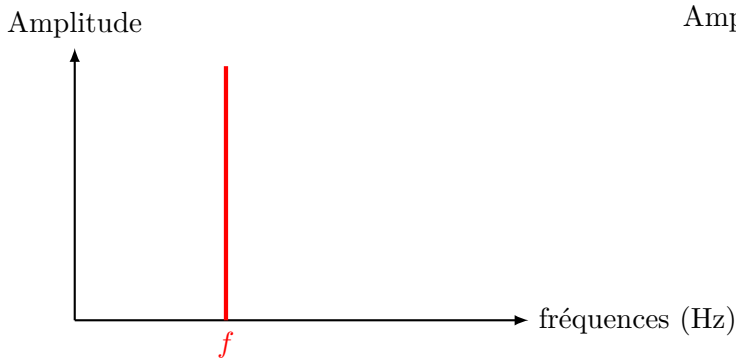
On prendra par la suite le plus simple $n = 0$: $\Phi_m - \Phi_{hp} = \pi + \frac{2\pi}{\lambda}(d - L)$

- L'amplitude de l'onde résultante est :
 - ▷ interférences constructives : somme des amplitudes
 - ▷ interférences destructives : différences des amplitudes

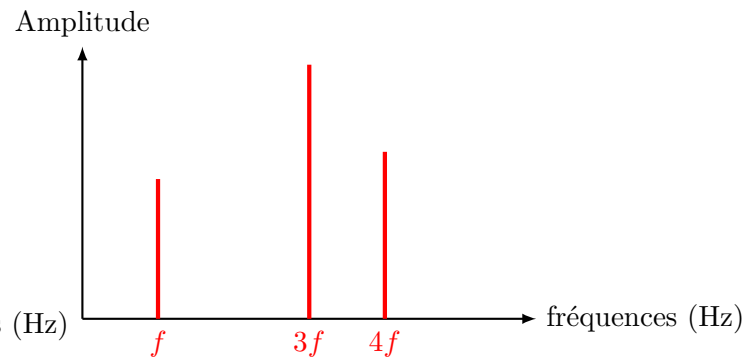
Ici on choisit la même amplitude A_0 au niveau du haut parleur : l'amplitude de l'onde résultante est nulle.

5. Spectre

Signal sinusoïdal : une seule harmonique



Signal périodique : plusieurs harmoniques de fréquences $f_n = n \times f$



6. Il faut donner à chaque harmonique le bon déphasage, obtenu précédemment.

☛☛☛ **Attention !** ce n'est pas le même car il dépend de la fréquence !!

$$\Phi_m - \Phi_{hp} = \pi + \frac{2\pi}{\lambda} (d - L) = \pi + \frac{2\pi f}{c} (d - L)$$

Le signal $p_{hp}(x = 0, t)$ est donc :

$$A_0 \cos\left(2\pi ft + \pi + \frac{2\pi f}{c} (d - L)\right) + \frac{A_0}{2} \cos\left(8\pi ft - \pi/2 + \frac{8\pi f}{c} (d - L)\right) + 2A_0 \cos\left(100\pi ft + 5\pi/4 + \frac{100\pi f}{c} (d - L)\right)$$

(on a écrit les angles modulo π)

Interférences lumineuses

Exercice 4 - Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre par interférence :

1. Cf cours ... ☛☛☛ **Attention !** ce n'est pas facile mais il faut le maîtriser !!

Analyse : On applique la méthode des interférences d'ondes mécanique puis on lit la première question

(a) **Schéma** : on ajoute le trajet des deux ondes !!!

(b) mêmes sources

(c) **Formule de Fresnel** : $I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)$ avec δ la différence de chemin optique.

(d) **Différence de chemin optique** : comme les trous d'Young "classique", $\delta = ax/D$ sauf que l'onde passant par T_1 traverse une lame de verre d'épaisseur e ajoutant $(n_v - n_a)e$ à son chemin optique.

$$\delta = \frac{ax}{D} - (n_v - n_a)e$$

(e) **Condition d'interférence** :

▷ Constructives : $\cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 1$ donc $\delta = n\lambda$

▷ Destructives : $\cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta = -1$ donc $\delta = (n + 1/2)\lambda$

Maintenant on peut lire les questions

2. déjà fait

3. Frange centrale est la frange brillante avec le plus petit δ , donc $\delta = 0$. Dans les trous d'Young "classique" elle se trouve en $x = 0$. Or à cause de la lame de verre, elle dévie.

$$\delta = 0 \Rightarrow \frac{ax_0}{D} - (n_v - 1)e = 0 \Rightarrow x_0 = (n_v - 1) \frac{eD}{a}$$

4. Cela permet de mesurer des centimètre (sur l'écran) pour avoir des information sur de nanomètre (épaisseur de e). Nous n'aurions pas pu mesurer e avec notre règle.

2 Phénomènes de battements

Exercice 5 - Signal enregistré :

On mesure la période des oscillations $T = 3\text{ms}$ et celle des battements $\Delta T = 100\text{ms}$. On en déduit alors la moyenne et la différences des deux fréquences

$$\frac{1}{T} = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Delta T} = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

donc

$$f_1 = \frac{1}{T} + \frac{1}{\Delta T} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{T} - \frac{1}{\Delta T}$$

Exercice 6 - Signal et intensité :

1. $\mathcal{S}(t) = 2A \cos(\pi \Delta \nu t) \times \cos(2\pi \nu t)$ avec $\nu = c/\lambda$.
2. On calcule $I(t) = \alpha \mathcal{S}^2(t)$:

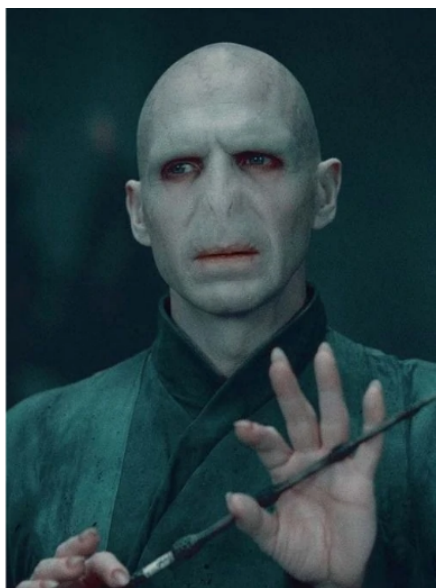
$$I(t) = \alpha (2A \cos(\pi \Delta \nu t) \times \cos(2\pi \nu t))^2 = 4A^2 \cos^2 \pi \Delta \nu t \cos^2 2\pi \nu t$$

or $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ donc :

$$I(t) = 4A^2 \frac{1 + \cos 2\pi \Delta \nu t}{2} \frac{1 + \cos 4\pi \nu t}{2} = A^2 (1 + \cos 2\pi \Delta \nu t) (1 + \cos 4\pi \nu t)$$

Table des matières

1	Dualité ondes-particules	4
1.1	Nature corpusculaire de la lumière : notion de photon	5
1.2	Nature ondulatoire de la matière	7
2	Inégalité d'Heisenberg	10
2.1	Notion d'indétermination quantique	10
2.2	Principe d'indétermination d'Heisenberg	11
2.3	Application à la diffraction d'un jet d'atome	12
3	Quantification des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène	13
3.1	Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène	13
3.2	Transition entre niveaux d'énergie stables	15



Savoirs ♥

- ▷ ♥ Notion de dualité onde-particule à l'échelle quantique
- ▷ ♥ **Modèle corpusculaire de la lumière**
 - ▷ notion de photons et ses propriétés
 - ▷ échange d'énergie avec un photon
 - ▷ expérience de l'effet photo-électrique et son interprétation en terme de photon
- ▷ ♥ **Modèle ondulatoire de la matière**
 - ▷ longueur d'onde de De Brooglie et quand apparaissent les propriétés ondulatoire de la matière
 - ▷ notion de fonction d'onde et ses propriétés
 - ▷ utiliser la fonction d'onde pour calculer la probabilité de trouver un particule dans un intervalle
- ▷ ♥ **Inégalité d'Heisenberg**
 - ▷ notion d'indétermination quantique et résultat aléatoire d'une mesure
 - ▷ ♥ indétermination quantique de position et de quantité de mouvement
 - ▷ inégalité d'Heisenberg
- ▷ ♥ **Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène**
 - ▷ niveau d'énergie d'un électron et nombre quantique principal
 - ▷ processus d'émission et d'absorption d'une onde électromagnétique
 - ▷ analyse de des processus d'émission et d'absorption à l'aide du modèle du photon

Savoir Faire

Analyse de l'effet photo-électrique à l'aide de la notion de photon



Fonction d'onde d'une particule dans un boîte ; analogie avec les modes propres de vibration d'une corde ; quantification de l'énergie



Analyse de la diffraction d'un jet à l'aide de l'inégalité d'Heisenberg

► Qu'est-ce que la mécanique quantique ?

La mécanique quantique est la branche de la physique qui s'intéresse au comportement des systèmes à l'échelle de l'atome ou des particules élémentaires. Ce qu'on appelle "monde quantique" est le monde étudié à l'échelle de ces composants élémentaires de la matière. Il est régi par des règles et des concepts bien différents de ceux qu'on peut observer à notre échelle.

Mais la mécanique quantique est aussi la science de technologies nouvelles omniprésentes dans la vie quotidienne : LASER, transistor, IRM, ...

Objectifs :

parcourir brièvement trois concepts clés de la mécanique quantique :

1. la dualité onde-particule
2. Inégalité d'Heisenberg
3. Quantification de l'énergie

Il sera poursuivi l'année prochaine par la mise en œuvre de concepts plus approfondis.

► Une brève histoire de la mécanique quantique

Jusqu'au début du XX^{ème} siècle, la physique permettait de décrire correctement deux types de phénomènes : **le comportement des particules matérielles et le rayonnement**. Les particules matérielles sont **localisées**, c'est-à-dire qu'à chaque instant, on peut déterminer précisément leurs positions et leurs vitesses. De plus si on connaît la position et la vitesse initiale d'une particule à un instant, la mécanique newtonienne nous permet de connaître la position et la vitesse de la particule à tout instant. Il s'agit de lois physiques **déterministes**. Les ondes électromagnétiques sont bien différentes car elles **occupent une partie étendue de l'espace** et lorsqu'on tente de limiter l'étendue spatiale d'une onde, celle-ci a tendance à s'étaler : c'est le phénomène de diffraction. Les phénomènes électromagnétiques sont décrits par les équations de Maxwell et la théorie de l'électromagnétisme.

Le début du XX^{ème} siècle fut marqué par deux révolutions qui aboutirent à l'introduction de **la mécanique relativiste et quantique** : les lois de la physique classique cessent d'être valables à des vitesses de l'ordre de grandeur de celle de la lumière (domaine relativiste) ou à l'échelle atomique (domaine quantique). Cependant la physique classique apparaît comme une approximation de ces nouvelles théories valable pour la plupart des phénomènes à l'échelle courante. Dans ce cours, nous n'aborderons pas le domaine relativiste mais nous allons nous concentrer sur le domaine quantique.

Pour comprendre la genèse de cette théorie, revenons sur l'exemple de la lumière. **La nature corpusculaire** de la lumière est une idée ancienne : Newton (1643-1727) considérait déjà la lumière comme un flot de particules (le mot photon ne fut inventé qu'en 1926). Cependant, les expériences d'in-

terférences ou de diffraction ne pouvaient s'expliquer qu'à l'aide d'un **modèle ondulatoire** (travaux de Huygens (1629-1695) puis Fresnel (1788-1827)). Maxwell (1831-1879) formalisa la théorie électromagnétique de la lumière en y intégrant notamment l'optique géométrique (on peut montrer que l'optique géométrique est une approximation de la théorie électromagnétique dans le cadre des « faibles » longueurs d'onde).

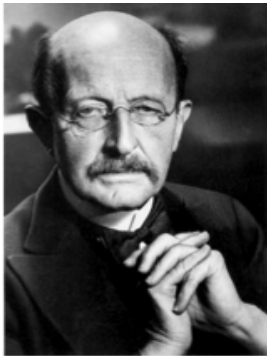
Cependant cette théorie restait impuissante pour expliquer **le rayonnement du corps noir** découvert par Planck en 1900. Einstein résolut le problème en postulant que la lumière était composée de photons d'énergie $h\nu$, ce qui remis au goût du jour l'aspect corpusculaire de la lumière. Dans la théorie de Planck-Einstein, l'interaction d'une onde électromagnétique avec la matière se fait par un processus où le rayonnement apparaît comme constitué de particules : les photons. Ainsi **la lumière peut être décrite de manière équivalente par une onde ou une particule**.

Mais en 1924, **Louis de Bröglie** (prix Nobel en 1929 à 37 ans!) postula que **toute particule matérielle pouvait également être considérée comme une onde**. Cette hypothèse fut vérifiée expérimentalement en 1927 par Davisson et Germer (prix Nobel en 1937) en réalisant une expérience de diffraction avec des électrons. La mécanique quantique était née. Comment traiter la matière ? Comme une onde ou comme une particule ? Aucune théorie connue ne permettait de concilier ces deux visions. Il fallut une révolution intellectuelle pour permettre de mettre au point une nouvelle théorie et y apporter une réponse : **la mécanique quantique**.

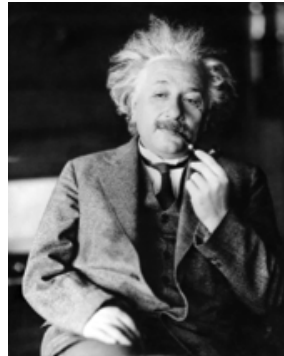
Cette révolution fut notamment menée par **Hei-**

senberg (prix Nobel en 1932) **Schrödinger** (prix Nobel en 1933) et **Dirac** (prix Nobel en 1933). Cette théorie, difficile à accepter pour les physiciens, bou-

leva totalement notre façon de voir le monde et n'a actuellement jamais été mise en défaut.



Max Planck



Albert Einstein



Louis de Broglie



Werner Heisenberg



Erwin Schrödinger



Paul Dirac

1 Dualité ondes-particules

A l'échelle macroscopique, on peut "ranger" tout phénomène ou système physique dans une des deux catégories :

- ▷ **nature ondulatoire** : un transport d'énergie sans transport de matière. *Exemple* : le son, la lumière, la houle, ...

Notions propres

fréquence ; longueur d'onde ; célérité ; ...

$$c = \lambda f$$

Phénomènes "typiques"

diffraction, ondes stationnaires, interférences

- ▷ **nature corpusculaire** : on distingue les contours du système. On peut lui attribuer un centre, une masse, une charge, *Exemple* : un ballon de foot, un électron, le noyau d'un atome,

Notions propres

position ; vitesse ; accélération ; charge ; nombre de particules ; ...

Phénomènes "typiques"

on peut dénombrer et quantifier : un électron, deux masses m ; ...

En mécanique quantique, c'est plus compliqué (*c'est un peu le mantra de ce cours*).

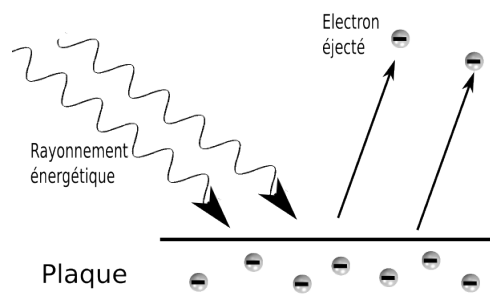
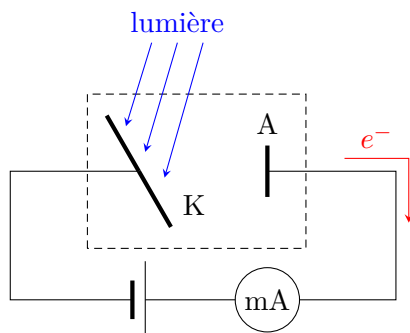
Définition. Dualité onde-particule

A l'échelle de la mécanique quantique, les particules présentent également un caractère ondulatoire et les ondes présentent également un caractère corpusculaire.

On peut donc associer à une particule une onde, et décrire une onde comme un faisceau de particules. C'est ce qu'on va faire dans les deux exemples suivant.

1.1 Nature corpusculaire de la lumière : notion de photon

► Effet photo-électrique



Lorsqu'un métal est éclairé par un rayonnement ultra-violet, des électrons sont extraits du métal et s'en éloigne avec une certaine énergie cinétique ($\sim$ vitesse). C'est l'effet photoélectrique.

En réalisant l'expérience, on remarque deux propriétés importantes :

▷ l'existence d'un seuil :

en dessous d'une certaine fréquence de l'onde lumineuse ν_s , le phénomène n'est pas observé et ce quelque soit la puissance du faisceau lumineux

▷ énergie cinétique des électrons

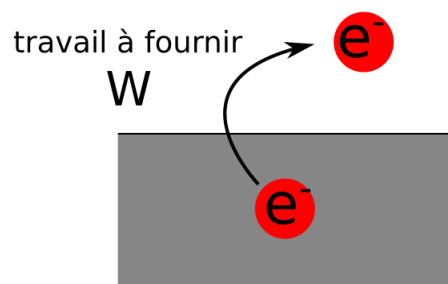
l'énergie cinétique des électrons est indépendant de la puissance du rayonnement lumineux, et croît linéairement avec la fréquence du rayonnement lumineux.

Notion de travail d'extraction

Si on fournit à un électron du métal une énergie $\mathcal{E}$, il sera arraché du métal avec une énergie cinétique E_c égale à :

$$E_c = \mathcal{E} - W$$

où W est le travail d'extraction, c'est-à-dire l'énergie à fournir pour arracher l'électron de la plaque.



Ici $\mathcal{E}$ est apporté par le rayonnement lumineux. Avec une description classique et ondulatoire de la lumière, il suffirait donc d'envoyer un faisceau de lumière suffisamment intense pour arracher les électrons, et ce quelque soit la fréquence de la lumière. Il ne devrait pas avoir l'existence d'un seuil en fréquence !

► Modèle du photon

Propriété. Nature corpusculaire de la lumière et notion de photon

La lumière est une onde électromagnétique à laquelle, à l'échelle quantique, on associe une particule appelé photon.

On peut alors voir de façon très schématique un faisceau de lumière comme un jet de photons, à la manière d'un jet d'eau constitué de minuscules gouttes d'eau.

Théorème. Propriétés du photon

Soit une onde électromagnétique ($\sim$ lumière) de fréquence ν et de longueur d'onde λ . Elle se propage suivant une direction définie par le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Le photon associé à cette émission lumineuse possède :

- ▷ une masse nulle
- ▷ une vitesse égale à la vitesse de la lumière c
- ▷ une énergie $\mathcal{E}_\nu$ donnée par la relation de Planck-Einstein :

$$\mathcal{E}_\nu = h\nu$$

avec h la constante de Planck : $h \simeq 6,6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$.

- ▷ une quantité de mouvement

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}$$

💡💡💡 **Attention !** En mécanique classique, la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$. Ici, on parlera plutôt d'impulsion et on ne dira pas que celle d'un photon est nulle car il n'a pas de masse!!

Propriété. Action d'un photon

Un photon peut être absorbé **entièrement** par une autre particule, lui transmettant alors **toute** son énergie $\mathcal{E}_\nu$. Un système ne peut interagir qu'avec un photon à la fois.

► Retour sur l'effet photo-électrique

Avec ces nouveaux concepts, on peut comprendre l'expérience de l'effet photo-électrique.

▷ effet de seuil

lorsqu'un photon du rayonnement lumineux interagit avec un électron de la plaque, il lui transmet son énergie. L'électron pourra s'extraire de la plaque si seulement l'énergie ainsi transmise est supérieur au travail d'extraction. Soit :

$$\mathcal{E}_\nu > W \quad \text{donc} \quad \nu > \frac{W}{h} = \nu_s$$

▷ énergie cinétique de l'électron

si $\nu > \nu_s$, alors l'électron possède une énergie cinétique

$$E_c = \mathcal{E}_\nu - W = h(\nu - \nu_s)$$

on retrouve bien une dépendance linéaire de E_c vis-à-vis de ν .

► Puissance d'un Laser

On peut se demander dans cette approche particulière que représente la puissance d'un rayonnement lumineux.

Exemple 1 : Un Laser Hélium-Néon émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda = 650 \text{ nm}$ dans le vide avec une puissance $\mathcal{P} = 5 \text{ mW}$.

1. Déterminer le nombre de photon qui sort du Laser par seconde.
2. On dispose d'atténuateur qui permettent de diviser par 100 l'intensité d'un rayonnement électromagnétique le traversant. On envoie des impulsions avec le Laser d'une durée $\tau = 100 \text{ ns}$. Combien faut-il mettre d'atténuateur en sortie du Laser pour n'émettre lors d'une impulsion qu'un seul photon à la fois ?

CORRECTION

1. ▷ **Nature ondulatoire :** pendant un instant Δt , un LASER de puissance $\mathcal{P}$ émet une énergie $\mathcal{E} = \mathcal{P}\Delta t$.
▷ **Nature corpusculaire :** pendant un instant Δt , un LASER émet $N = D\Delta t$ photons, avec D le débit de photon, *i.e.* le nombre de photons émis par secondes.
Chaque photon possède une énergie $\mathcal{E} = h\nu$.

Les deux énergies doivent correspondre donc : $\mathcal{P}\Delta t = Dh\nu\Delta t$ donc $D = \frac{\mathcal{P}}{h\nu}$.

2. En divisant par 100 l'intensité du rayon émis, on divise par 100 l'énergie émise et donc le nombre de photons émis. Sur une émission de τ secondes on émet $\frac{\mathcal{P}}{h\nu}\tau$ photons.
Chaque filtre divise par 100 le nombre donc il faut N filtre tel que :

$$\frac{1}{100^N} \frac{\mathcal{P}}{h\nu} \tau \sim 1 \quad \text{donc} \quad N = \frac{\ln \frac{\mathcal{P}}{h\nu} \tau}{\ln 100}$$

1.2 Nature ondulatoire de la matière

A chaque particule massique (un électron, un ballon de foot, une planète) on peut associer à l'échelle quantique une onde de matière. Avant de s'intéresser à cette dernière, on va se demander quand est-ce que ce monde quantique commence, c'est-à-dire à quelle échelle ?

► Longueur d'onde de De Brooglie

Définition. Longueur d'onde de De Brooglie

A une particule massique possédant une quantité de mouvement $\vec{p}$, on associe une longueur d'onde λ_{dB} appelée longueur d'onde de De Brooglie :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$$

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** à la définition de p !! Pour une particule classique $p = mv$, mais la définition peut changer suivant la branche de la physique concernée.

On peut alors calculer pour différent système la longueur d'onde de De Brooglie associée.

Application 1 : Calculer la longueur d'onde de De Brooglie pour :

- ▷ un ballon de foot tiré lors d'un penalty
- ▷ un électron avec une vitesse $v = 1,0 \times 10^6 \text{ m/s}$
- ▷ un atome de Lithium à 100nK

On admettra que la vitesse d'une particule dépend de sa température via $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$.

Propriété. Domaine du monde quantique

Une particule massique possède des effets quantique, c'est-à-dire ondulatoire, si la taille des objets rencontrés est de l'ordre de la longueur d'onde de De Brooglie.

Lien longueur d'onde de De Brooglie et énergie cinétique

L'énergie cinétique d'une particule est $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$. A l'aide de la définition de la longueur d'onde de De Brooglie on a :

$$E_c = \frac{h^2}{2m\lambda_{dB}^2}$$

► Notion de fonction d'onde

On s'intéressera par la suite uniquement à décrire une particule massique se déplaçant dans un système à une dimension : on introduit pour cela un axe (Ox).

Définition. Fonction d'onde

A une particule massique on associe une fonction d'onde ψ :

- ▷ la fonction d'onde est une fonction de la position et du temps $\psi(x, t)$
- ▷ ψ est une fonction à valeur complexe
- ▷ ψ est une fonction continue de l'espace et du temps
- ▷ la longueur d'onde de la fonction d'onde est la longueur d'onde de De Brooglie λ_{dB}
- ▷ la fonction d'onde est normalisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

La dernière propriété de la fonction d'onde a un lien avec son utilité pratique : situer une particule dans l'espace.

💣💣💣 **Attention !** l'échelle quantique, on décrit une particule par une onde de matière. Tout comme une onde classique, une onde de matière **n'a pas de position!!**

A l'échelle quantique, une particule n'a pas de position. On ne peut donner qu'une probabilité de la trouver) un endroit.

Propriété. Probabilité de trouver une particule

La probabilité de trouver la particule dans un segment infinitésimal de longueur dx est :

$$dP = |\psi(x, t)|^2 dx$$

$|\psi(x, t)|^2$ est appelée densité linéique de probabilité.

La probabilité de trouver la particule entre les abscisses $x = a$ et $x = b$ est donc :

$$\mathcal{P} = \int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx$$

La normalisation de la fonction d'onde vient du fait que si on cherche partout, on finit par trouver la particule. La probabilité de la trouver entre $-\infty$ et $+\infty$ est donc de 1.

► Particule dans un boîte

On considère une particule de masse m dans une boîte qui ne peut se déplacer que suivant un axe, noté (Ox) . On appelle L la longueur de la boîte suivant cette direction. On suppose que la particule ne peut pas pénétrer dans les murs de la boîte.

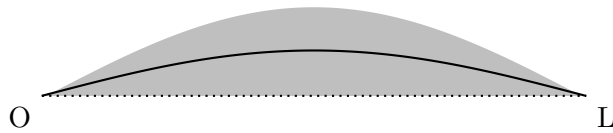
Exemple 2 :

1. Quel graphe d'énergie potentielle permet de représenter une telle situation ?
2. Donner les conditions aux limites vérifiées par la fonction d'onde au niveau des deux bords de la boîte ? A quelle système physique bien connu cette configuration est-elle équivalente ?
3. Représenter la fonction d'onde pour les 3 premiers modes propres de vibration.
4. Représenter la densité de probabilité de présence de la particule pour ces 3 modes propres.
5. Pour chaque mode propre, donner la relation entre la longueur d'onde de De Brooglie λ_{dB} et la largeur de la boîte L .
6. Montrer que l'énergie mécanique de la particule est quantifiée et s'écrit comme :

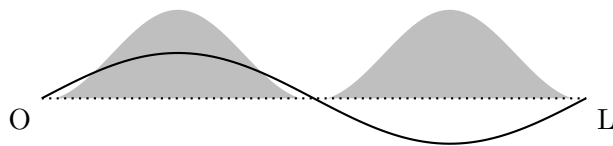
$$\mathcal{E}_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

CORRECTION

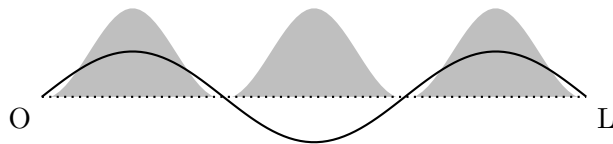
1. Le mouvement d'une particule au sein d'une énergie potentielle quelconque est comparable à celui d'une bille dans un circuit ayant la même forme que l'énergie potentielle. Pour empêcher la particules de pouvoir sortir de la boîte, il faut que l'énergie potentielle soit très grande au niveau des bords : on choisit alors une énergie potentielle infini.
2. La fonction d'onde permet de calculer la probabilité de trouver la particule en une position : $dP(x, t) = |\psi(x, t)|^2 dx$. Or la particule ne peut pas se trouver au delà de $x = 0$ et $x = L$. Donc la probabilité de la trouver est nulle ainsi que la fonction d'onde : $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$.
On retrouve un système équivalent à celui d'une corde de Melde !
3. Comme la corde ...



Fondamental : $\lambda = 2L$
mode propre $n = 1$



Seconde harmonique : $\lambda = L$
(mode propre $n = 2$)



Troisième harmonique : $\lambda = \frac{2L}{3}$
(mode propre $n = 3$)

4. Probabilité : $d\mathcal{P} = |\psi(x, t)|^2 dx$. En mettant la fonction d'onde au carré, on "retourne" les parties négatives dans les positifs (*partie ombrée sur les graphes*).

5. Cf au dessus.

6. 🚫🚫🚫 **Attention !** Une particule de masse m et d'impulsion p possède une énergie $\mathcal{E} = p^2/2m$.

▷ Dans le cas d'une particule "classique", $p = mv$ et on retrouve l'énergie cinétique.

▷ Dans le cas d'une particule quantique, $p = h/\lambda$ et donc $\mathcal{E} = h^2/2m\lambda^2$

Ici on a donc : $\mathcal{E}_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$.

2 Inégalité d'Heisenberg

2.1 Notion d'indétermination quantique

En mécanique quantique, la mesure d'une position n'est plus fixe : la mesure de la position d'une particule quantique donnera des résultats différents même si on répète l'expérience dans les mêmes conditions.

💣💣💣 **Attention !** Cela n'a rien à voir avec le résultat d'un lancé de dés : le résultat est aussi aléatoire mais ce hasard est du au lanceur. On ne lance en fait jamais le dé pile poil de la même façon.

Propriété. Mesure aléatoire en mécanique quantique

Le résultat d'une mesure de position en mécanique quantique est aléatoire. La position d'une particule n'est plus un point de l'espace mais une distribution de probabilité.

Mesure classique versus mesure quantique

▷ **Mesure classique** : lorsqu'on cherche à mesurer une grandeur, par exemple la position d'un grain de riz sur une table, on obtient toujours le même résultat. La position de la particule est fixée, la valeur mesurée n'a pas de raison de varier.

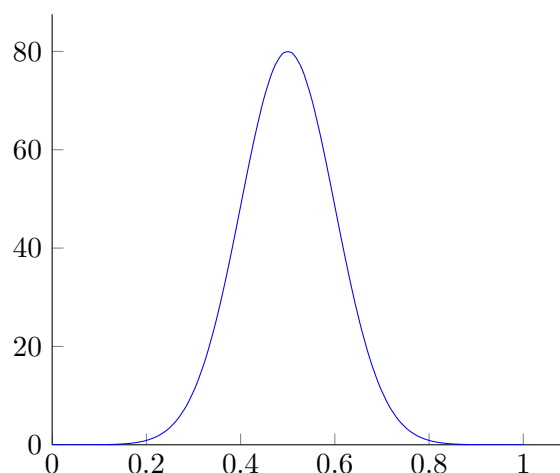
Remarque : le résultat de la mesure peut varier à cause d'erreurs expérimentales. Mais là c'est de notre faute. On suppose par la suite qu'on est infiniment précis.

▷ **Mesure quantique** : lorsqu'on réalise la mesure d'un objet quantique, par exemple la position d'un électron émis, on n'obtient pas à chaque fois la même mesure.

On peut alors ranger nos mesures dans un graphe où on représente :

- ▷ en abscisse le résultat de la mesure
- ▷ en ordonnées le nombre de fois où on l'a obtenue

Pour chaque valeur x possible, on lit en ordonnée la probabilité que la variable mesurée soit égale à x . C'est ce qu'on appelle la distribution de probabilité de la variable.



Dans l'exemple 0.5 est la valeur la plus probable **mais** ça ne veut pas dire que c'est la seule. Chaque grandeur mesurable n'est plus associée à une seule valeur mais à tout un ensemble de valeurs, chacune ayant une certaine probabilité d'arriver.

Définition. Indétermination quantique

L'indétermination quantique d'une grandeur physique (position, quantité de mouvement, ...) correspond à la largeur typique de la distribution de probabilité associée à cette grandeur.

Avec les mains :

▷ **Indétermination quantique de position**

~ la zone de l'espace où la particule étudiée peut être trouvée.

Exemple 3 : Dans l'exemple précédent d'une particule dans une boîte : l'indétermination quantique de la position de la particule vis-à-vis de l'axe (Ox) est égale à la largeur de la boîte :

$$\Delta x = L$$

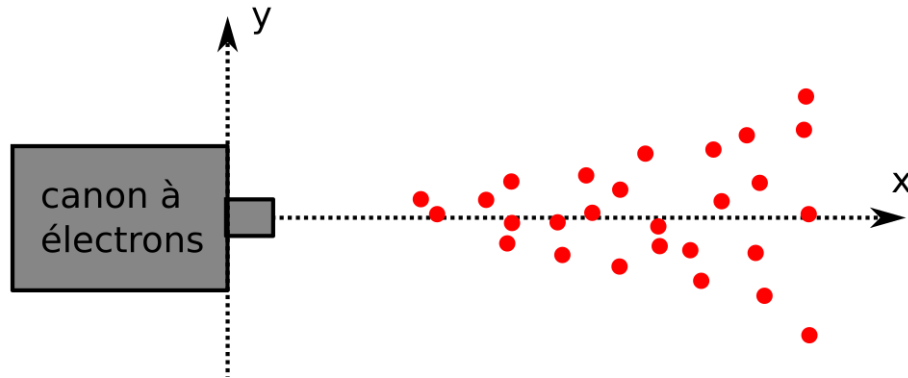
💣💣💣 **Attention !** Ce n'est pas une incertitude de mesure : la particule ne se trouve nulle part avant la mesure. En mesurant sa position, je "force" la particule à transiter dans notre monde "réel" où elle est à une position bien précise. La particule apparaît (on dit qu'elle "collapse") à un endroit précis

compris dans cette incertitude quantique.

Si je refais l'expérience, elle réapparaîtra à une autre position, mais toujours dans cet intervalle Δx .

- ▷ **Indétermination quantique de quantité de mouvement** $\sim$ le cône des direction que peut emprunter la particule.

***Exemple 4 :** On envoie des électrons à l'aide d'un canon à électron et on mesure et on marque d'un rond la position mesurée des électrons au bout d'un temps de vol δt . On répète l'opération un grand nombre de fois et on obtient la figure suivante :*



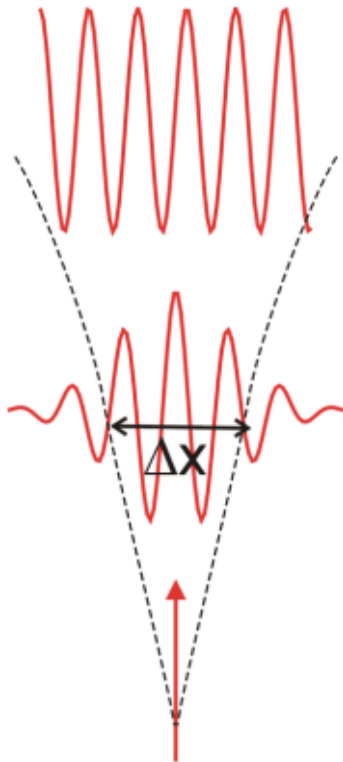
On peut mesurer à l'aide de la figure dessinée par les points de mesure :

- ▷ une indétermination de quantité de mouvement suivant la direction x , notée Δp_x
- ▷ une indétermination de quantité de mouvement suivant la direction y , notée Δp_y .

2.2 Principe d'indétermination d'Heisenberg

Il existe en mécanique quantique des grandeur physique qui sont liées : elles sont qualifiées de **complémentaires**. Un exemple typique est la position et la longueur d'onde.

On imagine une onde unidimensionnelle transverse.



- ▷ dans le premier cas, l'onde est sinusoïdale : elle s'étend à l'infini selon l'axe horizontale. Il est alors :
 - ▷ très facile de dire qu'elle est sa longueur d'onde
 - ▷ impossible de dire où se trouve l'onde
- ▷ dans le deuxième cas, l'étendue de l'onde suivant l'axe horizontale est limitée. Il est alors :
 - ▷ possible d'estimer une plage de variation de sa longueur d'onde
 - ▷ possible d'estimer sa position dans une plage de valeur également
- ▷ dans le troisième cas, l'étendue de l'onde suivant l'axe horizontale est nulle. Il est alors :
 - ▷ impossible d'estimer sa longueur d'onde
 - ▷ possible d'estimer sa position très précisément sa position

Indétermination sur la position et la longueur d'onde

L'augmentation de la précision sur la position x s'accompagne d'une perte de la détermination de la

longueur d'onde.

En mécanique quantique, longueur d'onde et quantité de mouvement sont liées par la relation de De Brooglie :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$$

Propriété. Principe d'indétermination spatiale d'Heisenberg

L'indétermination quantique sur la position x et sur la quantité de mouvement p_x vérifient l'inégalité d'Heisenberg ou principe d'indétermination d'Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

🚫🚫🚫 **Attention !** C'est la quantité de mouvement suivant le même axe (Ox)!!

On remarque alors que plus l'indétermination sur la position de la particule est petite, plus l'indétermination sur sa quantité de mouvement est grande : $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$

En pratique

On utilisera souvent le principe d'Heisenberg en terme d'ordre de grandeur : $\Delta x \Delta p_x \sim h$

2.3 Application à la diffraction d'un jet d'atome

► Rappel sur la diffraction d'une onde

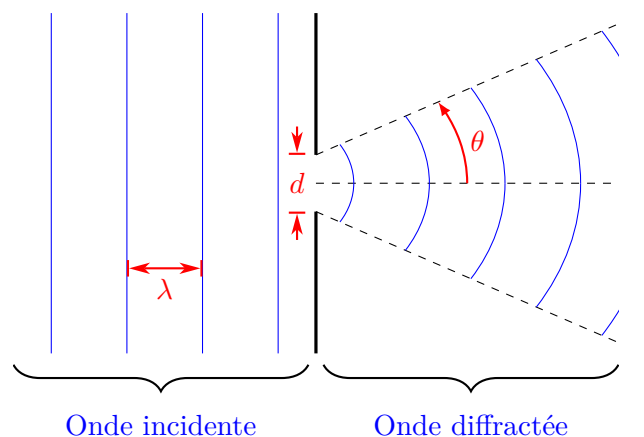
La diffraction est un phénomène de nature ondulatoire : si un phénomène physique peut donner lieu à de la diffraction, alors c'est une onde.

Propriété. Diffraction par une fente mince

Lorsqu'une onde de longueur d'onde λ traverse une ouverture de taille d , elle est ré-émise dans un cône de diffraction de demi-angle d'ouverture θ .

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

En général, les angles considérés sont faibles et $\sin \theta \approx \theta$

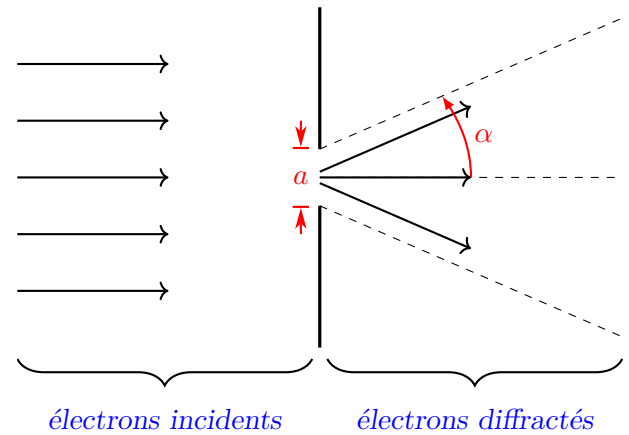


► Diffraction d'un jet d'électrons

| Exemple 5 :

On considère un jet atomique collimaté passant au travers d'une fente de largeur a . Au passage de la fente, le jet atomique subit un phénomène de diffraction, c'est à dire que le demi-angle d'ouverture α du jet atomique en sortie de la fente est non nul.

1. Par analogie avec l'optique, exprimer le demi-angle d'ouverture α du jet atomique en sortie.
2. Donner l'ordre de grandeur de l'indétermination quantique spatiale de position Δx d'un atome en sortie de fente.
3. Donner l'ordre de grandeur de l'indétermination quantique sur la quantité de mouvement Δp_x .
4. Retrouver le phénomène de diffraction et la valeur de α à l'aide du principe d'indétermination d'Heisenberg.



CORRECTION

1. Avec le phénomène de diffraction, on trouverait $\alpha \sim \lambda/a$ avec λ la longueur d'onde des électrons. Ici c'est la longueur d'onde de De Broglie $\lambda = h/mv$

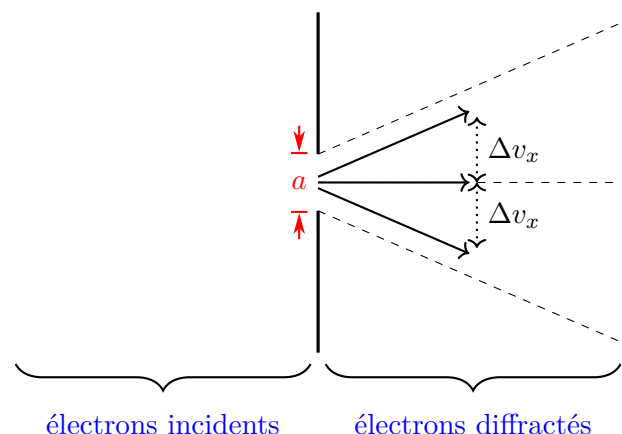
$$\alpha \sim \frac{h}{mva}$$

2. Au moment de passer la fente, l'indétermination quantique spatiale est égale à la largeur de cette dernière : $\Delta x = a$. Autrement dit, je ne sais pas où est l'électron mais il se trouve nécessairement dans la fente lorsqu'il traverse.
3. Avec l'inégalité d'Heisenberg on trouve $\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} = \frac{h}{a}$.
- 4.

L'indétermination sur l'impulsion crée un indétermination sur la vitesse $\Delta v_x = \Delta p_x/m = \frac{h}{ma}$.

Certains électrons vont traverser la fente en possédant une vitesse verticale. On trouve alors l'angle α géométriquement

$$\tan \alpha = \frac{\Delta v_x}{v} = \frac{h}{mva}$$



3 Quantification des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

3.1 Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

► Hypothèse

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène est le modèle le plus simple qui permet de rendre compte de l'existence de raies atomiques dans les spectres d'émissions. Il repose sur deux grandes hypothèses.

Définition. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

- ▷ l'électron de l'atome d'hydrogène décrit une trajectoire circulaire sur laquelle il ne rayonne pas. Ces orbites sont **quantifiées** (*i.e.* en nombres finis) et repérées par un nombre entier n .
L'énergie d'un électron sur une orbite est :

$$\mathcal{E}_n = -\frac{13,6\text{eV}}{n^2}$$

n est appelée **le nombre quantique principale de l'orbite**.

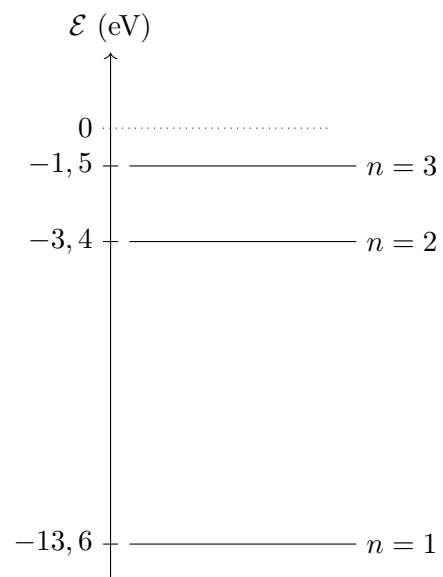
L'électron-Volt est une unité de mesure d'énergie : $1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\text{J}$. Elle est donc adaptée à la mesure de très petites énergies.

- ▷ un électron peut **passer d'une orbite à une autre par émission ou absorption d'énergie électromagnétique**. Cette émission/absorption est égale à la différence d'énergie entre les deux orbites.

► Représentation des niveaux d'énergie

Dans le modèle de Bohr, le niveau d'énergie accessible à un électron d'un atome d'hydrogène sont en nombre fini : ce sont les niveaux d'énergie de l'atome. Ils correspondent à des orbites stables, appelées état quantique stationnaire. On peut les représenter sur un axe verticale en précisant la valeur du nombre quantique principale et l'énergie associée.

Tous les niveaux d'énergies stables sont négatifs : un niveau d'énergie positif correspond à un état instable de la matière, on parle d'atome ionisé.

**Définition. État fondamentale, état excités, état ionisé**

- ▷ l'état quantique de plus basse énergie $n = 1$ est appelé état fondamental
▷ les autres niveaux d'énergies sont appelés état excités

Tous ces niveaux d'énergies correspondent à des états stables de la matière.

- ▷ Un état d'énergie positive correspond à un atome ionisé.
L'énergie d'ionisation à fournir à un atome d'hydrogène à partir de son état fondamental est $\mathcal{E}_{ion} = 13,6\text{eV}$.

3.2 Transition entre niveaux d'énergie stables

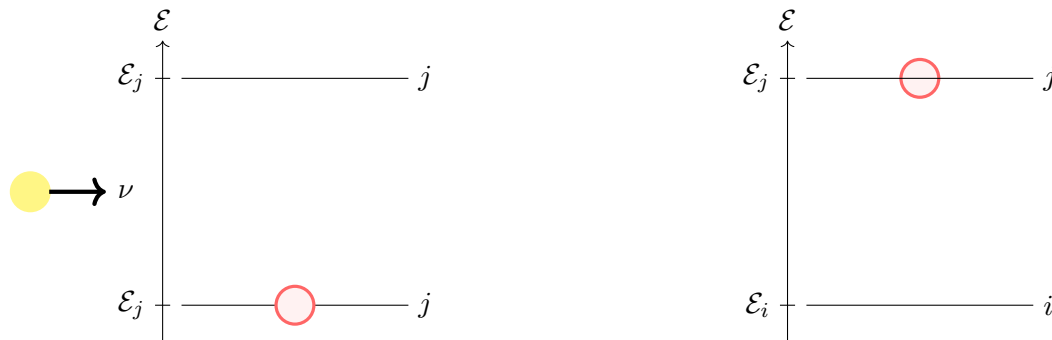
Un électron peut transiter d'un niveau d'énergie à un autre via l'absorption ou l'émission d'une onde électromagnétique. On considère un électron passant d'une orbite i à une orbite j :

▷ Absorption d'un photon

si $i < j$ alors $\mathcal{E}_i < \mathcal{E}_j$: pour transiter de $i \rightarrow j$, l'électron doit augmenter son énergie via **l'absorption** d'une onde électromagnétique.

Pour que l'absorption se fasse, l'énergie du photon doit être exactement égale à la variation d'énergie $\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i$ de l'électron. Par la relation de Planck-Einstein, la fréquence ν du photon doit être égale à :

$$\nu = \nu_{ij} = \frac{\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i}{h}$$



▷ Émission d'un photon

si $i > j$ alors $\mathcal{E}_i > \mathcal{E}_j$: en transitant de $i \rightarrow j$, l'électron diminue son énergie via **l'émission** d'une onde électromagnétique.

L'énergie du photon émis est égale à la variation d'énergie $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j$ de l'électron. Par la relation de Planck-Einstein, la fréquence ν du photon doit être égale à :

$$\nu = \nu_{ij} = \frac{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j}{h}$$





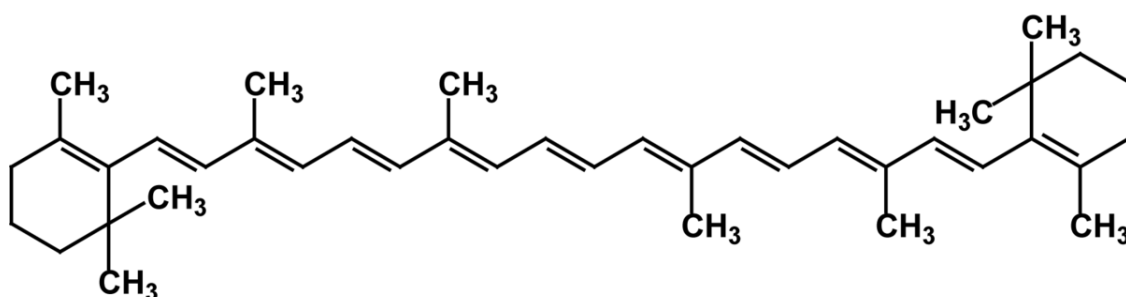
La couleur des carottes

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Spectre d'absorption du β -carotène

Les carottes, ça rend aimable et en plus, ça a une jolie couleur orangée. Cherchons à savoir pourquoi ...

La molécule donnant sa couleur aux carottes est le β -carotène : cette molécule, représentée ci-dessous, possède une longue chaîne carbonée composée de doubles liaisons carbone-carbone. Les électrons des doubles liaisons sont moins liés au noyau que dans les liaisons simples et peuvent se déplacer librement sur l'ensemble de la molécule. On modélise alors la molécule de β -carotène comme un puits quantique unidimensionnel de profondeur infinie compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$, où $L = 1,83\text{nm}$ est la longueur de la molécule.



On considère dans un premier temps un unique électron de masse $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$ se déplaçant dans la molécule. La fonction d'onde associée à cet électron est :

$$\psi(x, t) = A \cos(kx + \varphi) e^{j\omega t}$$

où A , k , ω et φ sont des constantes réelles.

On rappelle $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\text{SI}$ et $c = 3,00 \cdot 10^8\text{m/s}$.

1. Donner les unités de h .
2. Que vaut $\psi(0, t)$ et $\psi(L, t)$? On justifiera proprement sa réponse.
3. En déduire une valeur de φ et montrer alors que k ne peut prendre que des valeurs discrètes, notées k_n , qu'on exprimera en fonction de L et d'un entier naturel n .
4. Donner le sens physique de la condition de normalisation de l'onde :

$$\int_0^L |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

En déduire une expression de la constante A en fonction de L .

Astuce : $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$.

On trouve alors que le mode propre n de vibration de l'onde est : $\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) e^{j\omega t}$

5. Donner la longueur d'onde λ_n du mode propre n . Comment appelle-t-on cette longueur d'onde ?
6. Donner l'expression général des niveaux d'énergie $\mathcal{E}_n$ en fonction de h , L , m_e et n .

Dans le β -carotène il y a 22 électrons libres de se déplacer sur la molécule. Selon le principe de Pauli, un niveau d'énergie ne peut contenir que deux électrons.

7. Représenter sur un diagramme énergétique les différents niveaux d'énergie et les remplir.
8. Donner alors le plus haut niveau d'énergie occupé, noté $\mathcal{E}_{HO}$, et le plus bas vacant, noté $\mathcal{E}_{BV}$. Faire l'application numérique.
9. En déduire la longueur d'onde du photon le plus bas en énergie pouvant être absorbé par cette molécule.
10. Expliquer alors la couleur du β -carotène.



La couleur des carottes

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

1. Relation de Planck Einstein : $\mathcal{E}_\nu = h\nu$ donc $h = \frac{\text{énergie}}{\text{fréquence}} = \text{J.s} = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$
2. La fonction d'onde permet de calculer la probabilité de trouver la particule en une position : $dP(x, t) = |\psi(x, t)|^2 dx$. Or la particule ne peut pas se trouver au delà de $x = 0$ et $x = L$. Donc la probabilité de la trouver est nulle ainsi que la fonction d'onde : $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$.
3. *C'est comme la corde de Melde !!!*
 ▷ en $x = 0$: $\psi(x = 0, t) = A \cos(\varphi) e^{j\omega t} = 0$ donc $\varphi = \pm\pi/2$.
 ▷ en $x = L$: $\psi(x = L, t) = A \cos(kL \pm \pi/2) e^{j\omega t} = 0$ donc $\sin kL = 0$.
 On trouve alors $kL = n\pi$ donc $k = \frac{n\pi}{L}$. On trouve bien des vecteurs d'ondes quantifiés : $k_n = n\pi/L$.
4. Le terme dans l'intégrale $|\psi(x, t)|^2 dx$ représente la probabilité de trouver la particule à l'abscisse x . L'intégrale $\int_0^L |\psi(x, t)|^2 dx$ représente la probabilité de trouver la particule entre l'abscisse $x = 0$ et $x = L$. Comme l'électron se trouve nécessairement entre ces deux positions, cette probabilité est nulle.

On a alors

$$\int_0^L |\psi(x, t)|^2 dx = \int_0^L |A \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) e^{j\omega t}|^2 dx = A^2 \int_0^L \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = A^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(2n\pi \frac{x}{L}\right)\right) dx$$

On découpe l'intégrale en deux :

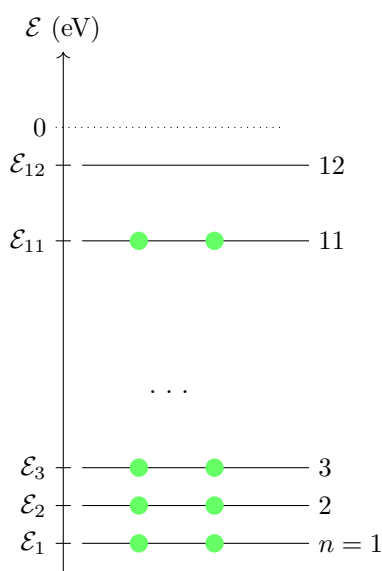
$$\int_0^L \frac{1}{2} dx = \frac{L}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^L -\frac{1}{2} \cos\left(2n\pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{-L}{4n\pi} \left[\sin 2\left(n\pi \frac{x}{L}\right)\right]_0^L = 0$$

Finalement : $\int_0^L |\psi(x, t)|^2 dx = A^2 \frac{L}{2}$ donc $A = \sqrt{2/L}$.

On trouve alors que le mode propre n de vibration de l'onde est : $\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) e^{j\omega t}$

5. Lien longueur d'onde-vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$. On retrouve la longueur d'onde de De Brooglie.
6. **Attention !** Une particule de masse m et d'impulsion p possède une énergie $\mathcal{E} = p^2/2m$.
 ▷ Dans le cas d'une particule "classique", $p = mv$ et on retrouve l'énergie cinétique.
 ▷ Dans le cas d'une particule quantique, $p = h/\lambda$ et donc $\mathcal{E} = h^2/2m\lambda^2$
 Ici on a donc : $\mathcal{E}_n = \frac{h^2 n^2}{8m_e L^2}$.

7. On remplit un à un les différents niveaux d'énergies.



8. On a alors $\mathcal{E}_{HO} = \mathcal{E}_{11}$ et $\mathcal{E}_{BV} = \mathcal{E}_{12}$

9. Les plus petites variations d'énergies des électrons se feront alors entre $\mathcal{E}_{11} \leftrightarrow \mathcal{E}_{12}$ soit une différence d'énergie $\Delta\mathcal{E}$.
 Cette variations d'énergies se réalisera par absorption d'un photon de fréquence ν_0 qui vérifie $h\nu_0 = \Delta\mathcal{E}$ soit $\nu_0 = \Delta\mathcal{E}/h = \text{Hs}$.

10. La molécule absorbe des photons de longueur d'onde ce qui correspond à du bleu, donnant par contraste la couleur orangée aux carottes.