Le Soulard

PCSI

Tome 5 : Mécanique I

- *Principes de cinématiques*
- *Forces et lois de Newton*
- *Approche énergétique du mouvement*

Cours de Physique
de première année
de classe préparatoire

Lycée Louis Thuillier

Chap XIV

Cinématiques du point

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ▷ ♡ Lien : position → vitesse → accélération

- ▷ ♡ **Repère de coordonnées cartésiennes**
  - ▷ définir les vecteurs de la base
  - ▷ écrire la position en fonction des coordonnées

- ▷ ♡ **Repère de coordonnées cylindriques**
  - ▷ définir les vecteurs de la base
  - ▷ dérivée des vecteurs de la base cylindrique ; notion de vitesse angulaire
  - ▷ écrire le vecteur position en fonction des coordonnées

- ▷ ♡ **Repère de Frenet**
  - ▷ définir les vecteurs de la base
  - ▷ notion de rayon de courbure
  - ▷ vecteur vitesse et position

Savoir Faire

Utiliser un axe ; faire le lien entre un point et ses coordonnées ; mesurer une distance

Mouvement tournant
- ▷ *Reconnaître une situation où un repère cylindrique est adapté*
- ▷ *Écrire le vecteur position en fonction des coordonnées*
- ▷ *Déduire du vecteur position les vecteurs vitesse et l'accélération*
- ▷ *Retrouver les équations horaires de la vitesse et la position à partir des informations sur l'accélération*

Mouvement rectiligne ou quelconque
- ▷ *Reconnaître une situation où un repère cartésien est adapté*
- ▷ *Écrire le vecteur position en fonction des coordonnées*
- ▷ *Déduire du vecteur position les vecteurs vitesse et l'accélération*
- ▷ *Retrouver les équations horaires de la vitesse et la position à partir des informations sur l'accélération*

Étude d'une trajectoire
- ▷ *Définir les rayons de courbures et introduire la base de Frenet en chaque point*
- ▷ *Tracer les vecteurs vitesse et accélération en fonction de la variation de la vitesse instantanée et du rayon de courbure*

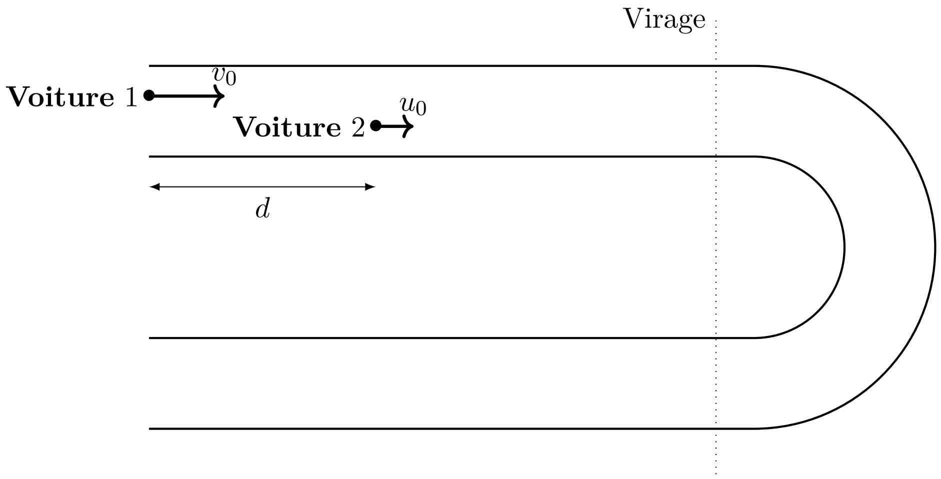
1 Description du mouvement d'un point

1.1 Mise en situation

On cherche à décrire le mouvement de deux voitures de courses sur un circuit composé :
- ▷ d'une ligne droite
- ▷ d'un virage circulaire

Les deux voitures vont rouler sur le tronçon rectiligne en ligne droite et elles possèdent le même moteur fournissant la même accélération $a_0 = 10\text{m.s}^{-2}$.

En sortie du précédent virage, on prend une photo au moment où la voiture 1 passe la ligne de départ et on remarque que :
- ▷ la première voiture a une avance $d = 10\text{m}$ par rapport à la seconde
- ▷ la seconde possède une vitesse initiale supérieure à la première $v_0 > u_0$ $v_0 = 30\text{km/h}$.



On s'intéresse ici au **mouvement** de deux systèmes matériels, sans chercher à comprendre ce qui le produit : c'est un problème de **cinématique**.

Définition. Cinématique
La cinématique est la partie de la physique qui décrit le mouvement, indépendamment des causes qui lui ont donné naissance.

Attention ! C'est souvent (*à peu près toujours*) la partie la plus dur des exercices de mécanique !!

1.2 Description du mouvement d'un point

Définition. Point matériel
Un point matériel permet de représenter un système dont la rotation sur lui même n'impacte pas son mouvement.
Son mouvement peut être repéré par trois coordonnées seulement.

Attention ! Assimiler un système à un point matériel dépend de l'échelle du problème considéré.

> ***Exemple 1 :***
> - ▷ *pour étudier le mouvement globale des deux voitures, on peut les assimiler à un point*
> - ▷ *pour étudier en détail le mouvement des roues qui les propulse, il faut prendre en compte leurs rotations : on ne peut pas les assimiler à un point*

▶ Notion de référentiel

Un référentiel est un point considéré comme fixe qui servira de repère à la description du mouvement :
- ▷ pour un spectateur dans les tribunes, la voiture 1 se déplace.
- ▷ pour le conducteur de la voiture 1, ce sont les tribunes qui se déplacent et lui qui reste immobile.

Définition. Référentiel
Un référentiel $\mathcal{R}$ est constitué :
- ▷ d'un point de référence, considéré comme immobile permettant de décrire l'espace **par rapport** à sa position
- ▷ une horloge permettant de mesurer l'écoulement du temps.

Un mouvement est toujours relatif : **sa description dépend du référentiel d'étude.**

Astuce pratique :
choisir un référentiel est choisir un solide/système qu'on considèrera comme fixe pour l'étude qui nous intéresse.
Ex : le sol, la Terre, le Soleil, ...

> **Exemple 2 :** *On choisit ici un point du circuit : le sol sera considéré comme fixe, et ce sont les voitures qui bougeront.* ***On choisit le référentiel terrestre.***
> *On aurait pu choisir la voiture M_1 comme référentiel, mais on se doute qu'au vu du problème ce choix risque de mener à des complications.*

▶ Invariance des distances, invariance du temps

Avec un référentiel on mesure des distances et des intervalles de temps. Nous nous placeront par la suite en **mécanique classique**.

Définition. Mécanique classique
En mécanique classique, la mesure des distances et les intervalles de temps ne dépend pas du référentiel d'étude choisi.

> **Exemple 3 :** *Quelque soit le référentiel d'étude choisi, le spectateur dans les tribunes ou le conducteur de la voiture 1, la voiture fait la même longueur et le temps d'un tour de piste est le même.*

Propriété. Validité de la mécanique classique
La mécanique classique est valable si la vitesse v des systèmes étudiés est très faible devant la vitesse c_0 de la vitesse dans le vide :
$$v << c_0$$

En mécanique relativiste (non-classique), le choix du référentiel influe sur la mesure des distances et l'écoulement du temps.

1.3 Les vecteurs cinématiques

▶ Notion d'origine

On se place dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel, il est toujours possible
- ▷ de trouver un point, noté O, fixe. On repère alors la position du point mobile M **par rapport** à ce point O.
- ▷ de trouver un instant qui nous servira d'origine à la mesure du temps. On repère alors l'instant t d'un évènement **par rapport** à cet instant initial
  - ▷ positif si l'évènement a lieu après l'évènement origine
  - ▷ négatif si l'évènement a lieu avant l'évènement origine

  La valeur absolu du temps représente l'intervalle de temps entre l'évènement considéré et l'origine des temps

> **Exemple 4 :**
> - ▷ ***Origine des temps :*** *on choisit ici l'instant où on a pris la photo*
> - ▷ ***Origine des positions*** *: on choisit la position de la voiture 1*
>
> *Ces deux choix sont complètement arbitraires !*

▶ Les trois vecteurs cinématiques

Définition. Vecteur position
Le vecteur position, noté souvent $\vec{r}$, est le vecteur allant de O à M :

$$\text{position à l'instant t} = \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

Définition. Vecteur vitesse et vitesse instantanée
Le vecteur vitesse, noté $\vec{v}$, représente la variation de la position au cours du temps :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

La vitesse instantanée v est la norme de la vitesse $v(t) = ||\vec{v}(t)||$.

Attention ! Dans le langage courant, et même en science, le mot "vitesse" désigne souvent la **vitesse instantanée**. C'est ce qui apparaît sur un compteur de voiture.

Définition. Vecteur accélération
Le vecteur accélération, noté $\vec{a}$, représente la variation de la vitesse au cours du temps :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

Attention ! Tout comme la vitesse, on parle souvant de *l'accélération* pour désigner *la norme de l'accélération.*

Attention ! Zénon d'Élée ! !
D'après le grec Zénon d'Élée, une flèche qui vole est en fait immobile. En effet, à chaque instant, elle est à une position fixe. Elle est donc à chaque instant au repos. Si on décompose le mouvement en une suite d'instants, elle ne peut donc pas se mouvoir, puisqu'elle est constamment au repos.
Autrement dit $\vec{v}(t_1) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_1) = \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OM}(t_1)\right]$. *Or* $\overrightarrow{OM}(t_1)$ *est une constante donc* $\vec{v}(t_1) = 0$.

A quel personnage célèbre Zénon d'Élée vous fait-il penser ?

▶ Pourquoi l'accélération

On peut se demander pourquoi avoir défini l'accélération ou bien pourquoi s'être arrêté à l'accélération ? On aurait pu définir également la dérivée de l'accélération, et ainsi de suite ....
Comme on le verra plus tard en dynamique, les lois du mouvement porte non pas sur la position, ni sur la vitesse mais sur l'accélération. Inutile alors d'aller plus loin.

Passez pour un amateur en moins de 5s

un mouvement uniforme est un mouvement à vitesse constante : l'accélération est donc nulle

non NON **NON NOOOOOOOOOOOOOOOOON**
Une vitesse constante c'est $v(t)$ =constante pas $\vec{v}$!
Par conséquence :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{0}$$

Également $a = |\vec{a}|$ n'est pas nulle : $a = |\vec{a}| \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

1.4 Introduction d'un repère

Le grand "drame" de la cinématique est qu'on doit utiliser des **vecteurs** ! ! Pour manipuler des **vecteurs**, on le décompose dans un repère.

Définition. Repère et système de coordonnées
Un repère est un ensemble de vecteur unitaires qui vont permettre d'écrire et de décomposer chaque vecteur en trois nombres : ce sont ses coordonnées.

Avec les mains
Avec un repère, tout vecteur se résumer à trois nombres.

Méthode en DS. Quel repère pour quel mouvement ?

- Ça a l'air de tourner autour d'un point : cercle, spirale, ellipse, ... $\Rightarrow$ cylindrique
- Ça n'a pas l'air de tourner autour d'un point : cercle, spirale, ellipse, ... $\Rightarrow$ cartésien

Règle fondamentale :
On ne manipulera jamais des vecteurs ou leur normes pour résoudre les problèmes de cinématiques. On se placera toujours dans un système de coordonnées judicieusement choisi et on manipulera les coordonnées.

> ***Exemple 5 :***
> - *Les voitures se déplaçant en ligne droite jusqu'au virage, un choix de coordonnées cartésiennes semblent plus approprié.*
> - *Les voitures réalisent un mouvement tournant dans le virage, un choix de coordonnées cylindriques semblent plus approprié pour cette partie du circuit.*

Schéma de la résolution d'un problème de mécanique :

2 Système de coordonnées adapté au mouvement : le repère cartésien

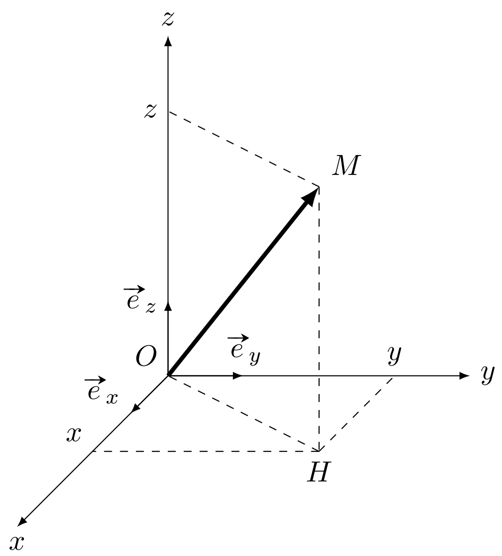
2.1 Description du système

Définition. Coordonnées cartésiennes

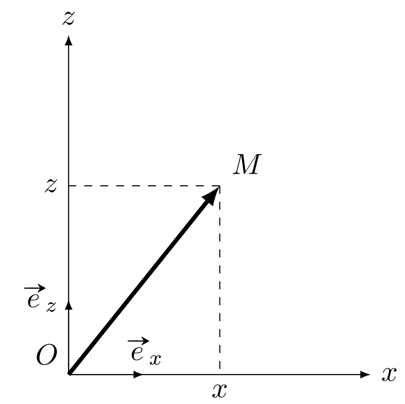
Les coordonnées cartésiennes sont définies dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. La position d'un point M est alors défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z}$$

En 3D



En 2D



Attention ! les vecteurs de la base cartésienne sont fixes !

Vocabulaire :

1. Un repère est dit **orthonormé** si
   - ▷ les vecteurs de base sont **unitaires**, *i.e.* de norme 1 : $||\vec{e}_x|| = ||\vec{e}_y|| = ||\vec{e}_z|| = 1$
   - ▷ ils sont tous orthogonaux entre eux : $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z \perp \vec{e}_x$

2. Un repère est dit **direct** si $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$. Il s'agit d'un produit vectoriel.

   Test : on utilise sa main droite :
   - ▷ le pouce pointe dans la direction du premier vecteur
   - ▷ l'index pointe dans la direction du deuxième vecteur
   - ▷ le majeur doit pointer dans la direction du troisième

2.2 Vecteurs cinématiques

Point méthode :
on écrira toujours en début d'exercice les vecteurs cinématiques : cela correspond à l'aller.

▶ Vecteur position

Définition. Position en repère cartésien
La position d'un point M au cours du temps s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) + \vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

avec $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ ses coordonnées suivant les axes x, y et z.

Attention ! Comme le point M se déplace, ses coordonnées sont des **fonctions du temps** !!

▶ Vecteur vitesse

Pour obtenir la vitesse on dérive la position :

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t) + \vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z\right]$$

Attention ! La dérivée de $x(t)\vec{e}_x$ se traite comme la dérivée d'un produit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)\vec{e}_x\right] = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + x(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}$$

Les vecteurs de la base cartésienne sont fixes, donc invariables dans le temps :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t} = 0$$

Finalement on a

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$$

Propriété. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes
La vitesse d'un point mobile M en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

▶ Vitesse instantanée

La vitesse instantanée, souvent appelée vitesse "tout court", est la norme du vecteur vitesse :

$$v(t) = |\vec{v}(t)|$$

♡ *Instant math* ♡ :
la norme d'un vecteur $\vec{A}$ de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans une base orthonormée est :

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Propriété. Vitesse instantanée
La vitesse instantanée v s'écrit comme :

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

Attention ! Ne pas confondre vecteur vitesse et vitesse. Notamment :

> ***Exemple 6 :*** *"Se déplacer à vitesse constante" signifie que la **norme** v du vecteur vitesse est constante. Ce dernier pouvant varier de direction, $\vec{v}$ bouge au cours du temps. L'accélération n'est pas nulle.*

▶ Vecteur accélération

A l'aide d'un raisonnement similaire et en utilisant le lien vitesse-accélération, on obtient :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z$$

Propriété. Accélération en coordonnées cartésiennes
L'accélération d'un point mobile M en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

De la même façon que précédemment, l'accélération désigna la norme du vecteur accélération.

2.3 Retour à notre course de voiture

> ***Exemple 7 :***
>
> *On reprend l'étude de la course de voiture et on s'intéresse uniquement au mouvement de la voiture 1. On rappelle :*
> - ▷ *initialement la voiture 1 est sur la ligne de départ, origine de l'axe (Ox)*
> - ▷ *elle possède avec une vitesse initiale v_0*
> - ▷ *elle roule en ligne droite jusqu'au virage avec une accélération a_0=10m.s^{-2}*
>
> *Le tronçon de route droite avant le virage fait une distance $D = 300$m.*
>
> 1. *Introduire un système de coordonnées adapté à la description du mouvement et écrire les trois vecteurs cinématiques.*
> 2. *Donner l'évolution de la vitesse instantanée v_1 de la voiture au cours du temps.*
> 3. *Donner l'évolution de la position x_1 de la voiture au cours du temps.*
> 4. *Donner le temps T_1 que la voiture 1 met à parcourir le tronçon.*
> 5. *Exprimer la vitesse de la voiture 1 en fonction de sa position $v_1(x_1)$. (pour simplifier les calculs on prendra $v_0 = 0$)*

Méthode en DS. Résoudre un exercice
C'est vrai tout le temps mais encore plus en mécanique :

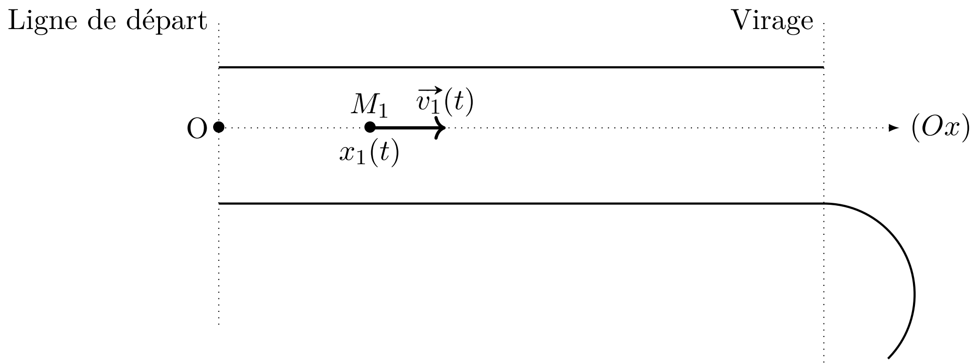
"Quand je ne sais pas quoi faire je fais des choses intelligentes (*i.e.* des choses du cours)"

Ici, ce que je sais faire c'est écrire les vecteurs cinématiques. C'est parti !

REPONSE

1. ▶ **Définition du repère de coordonnées**
Ici notre voiture se déplace en ligne droite : je choisis un système de coordonnées cartésien, et je fais correspondre l'axe x avec la direction de propagation de la voiture.
De plus je choisis comme origine O la position de la ligne de départ.

Attention ! Un schéma SCHEMA **SCHEMA** ***SCHEMA*** est indispensable INDISPENSABLE **INDISPENSABLE** ***INDISPENSABLE***.
On fait apparaître :
▷ la position du point M étudié à un instant quelconque ainsi que sa vitesse
▷ l'origine du repère et les vecteurs de la base
▷ les coordonnées du point M



▶ **Vecteur cinématiques**
▷ **Position**
Le point M_1 ne se déplace que suivant une seule direction, on a : $\overrightarrow{OM}(t) = x_1(t)\vec{e}_x$.
Les autres coordonnées sont prises égales à zéro par un choix judicieux de l'origine.
▷
▷ **Vecteur vitesse**
Le vecteur vitesse s'obtient **TOUJOURS** par dérivation du vecteur position.

$$\vec{v}_1(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_1(t)\vec{e}_x\right] = \dot{x}_1(t)\vec{e}_x$$

La vitesse instantanée $v(t)$ est donc : $v_1(t) = \dot{x}_1(t)$.
▷ **Accélération** Le vecteur accélération s'obtient **TOUJOURS** par dérivation du vecteur vitesse.

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}_1(t)\vec{e}_x$$

2. ▶ **Utilisation des loi de la mécanique ou de l'énoncé**
C'est ici que prendra place le PFD. Pour le moment, on utilise l'énoncé qui nous dit : $|\vec{a}| = a_0$. Par conséquent :

$$\ddot{x}_1(t) = a_0$$

Attention ! On vient d'obtenir une information sur les coordonnées de M. Ceci n'est possible uniquement parce qu'on a exprimé l'accélération $\vec{a}$ de M à l'aide de ses coordonnées : c'est *l'aller"*

▶ **Retour aux coordonnées : vecteur vitesse et position**
Désormais on fait le *"retour"* : à l'aide des informations obtenues sur l'accélération, on trouve la vitesse et la position.

▷ **Vecteur vitesse :**
On a $\ddot{x}_1(t) = a_0$. En intégrant une fois cette expression on obtient $\dot{x}_1(t)$.

♡ *Instant math* ♡
On a donc $\dot{x}_1(t) = a_0 t + K$, avec K une constante d'intégration.

Astuce pratique :
- ▷ toute intégration fait apparaître une constance inconnue à déterminer
- ▷ on trouve ces constantes grâce aux conditions initiales

CI : on a $v(t=0) = v_0$ donc $K = v_0$:

$$v(t) = \dot{x}_1(t) = a_0 t + v_0$$

▷ **Vecteur position :**
On intègre l'expression précédente pour obtenir $x_1(t)$:

$$x_1(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t + C$$

avec C une constante d'intégration à déterminer.

CI : on a $x_1(t=0) = 0$ donc $C = 0$:

$$x_1(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t$$

3. *Il faut traduire en formule mathématiques le français*

le temps T_1 que le voiture met à parcourir le tronçon : $x_1(T_1) = D$

On cherche alors $\frac{a_0}{2}T_1^2 + v_0 T_1 = D$. C'est un polynôme d'ordre 2, on résout et on garde la solution positive !

$$T_1 = -\frac{v_0}{a_0} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{a_0^2} + 8\frac{D}{a_0}}$$

4. On veut obtenir l'évolution de v_1 en fonction de x_1. On a : $\begin{cases} x_1(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + v_0 t = \frac{a_0}{2}t^2 \\ v_1(t) = a_0 t + v_0 \end{cases}$

On cherche alors à exprimer t en fonction de x_1 puis on remplace dans v_1 :

$$\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2x_1}{a_0}} \\ v_1(t) = a_0\sqrt{\frac{2x_1}{a_0}} + v_0 = \sqrt{2a_0 x_1} + v_0 \end{cases}$$

> **Application 1 :** *On rappelle :*
> - ▷ *initialement la voiture 2 est à une distance d de la ligne de départ*
> - ▷ *elle s'élance avec une vitesse initiale nulle*
> - ▷ *elle roule en ligne droite jusqu'au virage avec une accélération a_0=10m.s^{-2}*
>
> *En reprenant pas à pas la méthode, montrer que la position de la voiture 2 est donnée par :*
>
> $$x_2(t) = \frac{a_0}{2}t^2 + d$$

> **Application 2 :** *On étudie le mouvement de l la voiture 2. A $t = 0$, la voiture 2 :*
> - ▷ *est à $d = 10$m en avant de la ligne de départ*
> - ▷ *avec une vitesse initiale u_0*
> - ▷ *elle roule en ligne droite jusqu'au virage avec une accélération progressive $a(t) = a_0\frac{t}{\tau}$ avec $\tau = 5$s.*
>
> *Donner la loi horaire $x_2(t)$ de la voiture 2 au cours du temps*

3 Système de coordonnées adapté au mouvement : le repère cylindrique

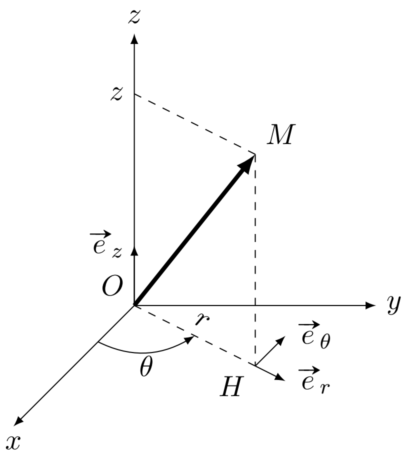
On s'intéresse désormais à la seconde partie du circuit : les voitures vont réaliser un virage à 180 degrés. Nous pouvons continuer à utiliser notre système de coordonnées précédents, mais celui-ci sera mal adapté à décrire un mouvement tournant. On introduit un système de coordonnées cylindrique

Attention ! Tous les systèmes de coordonnées sont généralement définis à partir d'un système cartésien.

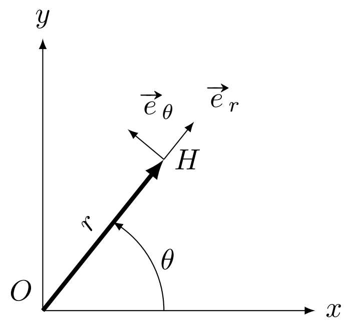
3.1 Les coordonnées cylindriques

Définition. Coordonnées cylindriques
Le repère est défini par l'origine **fixe** O et la base orthonormée directe constituée des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ définis comme sur la figure suivante.
Attention ! Les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont **mobiles** avec le mouvement du point M.

A 3D : base cylindrique



A 2D : z =constante $\Rightarrow$ base polaire



$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$$

Les coordonnées d'un point M sont r, θ et z.

Définition. Position en repère cylindrique
La position d'un point M est alors défini par le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}\,.$$

Attention !

Attention ! La coordonnées θ n'apparaît pas explicitement dans le vecteur position

$$JAMAIS \text{ on écrit } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$$

Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de θ et donc du temps

$$\vec{e}_r \to \vec{e}_r(t) \text{ et } \vec{e}_\theta \to \vec{e}_\theta(t)$$

3.2 Dérivée des vecteurs de la base cylindrique

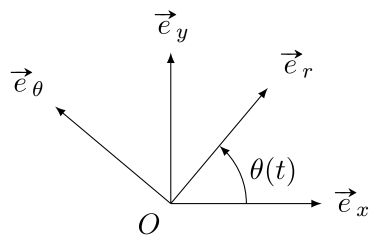
C'est quoi le problème ?
Pour obtenir le vecteur vitesse, il nous faudra dériver le vecteur position.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z\right]$$

Attention ! $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent du temps.
Il faut calculer $\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$!!

► Changement de base

Pour exprimer les dérivées des vecteurs de base, nous allons utiliser les formules de changement de base entre la base polaire et la base cartésienne. On se place dans le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.



$$\vec{e}_r = \cos\theta(t)\,\vec{e}_x + \sin\theta(t)\,\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta(t)\,\vec{e}_x + \cos\theta(t)\,\vec{e}_z\ .$$

Ainsi, les vecteurs cartésiens étant fixe, on en déduit les dérivées des vecteurs de base

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta(t)\,\vec{e}_z = \dot{\theta}\left(-\sin\theta(t)\,\vec{e}_x + \cos\theta(t)\,\vec{e}_z\right)$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos\theta(t)\,\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta(t)\,\vec{e}_z = -\dot{\theta}\left(\cos\theta(t)\,\vec{e}_x + \sin\theta(t)\,\vec{e}_y\right)\ .$$

Propriété. Dérivées des vecteurs de la base polaires :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_r\ .$$

Attention ! Ces formules sont à connaitre ABSOLUMENT !!

Astuce pratique :
Pour dériver on utilise toujours ces deux formules, on ne revient pas aux changement de bases !!

> *Application 3 : Calculer* $\frac{d^2\vec{e}_r}{dt^2}$ et $\frac{d^2\vec{e}_\theta}{dt^2}$

3.3 Les vecteurs cinématiques

▶ **Vecteur position**

Propriété. Position
Le vecteur position est évidemment défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) + z(t)\vec{e}_z} \,.$$

▶ **Vecteur vitesse**

À l'aide des relations précédentes, on peut calculer le vecteur vitesse. Le vecteur vitesse est défini par

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r(t)\vec{e}_r + z(t)\vec{e}_z\right] \;;\\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z + z(t)\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t} \;;\\ &= \dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta + \dot{z}(t)\vec{e}_z \,.\end{aligned}$$

Propriété. Vecteur vitesse
Le vecteur vitesse est défini par

$$v(t) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

Définition. Vitesse angulaire
La grandeur $\dot{\theta}$ est appelée la vitesse angulaire, et s'exprime en rad.s−1.

> *Exemple 8 : Donner la vitesse angulaire d'une trotteuse d'horloge.*
> *L'aiguille tourne à vitesse angulaire constante autour d'un point O dans le indirect. Elle réalise un tour en 1 minute. La vitesse angulaire étant constante on peut l'évaluer simplement :*
>
> $$\dot{\theta} = -\frac{\textit{angle parcouru}}{\textit{temps de parcours}} = \frac{2\pi}{60} = 1,6\ 10^{-1} rad.s^{-1}$$
>
> *Le "-" provient du fait que l'aiguille tourne dans le sens indirect.*

Attention ! Un mouvement à vitesse constante implique que la **norme** de la vitesse est constante, pas le vecteur vitesse ! !

$$v(t) = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2} \;\text{ est constant}$$

▶ **Vecteur accélération**

Attention ! A ne pas apprendre par cœur mais à retrouver suivant les cas ! ! Souvent le problème simplifiera l'expression.

Cas 1 : mouvement à rayon constant $r(t) = R$

▷ Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\vec{e}_r$$

Attention ! Comme $\vec{e}_r$ dépend du temps, la position dépend également du temps même si $r = R$ est fixe ! !

▷ Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\vec{e}_r\right] = \dot{R}\vec{e}_r + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{e}_r\right]$$

On a : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

▷ Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right]$$

Soit :

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r$$

Finalement : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Cas général :

Propriété. Accélération

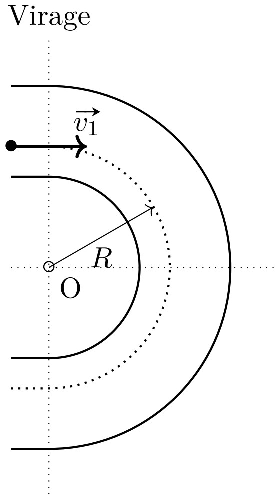
Le vecteur accélération en coordonnées cylindriques

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

Attention ! ON N APPREND PAS L EXPRESSION PAR CŒUR !!!

| *Application 4 : Démontrer la relation précédente.*

3.4 Retour à notre course de voiture



On s'intéresse au mouvement de la voiture 1 lors du virage. Lors de ce virage, elle conserve une trajectoire circulaire, de rayon $R_1 = 80$m et de centre O.
On suppose que la voiture 1 entre dans le virage avec une vitesse v_0.

1. Écrire les vecteurs cinématiques de la voiture 1, ainsi que sa vitesse instantanée $v_1(t)$.
2. Exprimer l'accélération de la voiture en fonction de R_1, v_1 et de ses dérivée.

   Le pilote "accélère uniformément" : $v_1(t) = a_0 t$.
3. Exprimer la vitesse et l'accélération instantanée de la voiture.
4. L'adhérence de la route fait que, si l'accélération d'une voiture dépasse 0.75g, elle dérape et fini hors piste.
   A quel instant T la voiture dérape ?

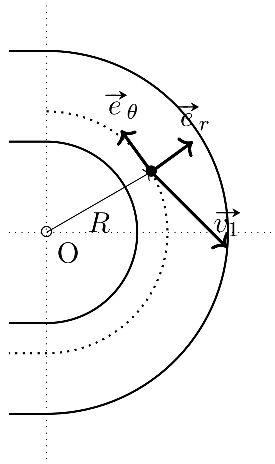
REPONSE

1. ▶ **Définition du repère de coordonnées**
   Ici notre voiture se déplace en réalisant une trajectoire circulaire : je choisis un système de coordonnées cylindrique. Il faut alors définir :
   ▷ le centre O ; ici on prend le centre de la trajectoire
   ▷ l'angle θ : ici on le mesure par rapport à l'axe horizontal
   Attention ! Lorsqu'on utilise un repère cylindrique, on fait attention au choix du centre du repère ! Je choisis comme origine des temps le moment où la voiture engage son virage.

   Attention ! Un schéma SCHEMA **SCHEMA** ***SCHEMA*** est indispensable.

   On fait apparaître :
   ▷ la position du point M étudié à un instant quelconque ainsi que sa vitesse
   ▷ l'origine du repère et les vecteurs de la base
   ▷ les coordonnées du point M

   Virage



   ▶ **Vecteur cinématiques**
   ▷ **Position**
   Le point M se déplace suivant une trajectoire circulaire plane. Je choisis arbitrairement $z = 0$. Grâce au choix pertinent du centre de mon repère je peux écrire :
   $$\overrightarrow{OM}(t) = r\vec{e}_r \text{ et comme } r = R \text{ on a } \overrightarrow{OM}(t) = R\vec{e}_r$$
   ▷ **Vecteur vitesse**
   Le vecteur vitesse s'obtient **TOUJOURS** par dérivation du vecteur position.
   $$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\vec{e}_r\right] = \dot{R}\vec{e}_x r + R\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$
   Ici R est constant donc $\dot{R} = 0$. Finalement :
   $$v(t) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
   La vitesse instantanée s'écrit alors : $v_1(t) = R|\dot{\theta}| = -R\dot{\theta}$ car l'angle diminue au cours du mouvement.
   ▷ **Accélération** *Le vecteur accélération s'obtient **TOUJOURS** par dérivation du vecteur vitesse.*
   $$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R\dot{\theta}\vec{e}_r\right] = R\ddot{\theta}\vec{e}_r + R\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$$
   Soit :
   $$\vec{a}(t) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

2. On a $v_1(t) = -R\dot{\theta}$ donc $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -R\ddot{\theta}$. Finalement
   $$\vec{a} = -\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{v_1^2}{R}\vec{e}_r$$

3. En utilisant l'expression de v_1 on a :
   $$\vec{a} = -a_0\vec{e}_\theta - \frac{a_0^2}{R}t^2\vec{e}_r$$

4. On souhaite que $|\vec{a}(t)| < 0.75g$ donc on cherche T tel que $|\vec{a}(T)| = 0.75g$
   $$\sqrt{a_0^2 + \frac{a_0^4}{R^2}T^4} < 0.75g \Rightarrow T = \frac{\sqrt{R}}{a_0}\left(0.75^2g^2 - a_0^2\right)^{1/4}$$

▶ Utilisation des loi de la mécanique ou de l'énoncé
On sait que la voiture possède une vitesse uniforme sur le virage : sa vitesse est constante.
Attention ! On parle ici de la vitesse **instantanée** $v(t)$!! Le vecteur vitesse $\vec{v}$ lui varie.
On en déduit que

$$v^2(t) = (r\dot{\theta})^2 = v_A \text{ donc que } \dot{\theta}^2 = \frac{v_A^2}{R^2}$$

La vitesse angulaire est constante. Le mouvement est uniforme car il se fait à vitesse constante MAIS le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = v_A \vec{e}_\theta$ varie car $\vec{e}_\theta$ varie.

On a donc $\ddot{\theta} = 0$ et on peut réécrire l'accélération comme :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v_A^2}{R} \vec{e}_r$$

Propriété. Mouvement circulaire uniforme
Lors d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est centripète : orienté suivant $-\vec{e}_r$.

On en déduit donc que, pour que la voiture ne dérape pas il faut que :

$$\frac{v_A^2}{R} < \frac{3}{4} g \Rightarrow v_A < \sqrt{\frac{3}{4} Rg}$$

▶ Retour aux coordonnées : vecteur vitesse et position
La vitesse instantanée $v(t)$ est égale à v_A et s'écrit comme :

$$v(t) = |R\dot{\theta}| = v_A$$

Attention ! La vitesse angulaire possède un signe !!
- $\dot{\theta} < 0$ si le mouvement tourne dans le sens horaire
- $\dot{\theta} > 0$ si le mouvement tourne dans le sens trigonométrique

Le mouvment se fait dans le sens horaire donc $\dot{\theta} = -v_A/R$.
On a trouvé le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = -v_A \vec{e}_\theta$ qui est bien orienté suivant $-\vec{e}_\theta$, comme sur le schéma.
En intégrant $\dot{\theta} = -v_A/R$ on a :

$$\theta(t) = \frac{v_A}{R} t + C \text{ avec C une constante à déterminer}$$

CI : à $t = 0$, la voiture est au début du virage. Elle forme un angle $\theta(t = 0) = \pi/2$. Soit :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{v_A}{R} t$$

Temps de fin de virage :
La voiture finit son virage quand $\theta(T) = -\pi/2$ soit pour un temps T :

$$T = \frac{\pi R}{v_A}$$

En prenant la vitesse maximale $v_A = \sqrt{\frac{3}{4} Rg}$ on obtient un temps limite :

$$T = \pi \sqrt{\frac{4R}{3g}}$$

Finalement le temps du virage augmente avec R : plus on prend un virage peu serré, plus on finira rapidement son virage.

Application 5 : *On étudie désormais le mouvement de la voiture 2. Cette dernière entame son virage avec un rayon $R_2 > R_1$. Elle réalise son mouvement à vitesse angulaire ω constante mais, afin de rattraper la voiture 1, elle réduit progressivement le rayon de sa trajectoire :*

$$r(t) = R_2 e^{-t/\tau}$$

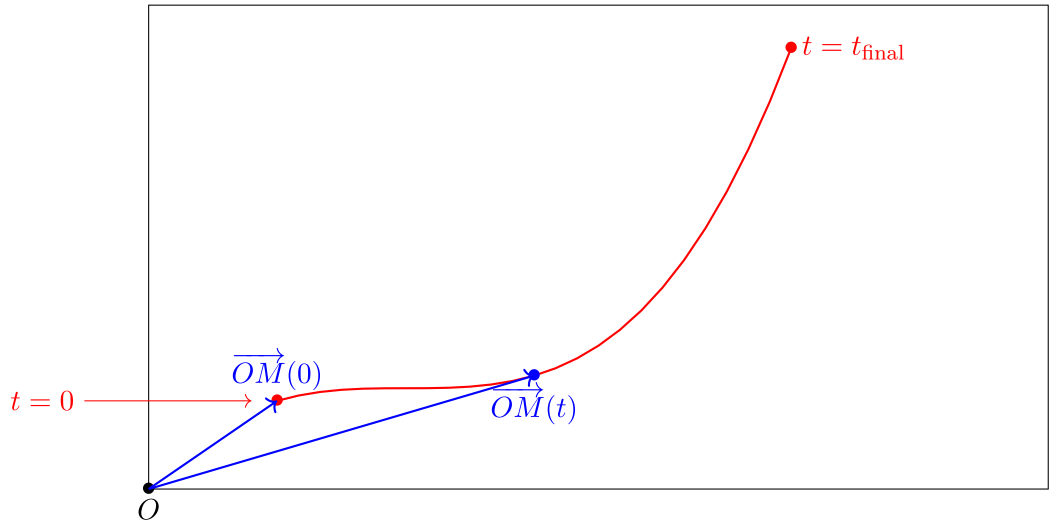
1. *Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction de R_2, τ et du temps.*
2. *Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$.*
3. *Exprimer la vitesse v de la voiture 2 au cours du temps. Donner v_0, la vitesse de la voiture 2 à $t = 0$.*
4. *Pour ne pas se faire "flasher" par un radar, le pilote souhaite maintenir tout au long du virage une vitesse constante $v_0 = 50 km/h$. Montrer que pour ce faire, le pilote doit modifier sa vitesse angulaire ω telle que :*

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{v_0 e^{2t/\tau}}{R_2^2} - \frac{1}{\tau^2}}$$

4 Etude de la trajectoire d'un point et repère de Frenet

4.1 Rappel du lycée : étude d'une trajectoire

On se place **dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$.** On note O le centre du repère et $M(t)$ la position d'un point mobile au temps t.



Définition. Trajectoire
Une **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point M au cours du temps.

Propriété. Vitesse et trajectoire
Le vecteur cinématique vitesse est **tangent** à la trajectoire.

▶ Mouvement accéléré / décéléré / uniforme

Définition.
On dit qu'un mouvement est **accéléré** (resp. **décéléré**) si la norme de la vitesse $|\vec{v}|$ augmente (resp. diminue).
On dit que le mouvement est **uniforme** lorsque $|\vec{v}|$ est constante.

Attention ! On parle de LA NORME $|\vec{v}|$ de la vitesse. LE VECTEUR vitesse $\vec{v}$, notamment sa direction, quant à lui peut varier au cours du temps.

▶ Mesure des vecteurs cinématique à l'aide d'un film

Différence entre vitesse instantanée et vitesse moyenne

- Les vecteurs $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ sont des vecteurs **instantanés**, ils sont définis au temps t quel que soit le temps. Expérimentalement il est **impossible** d'obtenir une information sur ces quantités à tout instant.

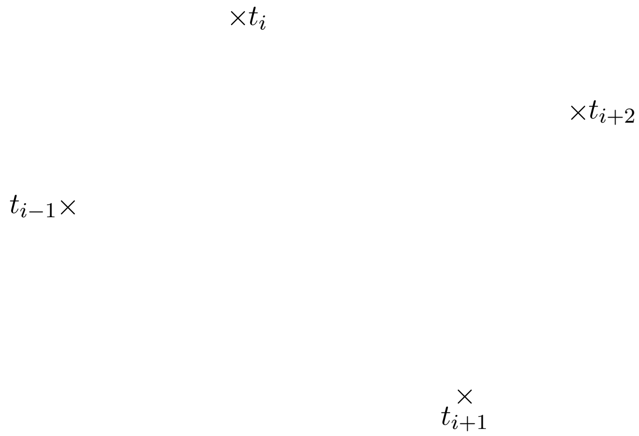
- Lors d'un film par exemple, on enregistre une image à chaque instant t_i avec un intervalle régulier Δt entre eux images : $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. On définit alors, pour tous les temps t_i,
  - le vecteur cinématique position $\overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OM}(t_i)$;
  - le vecteur cinématique vitesse **moyen** par une dérivée discrète
  $$\vec{v}_i = \vec{v}(t_i) = \frac{\overrightarrow{OM}(t_{i+1}) - \overrightarrow{OM}(t_i)}{\Delta t} ;$$
  - le vecteur cinématique accélération **moyen** par une dérivée discrète
  $$\vec{a}_i = \vec{a}(t_i) = \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_i)}{\Delta t} .$$

  On ne mesure que **des grandeurs moyennes** entre deux points. Plus l'intervalle de temps Δt est petit, plus nos mesure moyenne se rapproche de la valeur instantanée.

Application 6 : *Obtenir la position à l'instant t_{i+1} en fonction de $\overrightarrow{OM}_i$, $\vec{v}_i$ et Δt.*

Application 7 : *Obtenir l'expression de l'accélération en fonction des vecteurs positions $\overrightarrow{OM}(t_i)$.*

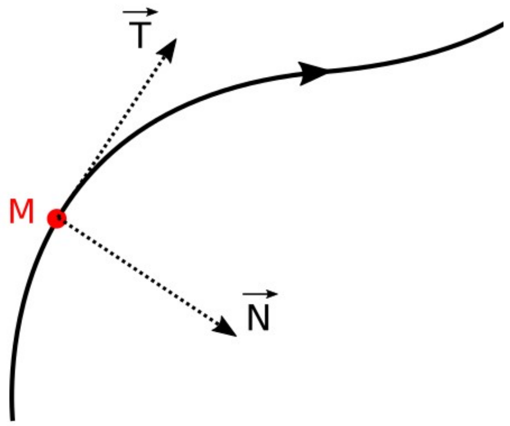
Exemple 9 : *On donne la position d'un point mobile aux instants t_i, t_{i-1} t_{i+1} et t_{i+2} avec $\Delta t = 2s$. Représenter $\vec{v}_i$, $\vec{v}_{i-1}$, $\vec{v}_{i+1}$ et $\vec{a}_i$.*



4.2 Base de Frenet et rayon de courbure

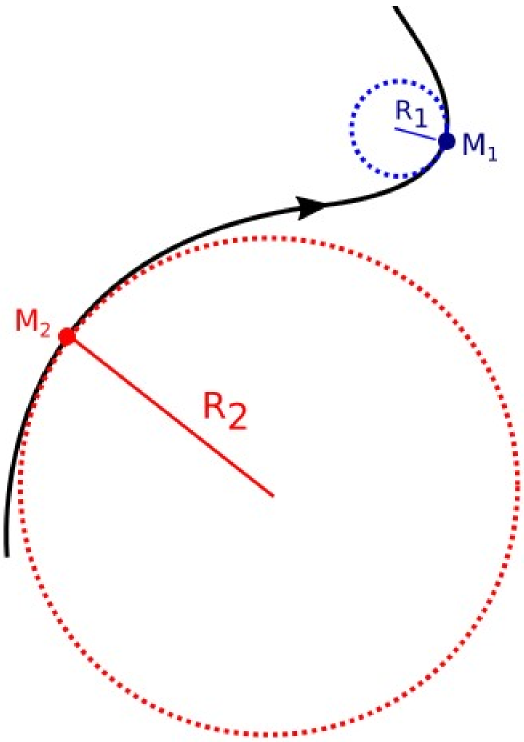
Pour étudier une trajectoire plane, il est parfois utile d'utiliser la base de Frenet

Définition. Base de Frenet
Elle est constitué de deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{\mathcal{T}}$ et $\vec{\mathcal{N}}$ tels que :
- ▷ $\vec{\mathcal{T}}$ est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement
- ▷ $\vec{\mathcal{N}}$ est orthogonal à $\vec{\mathcal{T}}$, orienté vers l'intérieur de la courbe



Attention ! A la différence des coordonnées cylindrique, $\vec{\mathcal{N}}$ est toujours orienté vers l'intérieur de la trajectoire, contrairement à $\vec{e}_r$.

Définition. Rayon de courbure
On appelle rayon de courbure R_M au point M de la trajectoire le rayon du cercle fictif qui superpose localement la trajectoire au point M.



Propriété. Rayon de courbure et forme de la trajectoire
Plus la trajectoire est incurvée, plus le rayon de courbure est grand.

Propriété. Vecteur vitesse et accélération
On appelle $v(t)$ la vitesse instantanée.

▷ **Vecteur vitesse** $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\mathcal{T}}$$

▷ **Vecteur accélération** $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\mathcal{T}} + \frac{v^2(t)}{R(t)}\vec{\mathcal{N}}$$

où $R(t)$ en le rayon de courbure au point M considéré.

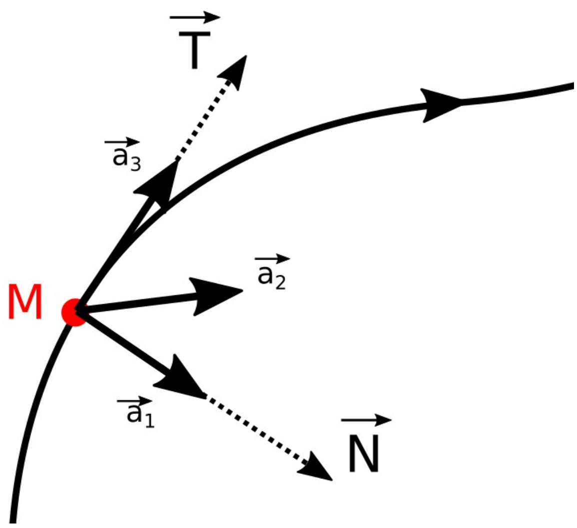
On en conclue deux propriétés importantes :

▷ **Mouvement uniforme**
Alors $v(t)$ =constante et donc :

$$\vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}\vec{\mathcal{N}}$$

L'accélération est orienté suivant l'intérieur de la trajectoire. De plus, à vitesse constante, plus la trajectoire est courbe, plus R est petit donc plus l'accélération est grande

▷ **Si la vitesse instantanée varie**
Plus la vitesse $v(t)$ varie, plus l'accélération s'aligne sur la tangente à la courbe.



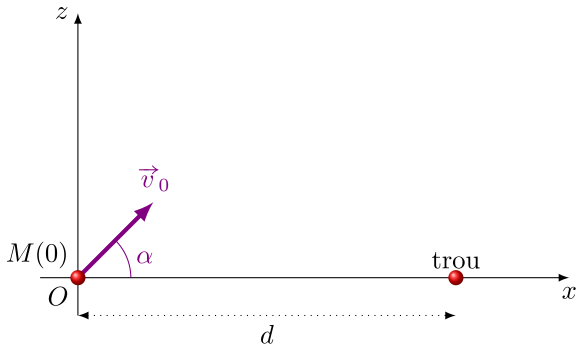
▷ $\vec{a}_1$: $v(t)$ est constante : trajectoire uniforme
▷ $\vec{a}_2$: $v(t)$ augmente, l'accélération se rapproche de $\vec{\mathcal{T}}$.
▷ $\vec{a}_3$: la variation de la vitesse instantanée est très grande

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} >> \frac{v^2(t)}{R(t)}$$

μDm Description de deux mouvements

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Exercice 1



On lance une balle avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale depuis l'origine d'un repère cartésien (Oxz).
A l'aide des lois de la mécanique on peut montrer que :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

avec $\vec{g} = -g\vec{e}_z$

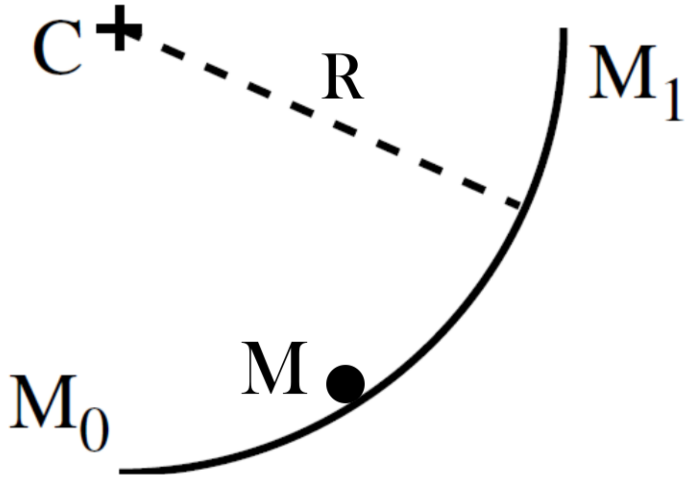
1. Donner les équations horaire $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement.
2. Donner la trajectoire $z[x]$ de la particule.
3. Un trou se trouve à une distance d du point de lancé et on veut que la balle tombe dedans. Montrer qu'il faut donner à la vitesse initiale un angle α tel que :

$$\cos\alpha \sin\alpha = \frac{gd}{2v_0^2}$$

Exercice 2

On étudie le mouvement d'une bille dans une tuyère circulaire de centre C et rayon R depuis le point M_0 jusqu'au point M_1.

1. Introduire sur le schéma un système de coordonnées adapté à l'étude du mouvement de la bille.
2. On appelle $v(t)$ la vitesse de la bille. Donner l'accélération $\vec{a}$ en fonction de v, de R et des vecteurs de la base.
3. **Cas 1 :** On mesure que l'accélération pointe toujours vers le point C. Que peut-on en déduire sur la vitesse v ?
4. **Cas 2 :** On mesure la vitesse comme $v(t) = v_0 - a_0 t$. Donner une expression de $\vec{a}$ en fonction de v_0, a_0, R et des vecteurs de la base.



μDm

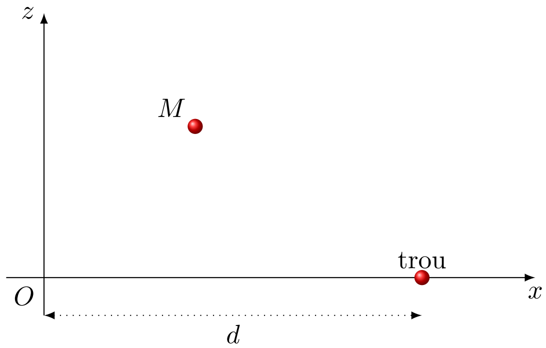
Description de deux mouvements

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Exercice 1

1. *On fait ce qu'on sait faire !!!*

Schéma à t :



Vecteurs cinématiques

- ▷ position $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$
- ▷ vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z$
- ▷ accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z$

L'équation vectorielle $\vec{a} = \vec{g}$ donne **DEUX** équations scalaires :

$$\text{projection suivant } \vec{e}_x : \ddot{x} = 0\ ;\ \ \text{projection suivant } \vec{e}_z : \ddot{z} = -g$$

On intègre : $\dot{x} = C$ et $\dot{z} = -gt + K$ avec C et K deux constantes d'intégration $\Rightarrow$ **CONDITION INITIALE**, ici sur la vitesse.
CI : $\vec{v}(0)$ on décompose toujours les vecteurs dans la base !! $\vec{v}_0 = v_0\left(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y\right)$.
Par identification, $\dot{x}(0) = v_0\cos\alpha$ et $\dot{z}(0) = v_0\sin\alpha$.
On trouve alors $C = v_0\cos\alpha$ et $K = v_0\sin\alpha$.

$$\dot{x}(t) = v_0\sin\alpha\ ;\ \dot{z}(t) = -gt + v_0\sin\alpha$$

On intègre : $dotx(t) = v_0\sin\alpha t + A$; $\dot{z}(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0\sin\alpha t + B$ avec A et B deux constantes d'intégration.

CI $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ donc $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$. On trouve $A = 0$ et $B = 0$.

$$x(t) = v_0\cos\alpha t\ ;\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0\sin\alpha t$$

2. On a trouvé $z(t)$ et $x(t)$, on va chercher a exprimer t en fonction de x et l'injecter dans $z(t)$.

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}\ \Rightarrow\ z(t) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

On a $z[x] = -\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$.

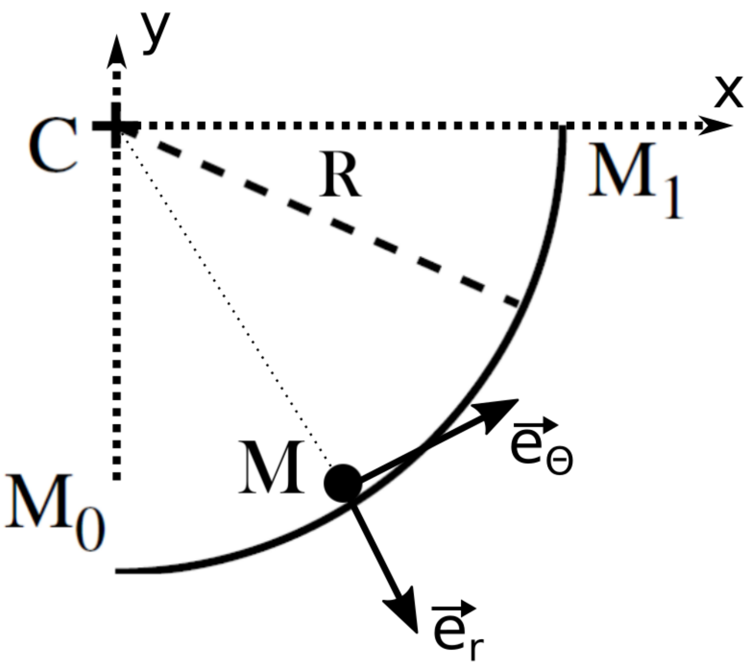
3. Il faut "traduire" sous forme d'équation mathématique sur la trajectoire la phrase "la balle tombe dans le trou". On cherche $z[x = d] = 0$ soit

$$-\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}d^2 + \tan\alpha d = 0\ \Rightarrow\ \cos\alpha\sin\alpha = \frac{gd}{2v_0^2}$$

Exercice 2

On étudie le mouvement d'une bille dans une tuyère circulaire de centre C et rayon R depuis le point M_0 jusqu'au point M_1.

1. *On "ajoute" sur le schéma de la réalité le système de coordonnée. Toujours en premier le repère cartésien puis un système polaire si besoin.*
   Le point M tourne autour du point C, on choisit un système de coordonnées polaire de centre C.



2. **Vecteurs cinématiques**
   - position $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$
   - vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $v = +R\dot{\theta}$ car le mouvement est dans le sens direct
   - accélération $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_r + -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

   Comme $\dot{\theta} = v/R$ donc $\ddot{\theta} = R\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

3. **Cas 1 :** si l'accélération pointe toujours vers C alors $\vec{a}$ n'a pas de composante suivant $\vec{e}_\theta$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: le mouvement est uniforme.

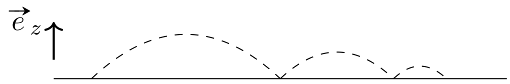
4. **Cas 2 :** On remplace dans $\vec{a}$:
$$\vec{a} = -a_0\vec{e}_\theta - \frac{(v_0 - a_0 t)^2}{R}\vec{e}_r$$

TD14 Cinématique du point

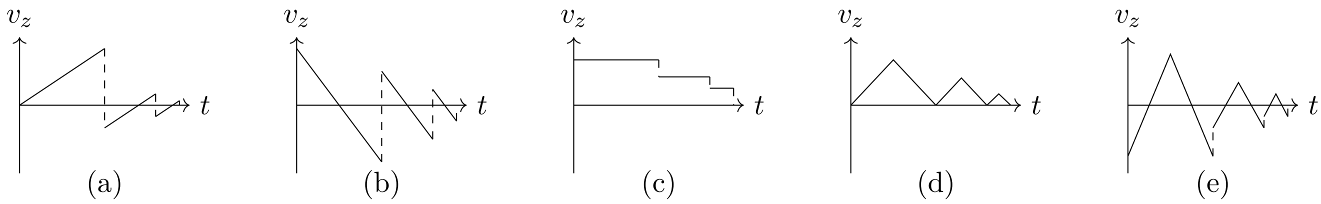
Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Exercice 1 - Applications du cours :

1.Une balle est lancée et suit la trajectoire ci-contre.



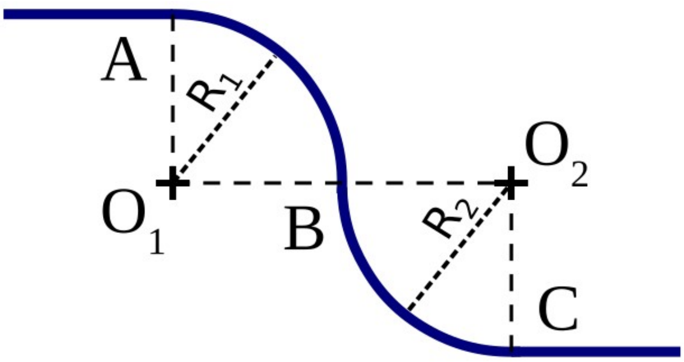
Quelle courbe ci-dessous correspond le mieux à l'évolution de v_z (composante verticale de la vitesse) au cours du temps ? Que vaut alors la vitesse verticale quand la balle fait demi-tour ?



2. Un mobile dont l'accélération conserve une même direction peut-il avoir un mouvement courbe ? Donner un exemple.

3.Un mobile peut-il avoir une accélération non nulle en un instant où sa vitesse est nulle ?

Exercice 2 - Base de Frenet :



On considère un mobile se déplaçant à la vitesse $v = 70$km/h constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles (avant A et après C), raccordés par deux quarts de cercles rayon R_1 et R_2, avec $R_2 > R_1$ (même si ce n'est pas visible sur la figure) et de centre O_1 et O_2.

1. Reproduire à l'échelle 1/200 le circuit avec $R_2 = 2R_1 = 20$m.
2. On s'intéresse au mouvement entre A et B.
   - ▷ Où se trouve le centre de la base de Frénet pour cette partie du mouvement.
   - ▷ Placer le point mobile en un point M_1 quelconque entre A et B et représenter la base de Frenet en ce point.
   - ▷ Donner l'expression de la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet $(\vec{T}_1, \vec{N}_1)$.
   - ▷ Les représenter sur le schéma (on ne tiendra pas compte de l'échelle).
3. Mêmes questions pour la partie $B \to C$.
4. Pour cette question on considère que le point mobile accélère ($\sim v$ augmente) entre A et C. Représenter qualitativement la vitesse et l'accélération en deux points M_1 et M_2, situés entre A et B et situé entre B et C.
5. Même question que précédemment mais cette fois-ci le point décélère.

1 Coordonnées cartésiennes

Exercice 3 - Chute libre :

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes de l'accélération sont, à chaque instant :

$$a_x(t) = \quad ; \quad a_y(t) = 0 \quad ; \quad a_z(t) = -g$$

Initialement la masse possède une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan (Oxz), de norme v_0 et formant un angle α avec l'axe horizontal (Ox). Elle part du point H de coordonnées $(0, 0, h)$.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et position dans la base cartésienne.
2. Exprimer la norme de la vitesse de M à chaque instant.
3. Exprimer la norme de accélération de M à chaque instant.
4. Exprimer la trajectoire $z[x]$.
5. Exprimer l'altitude maximale z_{max} atteint par la masse.
6. Exprimer la distance parcourue d par la masse avant de toucher le sol.
7. (*) Exprimer l'angle β que forme la tangente à la trajectoire avec l'axe horizontale.
   Astuce : à l'aide d'un schéma, exprimer $\tan\beta$ en fonction de $z'[x]$.

Exercice 4 - Décélération d'une voiture :

Une voiture initialement animé d'une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u}_x$ pénètre dans un milieu résistant dans lequel elle est soumis à des frottements. Son accélération est alors proportionnelle à l'opposée de sa vitesse $\vec{a} = -k\vec{v}(t)$; k est une constante et $\vec{v} = v(t)\vec{u}_x$ la vitesse du mobile.

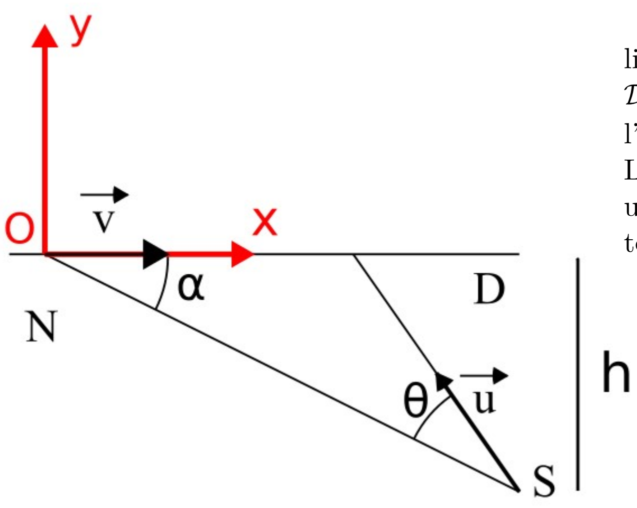
1. Donner la dimension du coefficient k
2. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$. En déduire l'équation du mouvement $x(t)$. Commenter.
3. Exprimer la vitesse $v(x)$ du mobile comme une fonction de l'abscisse x.
4. Reprendre les questions précédentes mais désormais l'accélération de la voiture est constante : $\vec{a} = -ka_0\vec{u}_x$.

Exercice 5 - Ascenseur :

Un ascenseur monte du rez de chaussée au dernier étage, soit un parcours total de 190 m. Sa vitesse vitesse est initialement nulle et il atteint une vitesse maximale de 305 m/mn. Lorsqu'il accélère ou ralentit, il le fait à accélération constante de norme 1,22 m.s^{-2}.
On décompose son mouvement en trois phases :
- ▷ il accélère jusqu'à sa vitesse maximale
- ▷ il continue à vitesse constante
- ▷ il ralentit pour atteindre le dernier étage avec une vitesse nulle

1. Tracer le graphe de l'évolution de son accélération au cours du temps. En déduire celui de la vitesse.
2. Combien de temps dure la phase d'accélération ? En déduire la distance parcouru par l'ascenseur lors de cette première phase ?
3. Même question mais lors de la décélération.
4. Combien de temps met-il à parcourir les 190 m de hauteur, sans arrêter aux étages intermédiaires.

Exercice 6 - Bataille navale (**) :



Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$, le long d'une droite $\mathcal{D}$. Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant $t = 0$ où l'angle $(\overrightarrow{NS}, \vec{v})$ a la valeur α.
La torpille est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u}$. On introduit un repère cartésien $O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

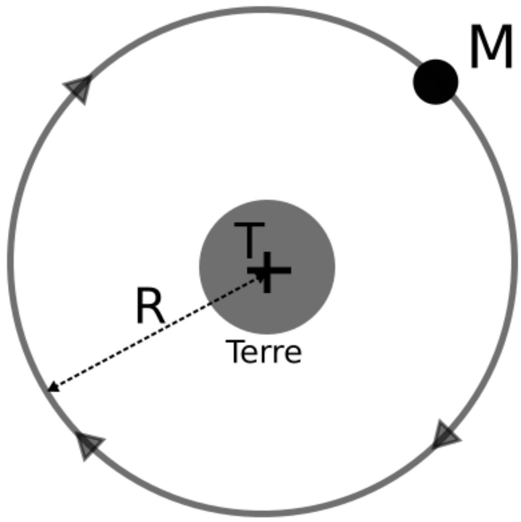
1. Exprimer dans la base la position $\overrightarrow{OT}$ de la torpille en $t = 0$.
2. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ s'écrit comme :
$$\vec{u} = u(\sin(\alpha+\theta)\vec{e}_y - \cos(\alpha+\theta)\vec{e}_x)$$
Astuce : on pourra introduire l'angle β entre la verticale et $\vec{u}$
3. En déduire le déplacement $\overrightarrow{ST}(t)$ de la torpille à l'instant t à l'aide du vecteur $\vec{u}$, puis dans la base cartésienne.
4. En déduire la position $\overrightarrow{OT}(t)$ de la torpille à un instant quelconque t.
5. (*) Montrer que la torpille touche le bateau à un instant τ :
$$\tau = \frac{h\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)u}$$
6. (*) Montrer que pour toucher le bateau, l'angle de tir $\theta =$ doit vérifier :
$$v\sin\alpha = u\sin\theta$$
7. On veut que T atteigne N en un temps minimum. A quel instant, c'est-à-dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? (On donnera la relation entre θ et α). Calculer l'angle de tir θ correspondante.

2 Avec les coordonnées cylindriques

Exercice 7 - Éléments de cinématique :

On considère un point mobile M en mouvement dont les coordonnées en coordonnées cylindrique sont, à chaque instant :
$$r(t) = R \quad ; \quad \theta(t) = \omega t \quad ; \quad z(t) = v_0 t$$
avec R, ω et v_0 des constantes.
1. Donner les dimensions de R, ω et v_0.
2. Exprimer les coordonnées des vecteurs vitesses et accélération dans la base cylindrique.
3. Donner la direction de l'accélération. Commenter
4. Donner l'allure de la trajectoire.
5. Désormais on considère $R(t) = R\cos\Omega t$.
Exprimer les coordonnées des vecteurs vitesses et accélération dans la base cylindrique.

Exercice 8 - Mouvement circulaire : Un satellite, repéré par un point matériel M, tourne autour de la Terre en suivant une orbite circulaire de rayon R et de centre T, centre de la Terre.



1. Introduire sur le schéma un système de coordonnées adapté à l'étude du mouvement de la bille.
2. Donner le signe de la vitesse angulaire.
3. On appelle $v(t)$ la vitesse du satellite. Donner l'accélération $\vec{a}$ en fonction de v, de R et des vecteurs de la base.
4. Le PFD permet de monter que :
$$\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R^2}\vec{e}_r$$
En déduire que le mouvement est uniforme et exprimer la vitesse du satellite v_0.

Exercice 9 - Histoire de mouche :

Une mouche est sur l'extrémité de la trotteuse d'une horloge, on note $R = 30$cm la taille de l'aiguille. Elle se dirige vers le centre en restant sur l'aiguille. Elle avance à une vitesse constante de $v_0 = 0.1\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. On s'intéresse au mouvement de la mouche.

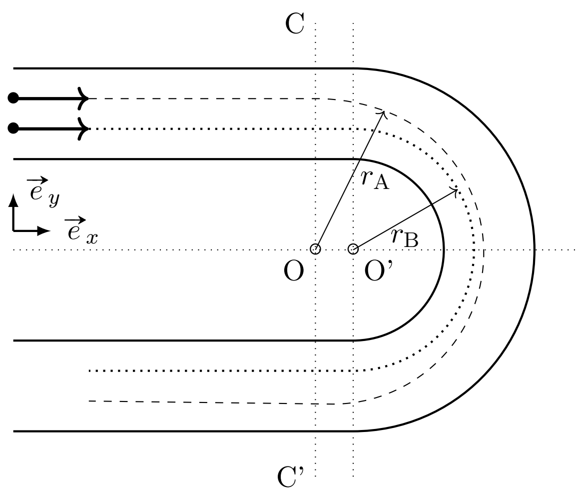
1. Introduire un repère de coordonnées qui vous semble pertinent pour étudier le problème.
2. Donner la distance $L(t)$ entre le centre de l'aiguille et la mouche.
En déduire le vecteur position de la mouche $\overrightarrow{OM}$
3. Quelle est la vitesse angulaire de rotation d'une trotteuse ?
4. Donner la vitesse de la mouche.
5. Donner l'accélération de la mouche.
6. Combien de tour va réaliser la mouche avant d'atteindre le centre ? Représenter alors sa trajectoire.

Exercice 10 - Course de karting :

Deux conducteurs A et B s'affrontent lors d'une course de Karting. Ils arrivent en ligne droite, coupent l'axe CC' au même instant et prennent le virage de deux manières différentes :

- Le kart A suit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r_\mathrm{A} = 90\,\mathrm{m}$.
- Le kart B prend l'intérieur et suit une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $r_\mathrm{B} = 75\,\mathrm{m}$.

On appelle $\mathcal{R}$ le référentiel $(\mathrm{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On chercher à déterminer lequel des deux candidats sortira en premier du virage en coupant à nouveau l'axe CC' gagnant ainsi la course. On suppose que OO' $= r_\mathrm{A} - r_\mathrm{B}$.



1. Déterminer puis calculer les longueurs L_A et L_B des trajectoires des deux kartings.
2. On suppose que les deux kartings roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses pour que dans le virage, les accélérations des 2 kartings restent inférieures à 0.8 g avec $g = 9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur (au delà de cette limite, les kartings et leurs conducteurs dérapent et finissent leur course dans le bac à gravier ou dans les pneus).
3. Conclure. Qui est le plus fort ?

TD14 Cinématique du point

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

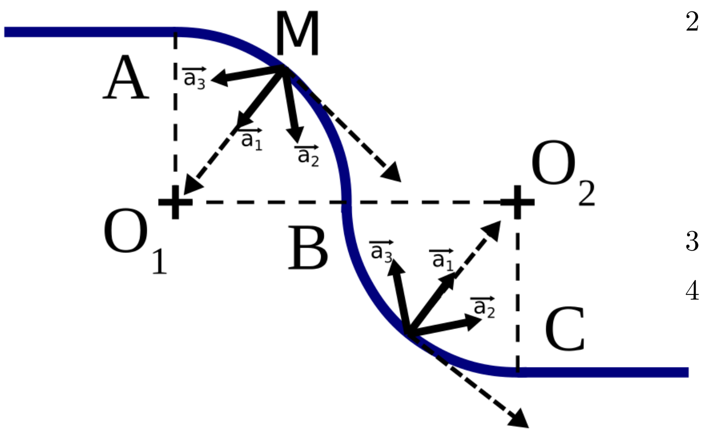
Exercice 1 - Applications du cours :

1. On remarque qu'au cours d'un rebond la vitesse verticale est positive, la balle monte, puis négative, la balle descend. C'est donc la courbe (b).
Lorsque la balle fait demi tour la vitesse verticale s'annule.

2. Il suffit que la vitesse initiale ne soit pas dans la même direction que l'accélération : c'est le cas lorsqu'on lance une balle. l'accélération $\vec{a}$ est constante et égale à $\vec{g}$ mais le mouvement est courbe.

3. Oui, tout comme la dérivée d'une fonction n'est pas nulle quand la fonction s'annule.

Exercice 2 - Base de Frenet :



1. *Faites un beau dessin*
2. ▷ Au centre de l'arc de cercle, soit en O_1.
   ▷ *Cf schéma*
   ▷ Comme la vitesse est constante : $\vec{v} = v_0 \vec{T}_1$ et $\vec{a}_1 = \dfrac{v_0^2}{R_1}\vec{N}_1$).
   ▷ *Cf schéma*
3. Mêmes questions pour la partie $B \to C$.
4. Les accélération $\vec{a}_2$ (vitesse qui augmente) et $\vec{a}_3$ (vitesse qui diminue).

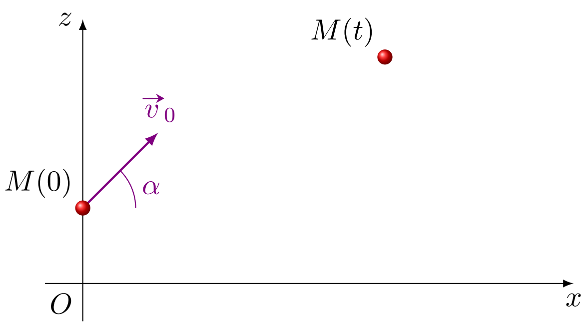
1 Coordonnées cartésiennes

Exercice 3 - Chute libre :

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes de l'accélération sont, à chaque instant :

$$a_x(t) = 0 \quad ; \quad a_y(t) = 0 \quad ; \quad a_z(t) = -g$$

Initialement la masse possède une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan (Oxz), de norme v_0 et formant un angle α avec l'axe horizontal (Ox). Elle part du point H de coordonnées $(0, 0, h)$.

1. 

Vecteurs cinématiques
▷ position $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.
▷ vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.
▷ position $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.
Avec les informations du texte on a : $\vec{a} = -g\vec{e}_z$ donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = C_2 \\ \dot{z} = -gt + C_3 \end{cases}$$

Condition initiale :

$$\vec{v}(0) = \underbrace{v_0 \cos\alpha}_{\dot{x}(0)} \vec{e}_+ \underbrace{v_0 \sin\alpha}_{\dot{z}(0)} \vec{e}_z$$

Donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$; $C_2 = 0$; $C_3 = v_0 \sin\alpha$. Finalement il ne se passe rien suivant (Oy), on ne s'y intéresse plus désormais.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t + A_1 \\ z = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + A_2 \end{cases}$$

Condition initiale : $\overrightarrow{OM}(0) = \underbrace{h}_{z(0)} \vec{e}_z$ donc $A_1 = 0$ et $A_2 = h$. Finalement :

$$\overrightarrow{OM} = (v_0 \cos\alpha t)\,\vec{e}_x + \left(-g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + h\right)\vec{e}_z \ ; \ \vec{v}(t) = v_0\cos\alpha\,\vec{e}_x + (-gt + v_0 \sin\alpha)\,\vec{e}_z \ ; \ \vec{a} = -g\,\vec{e}_z$$

2. $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (-gt + v_0\sin\alpha)^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0\sin(\alpha)t}$
3. $|\vec{a}| = g$.
4. On exprimer t en fonction de x : $t = x/v_0\cos\alpha$ et donc :

$$z[x] = -g\frac{x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha} + h = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x + h$$

5. **Attention !** *prendre le temps de "traduire" le français en équations mathématique sur les coordonnées !!*
La hauteur maximale est atteinte pour x_{mmax} : $z_{max} = z[x_{max}]$ avec $z'[x_{max}] = 0$. (*Finalement on cherche ici la valeur max d'une fonction* $z[x]$

$$z'[x] = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x + \tan\alpha \ \Rightarrow \ x_{max} = \frac{\tan\alpha v_0^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$$

Donc $z_{max} = z[x_{max}]$:

$$z_{max} = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\right)^2 + \tan\alpha\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} + h \ \Rightarrow \ z_{max} = h + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

6. **Attention !** *prendre le temps de "traduire" le français en équations mathématique sur les coordonnées !!*
La distance d parcourue est la solution de $z[x = d] = 0$. Donc :

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos\alpha^2}d^2 + \tan\alpha d + h$$

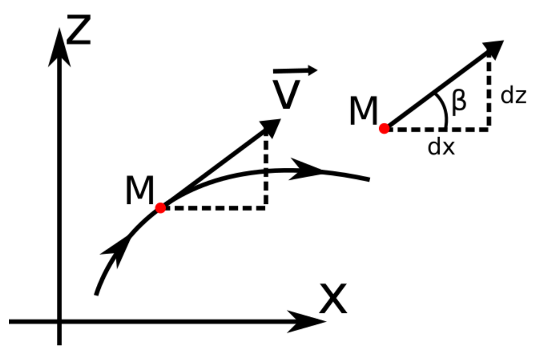
C'est un polynôme d'ordre 2 à résoudre ... $d = \dfrac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2\sin^2\alpha}}\right)$

7. Avec un schéma on peut voir que, dans le triangle formée par la vitesse :

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

On trouve alors :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{v_0^2\cos\alpha^2}x + \tan\alpha$$



Exercice 4 - Décélération d'une voiture :

Une voiture initialement animé d'une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u}_x$ pénètre dans un milieu résistant dans lequel elle est soumis à des frottements. Son accélération est alors proportionnelle à l'opposée de sa vitesse $\overrightarrow{a} = -k\overrightarrow{v}(t)$; k est une constante et $\overrightarrow{v} = v(t)\overrightarrow{u}_x$ la vitesse du mobile.

1. $[a] = [k][v]$ donc $[k] = [a]/[v] =\text{s}^{-1}$.
2. **Vecteurs cinématiques**
   - ▹ position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x$
   - ▹ vitesse $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x$ avec $v(t) = \dot{x}$ car $\dot{x} > 0$
   - ▹ accélération $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x$

   On a alors : $\ddot{x} = -k\dot{x}$ soit : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = 0$.
   On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 avec $\tau = 1/k$.
   - ▹ solution particulière : $v_P = 0$
   - ▹ solution homogène : $\widetilde{v} = Ae^{-t/\tau}$.

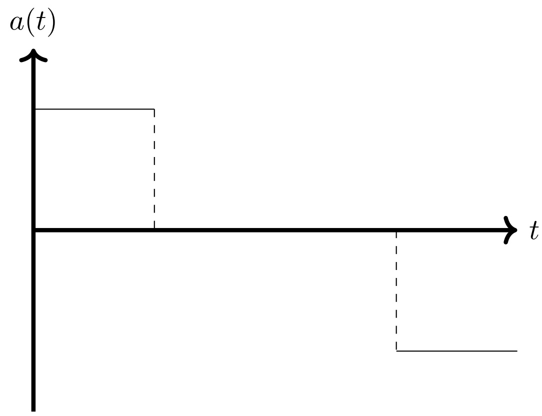
   CI : $v(0) = v_0$ donc $v(t) = v_0e^{-t/\tau}$.

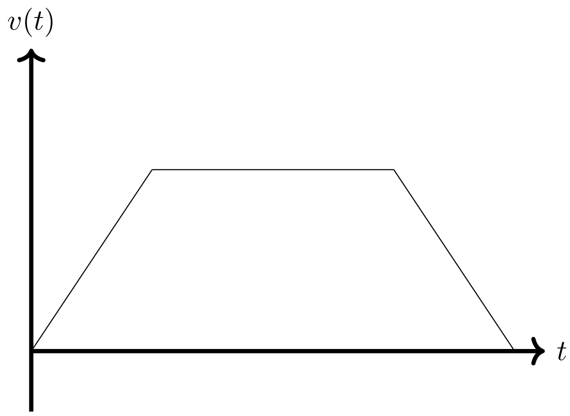
   Pour obtenir $x(t)$ on intègre $v(t)$: $x(t) = -v_0\tau e^{-t/\tau} + C$.
   CI $x(0) = 0$ (voiture initialement à l'origine des positions) donc : $x(t) = v_0\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. On remarque alors que la vitesse devient nulle pour un temps $t > 5\tau$. La position de la voiture sera alors $v_0\tau$.
3. On va plutôt chercher à exprimer $e^{-t/\tau}$ en fonction de x : $e^{-t/\tau} = 1 - \dfrac{x}{v_0\tau}$.
   Donc : $v[x] = v_0\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau}\right) = v_0 - \dfrac{x}{\tau}$.
4. *On refait pareil mais c'est "plus simple" à intégrer ....*
   - ▹ $[k] = 1$
   - ▹ $\ddot{x} = -ka_0 \Rightarrow v(t) = v_0 - ka_0t \Rightarrow x(t) = v_0t - ka_0t^2/2$.
   - ▹ $t = \dfrac{v_0}{ka_0}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{2ka_0}{v_0^2}x}\right)$ $v[x] = v_0\sqrt{1 - \dfrac{2ka_0}{v_0^2}x}$

Exercice 5 - Ascenseur :

On choisit pour tout l'exercice un axe (Oz) verticale orienté vers le haut, avec O au niveau du sol.

1. L'accélération vaut $+a_0$ au début, 0 au milieu du trajet et $-a_0$ sur la fin. Pour trouver la vitesse il suffit d'intégrer.





2. *Pour la phase d'accélération, on applique la méthode de cinématique ...*
   Vecteur cinématiques
   - ▹ position $\overrightarrow{OM}(t) = z(t)\overrightarrow{e}_z$
   - ▹ vitesse $\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}\overrightarrow{e}_z$
   - ▹ accélération $\overrightarrow{a}(t) = \ddot{z}\overrightarrow{e}_z$

   On a alors $\ddot{z} = +a_0 \Rightarrow v(t) = \dot{z}(t) = +a_0t \Rightarrow z(t) = a_0t^2/2$.
   Fin de la phase d'accélération : $v(\tau) = v_{max}$ donc $\tau = v_{max}/a_0$.
   Distance parcourue $d = z(\tau) = v_{max}^2/2a_0$.

3. On peut remarquer que les deux phases sont similaires, la distance parcourue et le temps seront les mêmes que pour l'accélération.

4. Les 190m de l'immeuble sont parcouru lors de la phase d'accélération (distance $v_{max}^2/2a_0$), la phase à vitesse constante (distance $v_{max}\tau'$) et la phase de décélération (distance $v_{max}^2/2a_0$). Donc :

$$190 = v_{max}^2/2a_0 + v_{max}\tau' + v_{max}^2/2a_0 \;\Rightarrow\; \tau' = \frac{190 - v_{max}^2/a_0}{v_0}$$

Le temps total est alors $T = \tau + \tau' + \tau$.

Exercice 6 - Bataille navale (**) :

Exercice difficile ..., à travailler en dernière approche du cours.

2 Avec les coordonnées cylindriques

Exercice 7 - Éléments de cinématique :

1. $[R] = \text{m}$; $[\omega] = \text{rad/s}$; $v_0 = \text{m/s}$

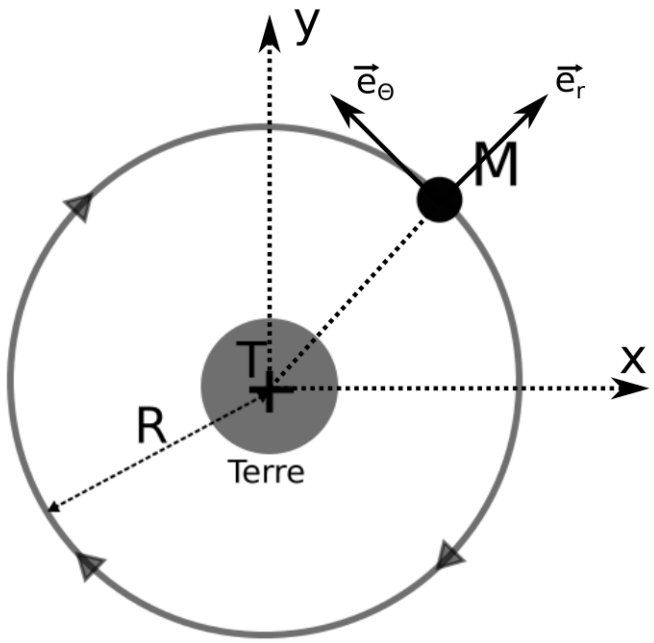
2. **Vecteurs cinématiques**
   - ▹ position $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + v_0 t\vec{e}_z$
   - ▹ vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + v_0\vec{e}_z = R\omega\vec{e}_\theta + v_0\vec{e}_z$ et $v(t) = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}$
   - ▹ accélération $\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r$.

3. L'accélération est uniquement orienté suivant $-\vec{e}_r$, vers le centre de la trajectoire, comme dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.
   Attention ! à cause de la composante suivant $\vec{e}_z$, ce n'est pas un tel mouvement.

4. Le point tourne dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ tout en se déplaçant à vitesse constante suivant l'axe (Oz) : le mouvement sera celui d'une spirale ascendante.

5. **Vecteurs cinématiques**
   - ▹ position $\overrightarrow{OM} = R\cos\Omega t\,\vec{e}_r + v_0 t\vec{e}_z$
   - ▹ vitesse $\vec{v} = -R\Omega\sin\Omega t\,\vec{e}_r + R\cos\Omega t\,\omega\,\vec{e}_\theta + v_0\vec{e}_z$ et $v(t) = \sqrt{R^2\Omega^2\sin^2\Omega t + R^2\omega^2 + v_0^2}$
   - ▹ accélération $\vec{a} = -R\left(\Omega^2\cos\Omega t + \omega^2\right)\vec{e}_r - 2R\Omega\omega\sin\Omega t\,\vec{e}_\theta$.

Exercice 8 - Mouvement circulaire : 1. Le système étudié tourne autour du point $T \Rightarrow$ on introduit un système de coordonnées polaire de centre T (on pense à quand même représenter le système cartésien !=



2. Position : $\overrightarrow{TM} = R\vec{e}_r$; Vitesse : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $v(t) = -R\dot{\theta}$: Accélération : $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$.
3. En projetant sur les deux axes on trouve :

$$(\vec{e}_r) : -\frac{v^2}{R} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R^2} \;;\; (\vec{e}_\theta) : -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le mouvement est bien circulaire et on a $v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R}}$.

Exercice 9 - Histoire de mouche :

1. La mouche va tourner autour du point O, au centre de l'horloge : on choisit un système de coordonnée polaire ($\sim$cylindrique 2D) de centree O pointant vers la mouche.
2. La mouche avance à vitesse constante le long de l'aiguille : $L(t) = R - v_0 t$. On a alors $\overrightarrow{OM} = (R - v_0 t)\,\vec{e}_r$.
3. A vitesse angulaire constante (ce qui est le cas sur une horloge) : $\dot{\theta}$ =angle/durée=$2\pi/60$.
   On note souvent ω les vitesses angulaires constantes.
4. On dérive la position : $v(t) = -v_0\,\vec{e}_r + (L - v_0 t)\,\omega\,\vec{e}_\theta$
5. On dérive la vitesse : $va(t) = -2v_0\omega\,\vec{e}_\theta - (L - v_0 t)\,\omega^2\,\vec{e}_r$
6. Le temps pour atteindre le centre $T = L/v_0$ et le nombre de tour $\omega T/2\pi$.

Exercice 10 - Course de karting * :

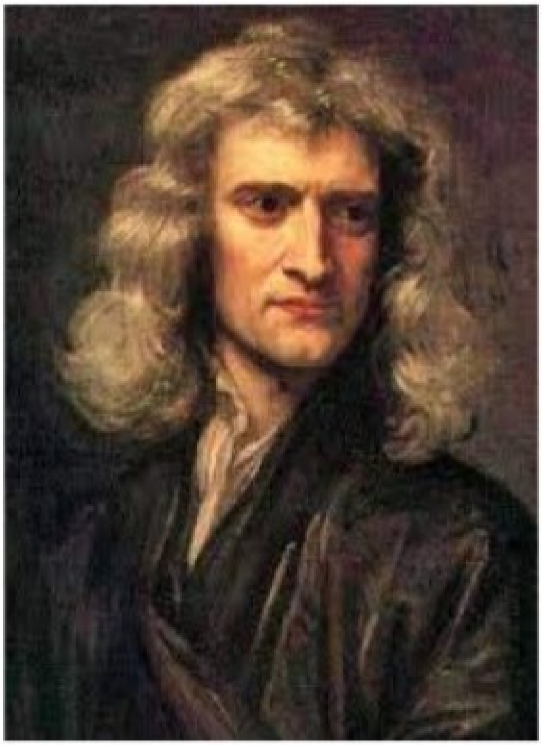
Très proche du cours ...

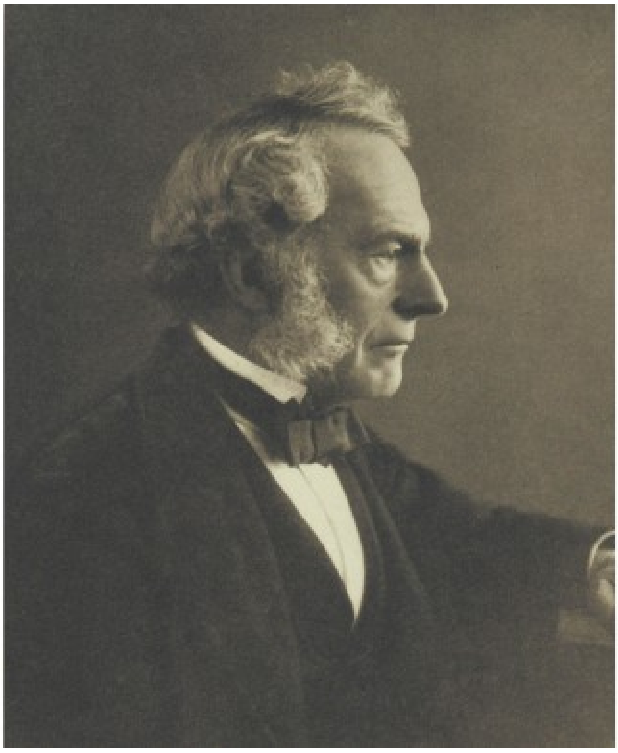
Chap XV

Principes de la mécanique newtonienne

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières





Savoirs ♡

- ♡ **Lois de ma mécanique**
  - Principe de la statique
  - Notion de référentiel galiléen et lien entre deux référentiels galiléens
  - Notion de quantité de mouvement
  - Principe fondamental de la dynamique : énoncé et conditions d'application

- ♡ **Interactions gravitationnelles**
  - force d'interaction gravitationnelle dans le cas général
  - cas particulier du poids à la surface de la Terre

- ♡ **Fils et ressorts**
  - tension d'un fil
  - transmission de la force par un fil
  - force de rappel d'un ressort

- ♡ **Forces de frottements**
  - force de frottement fluide : modèle à petite et haute vitesse
  - réaction d'un support solide : force normale et force tangentielle
  - loi de Coulomb sur les forces de frottements solides
    1. cas statique
    2. cas dynamique

Savoir Faire

Réaliser un bilan des forces

- *Reconnaître les forces qui s'appliquent sur un système et les représenter sur un schéma*
- *Établir les expressions des forces à l'aide des vecteurs de la base et des coordonnées*
- *Appliquer le principe de la statique pour trouver une condition d'équilibre*

Application du PFD

- *obtenir l'accélération du point matériel (cinématique !!!)*
- *obtenir les équations du mouvement en projetant la deuxième loi de Newton*

Cas particuliers à bien maîtriser

1. *mouvement dans un champ de pesanteur uniforme*
   - *sans frottements*
   - *avec frottements fluides*
   - *avec des frottements solides sur un plan incliné*
2. *mouvement circulaire d'un pendule avec et sans frottements fluides*
3. *condition d'équilibre d'une masse sur un plan incliné*
4. *cas d'une masse au bout d'un ressort*
   - *mouvement horizontal*
   - *mouvement vertical*

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'étude du mouvement sans nous être penché sur ses causes. Grâce aux lois établies par Isaac Newton en 1687 dans son ouvrage *Philosophiae naturalis principia mathematica*, nous allons introduire la notion de force et relier cette dernière à la cinématique pour étudier le mouvement et ses causes.

1 Notion de forces et principe de la dynamique

1.1 Notion de force et principe de la statique

▶ Force : qu'est-ce que c'est ?

Définition. Force
Une force caractérise l'action d'un système matériel $\mathcal{S}$ sur un point matériel M.
C'est un vecteur : $\overrightarrow{F}_{\mathcal{S}\to M}$ et son unité est le newton (N=kg.m.s^{-2}).

Une force permet de mettre en mouvement (translation ou rotation) un objet ou de le déformer.

Propriété. Invariance d'une force
Une force est indépendant du référentielle d'étude : elle s'applique de la même façon quelque soit l'observateur.

▶ Equilibre d'un point : principe d'inertie

Définition. Equilibre mécanique
Un point est à l'équilibre mécanique si la somme des forces qui s'appliquent sui lui est nulle.

Attention ! C'est une somme vectorielle **MAIS** on ne résout **JAMAIS** des équations vectorielles : on passe toujours par leur coordonnées !

1.2 Notion de référentiel galiléen

▶ Définition et propriétés

Le principe d'inertie sert de définition à la notion de repère galiléen.

Définition. Référentiel galiléen
Un référentiel est qualifié de galiléen si, dans ce référentiel, un point matériel à l'équilibre conserve son mouvement rectiligne uniforme.

Propriété. Lien entre deux référentiels galiléens
Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiéen.

En réalité, les référentiels rigoureusement galiléens n'existent pas mais on peut en considérer certains comme "supposés galiléens".

Attention ! On débutera toujours **toujours** **<u>TOUJOURS</u>** un problème de mécanique en précisant le référentiel utilisé ainsi sa nature galiléenne, ou non.

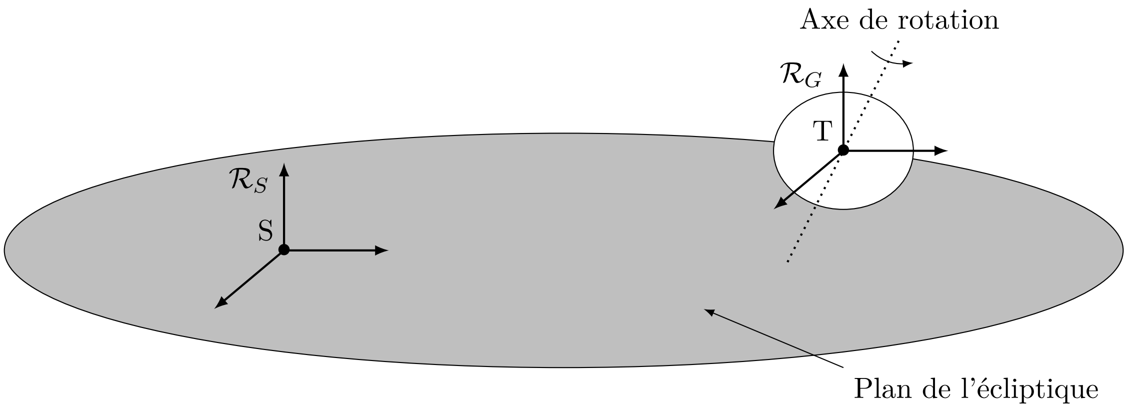
Le principe d'inertie n'est pas un "vrai principe" : c'est la définition d'un référentiel galiléen. Néanmoins, on s'en servira comme loi. On l'appelle souvent la première loi de Newton.

Propriété. Principe d'inertie
Dans un référentiel galiléen, un point matériel est immobile ($\sim$ à l'équilibre), si la somme de ses forces extérieures est nulle.

▶ Quelques référentiels galiléens classique

Les référentiels les plus utiles sont définis par une horloge placée sur Terre et par un repère particulier. Ce sont

- le référentiel **héliocentrique** $\mathcal{R}_S$ qui a pour origine le centre de masse du système solaire, soit approximativement le centre du Soleil et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel.
  Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif du Soleil dans la galaxie, soit une durée inférieure à plusieurs années ;
- le référentiel **géocentrique** $\mathcal{R}_G$ qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel.
  Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif de la Terre autour du Soleil, soit une durée courte devant une année ;
- le référentiel **terrestre** $\mathcal{R}_T$, ou référentiel du **laboratoire**, qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont fixes par rapport à la Terre.
  Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'une rotation significative de la Terre, soit une durée courte devant une journée. C'est le référentiel dans lequel nous étudierons la plupart des systèmes en CPGE.



1.3 Les lois de Newton

Les lois de Newton définies ici sont la base de toute la mécanique classique. Elles ont été établies en 1687 et permettent toujours de décrire une grande partie des mouvements mécaniques. On les sépare généralement en trois :

- le principe d'inertie
- le principe fondamentale de la dynamique
- la loi des actions réciproques

Nous avons déjà rencontré le principe d'inertie, nous allons nous concentrer sur les deux autres.

▶ Quantité de mouvement

Quantité de mouvement d'un point matériel

> ***Expérience 1 :*** *Lancer une balle dans la tête de quelqu'un :*
> - *plus on lance la balle fort, plus ça fait mal : la vitesse joue*
> - *plus la balle est lourde, plus ça fait mal : la masse joue*

Définition. Quantité de mouvement
On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$. La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Attention ! la quantité de mouvement, tout comme la vitesse dépend du référentiel d'étude !!

Quantité de mouvement de deux points matériels

Considérons deux points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2. Dans un référentiel $\mathcal{R}$ on mesure la vitesse de ces deux points, noté $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

Propriété. Quantité de mouvement d'un système de deux points
La quantité de mouvement du système composé des deux points M_1 et M_2, noté $\{M_1, M_2\}$ est égal à la somme des deux quantités de mouvement :

$$\overrightarrow{p_{tot}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$$

On peut alors étendre ce principe à autant de point que l'on veut :

$$\overrightarrow{p_{tot}} = \sum_i^N m_i\overrightarrow{v_i}$$

▶ La deuxième loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique

Propriété. Principe Fondamental de la Dynamique
Dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, l'accélération d'un point matériel de masse m vérifie :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to M}\ .$$

Principe d'inertie
Pour $\vec{a} = \vec{0}$, on a $\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to M} = \vec{0}$.
On retrouve le principe fondamental de la statique.

Attention ! Cette forme est une version simplifiée de la deuxième loi de Newton.
En effet celle-ci stipule que la dérivée de la quantité de mouvement d'un système de point est égal à la somme des forces extérieur :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Comme $\vec{p} = m\vec{v}$ alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

Si la masse est constante on retrouve bien le PDF.

Méthode en DS. Bien appliquer le PFD
1. Définir le système (point matériel étudié) + préciser le référentiel **galiléen**
2. Faire un **SCHEMA** où on fait apparaître
   - ▷ le point matériel
   - ▷ les vecteurs de la bases et les coordonnées
   - ▷ les forces
3. écrire chaque force à l'aide des vecteurs de la base
   Attention ! A la fin, ne doit apparaitre comme vecteur que ceux de la base choisie !!

▶ La troisième loi de Newton : la loi des actions réciproques

Théorème.
Soient deux points M_1 et M_2 en interactions. Alors les forces exercées du point 1 sur le point 2 sont égales à l'opposé des forces exercées du point 2 sur le point 1

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}}\ .$$

Fig. 1 – Le principe des actions réciproques.

2 Force classique

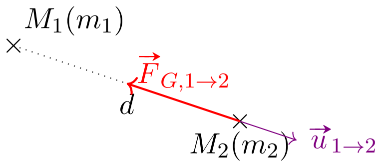
On décrit ici les différentes forces qu'on rencontrera au cours de l'année. L'interaction électrostatique coulombienne sera décrite plus en avant dans le chapitre qui lui sera consacrée. Chaque force est accompagnée d'un exemple d'application qui permettra de la comprendre et de la maîtriser.
Connaître la force c'est savoir refaire l'exercice !!

2.1 Force d'interaction gravitationnelle et poids

Définition. Force d'interaction gravitationnelle
On considère une particule de masse m_1 et une autre de masse m_2. La particule 1 exerce une force d'interaction graviationelle sur la particule 2 :

$$\vec{F}_{G,1\to2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{d^2}\vec{u}_{1\to2}$$

- ▷ $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle
- ▷ d la distance entre les centres de masse des deux particules
- ▷ $\vec{u}_{1\to2}$ un vecteur unitaire allant de 1 vers 2.

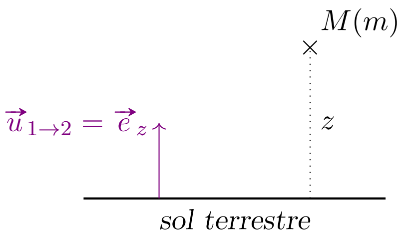


Exemple 1 : *Force d'interaction gravitationnelle à la surface de la Terre*
Considérons une masse m à la surface de la Terre. Exprimer la force d'interaction gravitationnelle en fonction de R_T le rayon terrestre, z l'altitude de la masse, M_T la masse de la Terre et $\mathcal{G}$.

CORRECTION

La distance entre le centre de la Terre et la masse est $d = R_T + z$. De plus le vecteur unitaire reliant le centre de la Terre à la masse est le vecteur unitaire verticale, orienté vers le haut $\vec{e}_z$.
Finalement

$$\vec{F}_{G,T\to m} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{(R_T+z)^2}\vec{e}_z$$



Or l'altitude d'un point z est toujours très faible devant le rayon terrestre si on reste proche de la surface $R_T = 6400$km»8.9km sur l'Everest. Donc : $R_T + z \simeq R_T$. Soit :

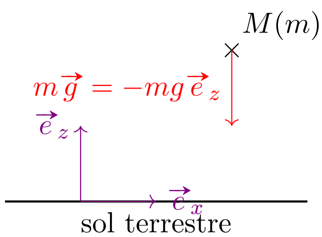
$$\vec{F}_{G,T\to m} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{(R_T+z)^2}\vec{e}_z = m \times \underbrace{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}}_{\simeq 9.81 m.s^{-2}}\vec{e}_z$$

Définition. Le poids

A la surface de la Terre, la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet de masse m s'appelle le poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$$

avec $\vec{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur, orienté vers le sol.
On a $g \simeq 9.81$m.s^{-2}.



Attention ! Ne pas compter l'attraction terrestre deux fois !!

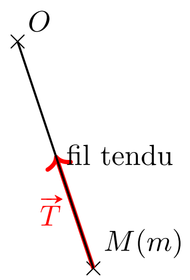
2.2 Force de tension d'un fil inextensible

On considère un fil inextensible et sans masse et on attache à son extrémité une masse m. L'autre extrémité est fixé au niveau du point O.

Définition. Rappel d'un fil

La tension $\vec{T}$ du fil est la tension exercée par le fil sur la masse. Deux cas de figure :

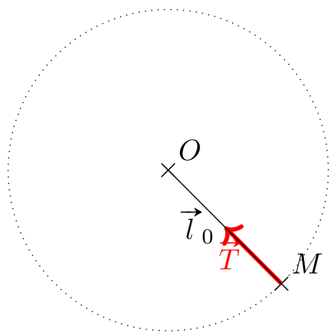
- ▷ le fil est détendu : la force $\vec{T}$ est nul
- ▷ le fil est tendu : la force $\vec{T}$ est suivant le fil et point vers le point d'accroche O.



Attention ! Quand le fil en tendu on ne connaît *a priori* **JAMAIS** la valeur de T !!

Astuce pratique :

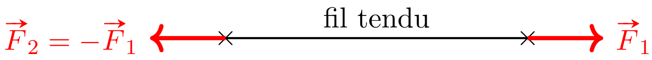
- ▷ **(important)** le plus souvent $\vec{T}$ varie avec le mouvement. On peut trouver son expression une fois qu'on a résolu l'équation du mouvement de la masse.
- ▷ une fois qu'on a $\vec{T}$ on peut chercher quand est-ce qu'elle s'annule : on saura quand le fil se détend

> **Exemple 2 :** *Une masse m est posée sur une table et attachée au bout d'une corde inextensible et sans masse de longueur l_0. On imprime à la masse un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse angulaire ω.*
> *Donner la tension $\vec{T}$ de la corde.*
>
> ***CORRECTION***
>
> *On commence par un* ***SCHEMA*** *!!*
>
> 
>
>
> ***Partie cinématique*** *: on décrit d'abord le mouvement de la masse*
> - ▷ *choix d'un système de coordonnées : on prend un repère polaire de centre O, centre de la trajectoire de la masse.*
> - ▷ *vecteurs cinématiques de la masse en mouvement circulaire uniforme :*
>
> $$\text{position } \overrightarrow{OM} = l_0\vec{e}_r \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = l_0\omega\vec{e}_\theta \Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = -l_0\omega^2 vece_r$$
>
> ***Partie mécanique :*** *on décompose les force dans les vecteurs de la base*
> - ▷ *tension $\vec{T}$ du fil : orienté le long du fil, a priori vers l'intérieur de la trajectoire : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$*
>
> ***Partie dynamique :*** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
> - ▷ *référentiel : terrestre supposé galiléen*
> - ▷ *PFD : $m\vec{a} = \vec{T}$ soit $-ml_0\omega^2\vec{e}_r = -T\vec{e}_r$*
>   *On a alors $T = ml_0\omega^2$.*

Propriété. Transmission de la force par un fil

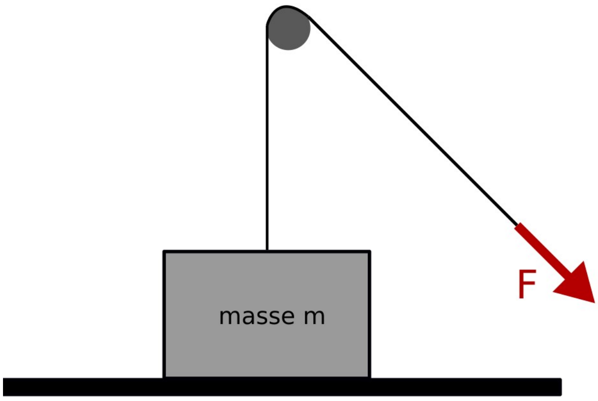
Un fil transmet intégralement la force : si une force $\vec{F}_1$ est appliquée à une extrémité, alors une force $\vec{F}_2$ est appliquée à l'autre extrémité

- ▷ de même intensité $F_1 = F_2$
- ▷ orienté suivant la direction du fil



Attention ! le fil peut être "tordu" : $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ne sont pas forcément alignés !

Exemple 3 :



La force $\vec{F}$ est transmise par le câble jusqu'à la masse. On soulèvera cette dernière si $F > mg$.

2.3 Force de rappel d'un ressort

Un ressort est un modèle théorique qui permet de représenter efficacement bon nombre de systèmes.

Caractéristique d'un ressort

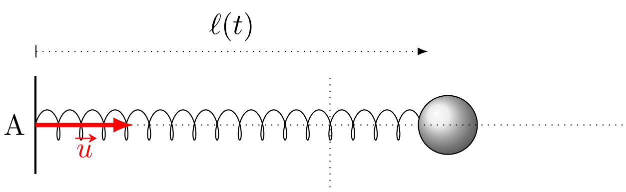
- ▷ sa **longueur à vide** ℓ_0 qui correspond à la longueur du ressort au repos ;
- ▷ sa **raideur** k qui s'exprime en N/m.

Définition. Force de rappel d'un ressort

Lorsque le ressort est déformé, il exerce une **force de rappel** sur l'extrémité mobile. Cette force est donnée par

$$\boxed{\vec{F}(t) = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}}$$

- ▷ $\ell(t)$ la longueur à l'instant t du ressort
- ▷ $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de l'autre extrémité vers l'extrémité considérée.

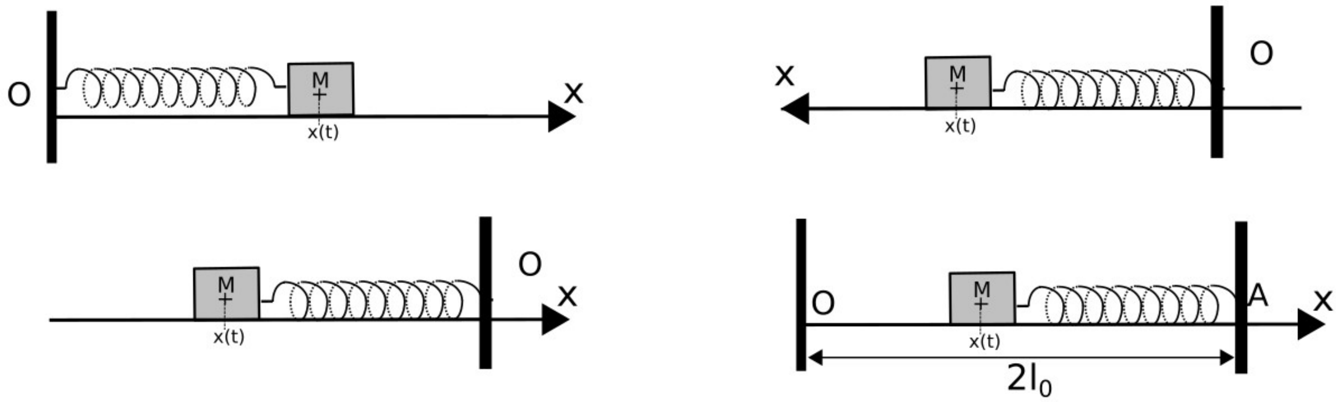


Attention ! signe de la force !!!

- • ressort étiré : $\ell - \ell_0 > 0 \Rightarrow$ la force est dirigée pour le comprimer ;
- • ressort comprimé : $\ell - \ell_0 < 0 \Rightarrow$ la force est dirigée pour l'étirer.

Méthode en DS. Bien exprimer la force de rappel du ressort :
1. on donne la forme théorique de la force : $\vec{F}(t) = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}$
2. on **place** sur le schéma **puis** on exprime le vecteur $\vec{u}$ à l'aide des vecteur du système de coordonnées choisi
3. on **place** sur le schéma **puis** exprime la longueur $l(t)$ l'aide des coordonnées choisies

> ***Exemple 4 :*** *Exprimer la force de rappel du ressort (caractéristique k et l_0) exercée sur la masse m dans les différents cas suivant. En déduire la position d'équilibre.*
> *A chaque fois on a choisi un système de coordonnées cartésiens $(O, \vec{e}_x)$.*



CORRECTION

Pour chaque exemple, on applique tranquillement la méthode et on trouve

- ▷ *(haut gauche)* $-(x(t) - l_0)\,\vec{e}_x$
- ▷ *(haut droite)* $-k\,(x(t) - l_0)\,\vec{e}_x$
- ▷ *(bas gauche)* $-k\,(-x(t) - l_0)\,(-\vec{e}_x) = -k\,(x(t) + l_0)\,\vec{e}_x$
- ▷ *(bas droite)* $-k\,(2l_0 - x(t) - l_0)\,(-\vec{e}_x) = k\,(l_0 - x(t))\,\vec{e}_x$

> ***Application 1 :*** *Une masse m est attachée au bout d'un ressort verticale de raideur k et de longueur à vide l_0. L'autre extrémité du ressort est fixée à un clou au mur.*
> *A l'équilibre, montrer que l'étirement l_{eq} du ressort est $l_{eq} = l_0 + mg/k$.*

2.4 Force de frottement solide : lois de Coulomb

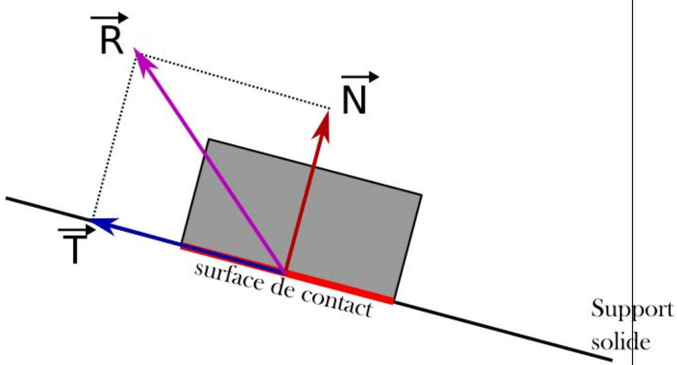
▶ Décomposition de la réaction

Définition. Réaction du support

On considère une masse m en contact avec un support solide. La réaction du support est la force exercée par le solide sur la masse m. Elle s'exerce au centre de la surface de contact.

Elle est composée **de deux parties :**

- ▷ la réaction normale $\vec{N}$: elle est perpendiculaire au support, orienté du support vers la masse
  Elle empêche que la masse "rentre" dans le support.
- ▷ la réaction tangentielle $\vec{T}$: elle est tangente à la surface de contact
  Elle est du aux frottements entre le solide et la masse.



La réaction du support est la somme des deux :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

Propriété. Réaction du support et frottement

On ne peut JAMAIS connaître à l'avance les valeurs de N et T !

- ▷ la réaction normale $\vec{N}$ empêche la masse de rentrer dans le support : **elle ne peut jamais être négligée**. Lorsque $\vec{T}$ s'annule, il y a perte de contact.

- ▷ la réaction tangentielle $\vec{T}$ représente les frottements entre la masse et le support : elle peut être négligée dans certains cas (exemple : glace, chaussée glissante, ...)

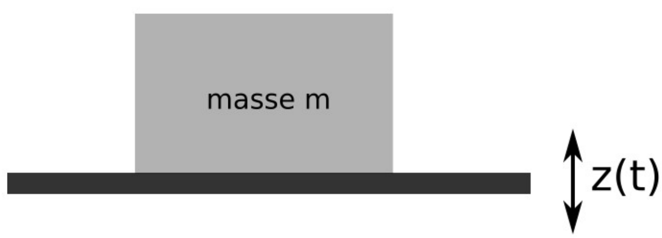
Attention ! "On néglige les frottements solides" $\iff$ "On néglige $\vec{T}$"
A ce moment là $\vec{R} = \vec{N}$ mais c'est un cas particulier !!

Astuce pratique : chercher si un contact est rompu avec le support $\iff$ chercher à annuler $\vec{N}$.

Exemple 5 :

Une masse m est posée sur une plate-forme mobile lui imposant un mouvement verticale $z(t) = Z_0 \cos \omega t$. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

1. *Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique pour la masse m.*
2. *Pour quelle valeur de ω, la masse se détache du support ?*



CORRECTION

- **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
  on choisit un système de coordonnées cartésien avec un axe (Oz) vertical

  position $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z = Z_0 \cos\omega t\vec{e}_z \Rightarrow$ vitesse $\vec{v} = -Z_0\omega \sin\omega t\omega\vec{e}_z \Rightarrow$ accélération $\vec{a} = -Z_0\omega^2\omega^2 \cos\omega t\vec{e}_z$

- **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
  - le poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
  - réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{e}_z$

- **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
  référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \Rightarrow -mZ_0\omega^2 \cos\omega t = -mg\vec{e}_z + N\vec{e}_z \Rightarrow N = mg - Z_0\omega^2 \cos\omega t$$

  Pour qu'il y ait décollage, $N = 0$ donc, en prenant la valeur maximale du cos on a : $mg - Z_0\omega^2 = 0$ donc $\omega = \sqrt{mg/Z_0}$.

▶ **Partie tangentielle : frottement solide et lois de Coulomb**

Attention ! *Loi délicate si on ne prend pas le temps de bien la comprendre ! Bien maîtriser l'exemple.*

Propriété. Loi de Coulomb : loi des frottements solide
- **Cas statique :**
  tant que $|\vec{T}| < f|\vec{N}|$ la masse ne glisse pas. Si l'inégalité est rompu la masse se met alors à glisser le long du support solide
- **Cas dynamique :**
  si la masse glisse le long du support alors $|\vec{T}| = f|\vec{N}|$ et $\vec{T}$ est dans la direction opposée à la vitesse de la masse.

Coefficient de friction solide f .
C'est un nombre sans dimension, inférieur à 1, qui traduit l'état du support solide. Il est notamment très faible pour des surface glissante (glace, surface humide ou graissée, ...).

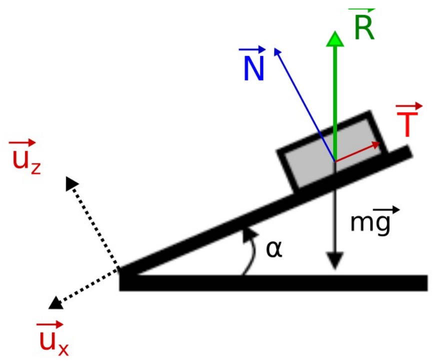
Attention ! Inégalité et égalité sur les normes de vecteurs ! !

Exemple 6 : ***Masse sur un plan incliné***
Attention ! exercice ultra-classique, si on le maîtrise, on a compris !

On étudie une masse m déposée sur un plan incliné qui forme un angle α avec l'horizontale. On appelle f le coefficient de friction solide entre la masse et le plan.

1. *Introduire un système de coordonnées cartésiennes qui permet l'étude de la réaction du support de façon simple.*
2. *Exprimer dans ce système de coordonnées le poids $m\vec{g}$ de la masse.*
3. ***Cas statique***
   On considère la masse initialement immobile. Exprimer la condition entre T et N puis, à l'aide du principe d'inertie, exprimer l'angle α_c à partir duquel la masse se met à glisser à l'aide de f.
4. ***Cas dynamique***
   On suppose désormais que $\alpha > \alpha_c$: la masse glisse le long du plan incliné. Donner l'expression de la force de frottement.

On commence par un ***SCHEMA***



1. On choisit un système de coordonnées cartésien, incliné avec le plan.
2. En projetant le poids (**Attention !** méthode!!), on a :

$$m\vec{g} = mg\left(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_x\right)$$

3. **Cas statique**

▷ **Partie mécanique** : *on décompose les forces dans la base*
 ▷ poids $m\vec{g} = mg\left(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_x\right)$
 ▷ réaction normale $\vec{N} = +N\vec{u}_z$
 ▷ réaction tangentielle $\vec{T} = -T\vec{u}_x$
 à l'équilibre la sommes des forces extérieures est nulle : $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$.
 On décompose suivant les deux axes :

$$\text{axe } \vec{u}_x \ : \ mg\sin\alpha - T = 0 \ \text{ et axe } \vec{u}_z \ ; \ -mg\cos\alpha + N = 0$$

On trouve alors $N = mg\cos\alpha$ et $T = mg\sin\alpha$.

Loi de Coulomb : pas de glissement si $T < fN$ donc si $mg\sin\alpha < fmg\cos\alpha$ donc si $\tan\alpha < f$.
On définit donc α_c tel que $\tan\alpha_c = f$.

4. **Cas dynamique**

l'écriture des forces restent vraie sauf que désormais il faut prendre en compte l'accélération !

▷ **Partie cinématique :** *on décrit le mouvement de la masse*
 avec le système de coordonnées, le mouvement se fait le long de l'axe $\vec{u}_x$

$$\text{position } \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{u}_x \Rightarrow \ \text{vitesse } \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x \Rightarrow \ \text{accélération } \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$$

▷ **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
 référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \text{ on projette sur les axes } \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -T + mg\sin\alpha \\ 0 = N - mg\cos\alpha \end{cases}$$

On trouve $N = mg\cos\alpha$ (*comme pour le cas statique finalement*)
Comme il y a glissement, les lois de Coulomb stipule $T = fN = fmg\cos\alpha$.

2.5 Force de frottements fluides

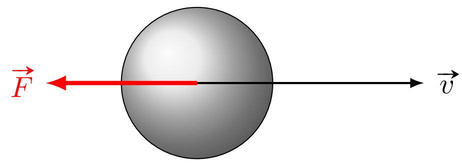
Un solide se déplaçant dans un fluide subit une force de la part de ce dernier : c'est ce qu'on ressent quand on fait du vélo ou qu'on nage dans une piscine. Pour se déplacer dans un fluide, on le force à s'écouler autour de nous. En réponse, ce dernier exerce une force appelée **force de trainée**.

Définition. Force de trainée

Soit un fluide au repos dans un référentiel $\mathcal{R}$ et un poit matériel animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans ce référentiel. La force de frottement fluide ou force de trainée est une force de freinage qui s'oppose au mouvement : sa direction est opposée à celle du vecteur vitesse $\vec{v}$.

Deux modèles alors :

- ▷ pour les faibles vitesses : la force est proportionnelle à la vitesse : $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$.
- ▷ pour de grandes vitesses, la force est proportionnelle au carrée de la vitesse : $\vec{F}_\kappa = -\kappa v\vec{v}$



Attention ! Ce qui compte c'est la différence de vitesse entre le point matériel et le fluide.

Exemple 7 : On s'intéresse au mouvement en 2D d'un masse, repéré dans un système de coordonnées cartésien $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

1. *Donner la dimension des coefficients α et κ, coefficients de frottement à haute et basse vitesse.*
2. *On suppose que la vitesse est faible. Exprimer la force de frottement fluide.*
3. *On suppose que la vitesse est élevée. Exprimer la force de frottement fluide.*

CORRECTION

1. ▷ force à basse vitesse : $[F] = [\alpha][v]$ donc $[\alpha] = [F]/[v]$ =kg.m.s^{-2}/(m.s^{-1})=kg.s^{-1}
   ▷ force à haute vitesse : $[F] = [\kappa][v^2]$ donc $[\alpha] = [F]/[v^2]$ =kg.m.s^{-2}/(m.s^{-1})^2=kg.m^{-1}
2. Dans le cas d'une vitesse faible : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.
   Partie cinématique : *on décrit le mouvement de la masse*
   avec le système de coordonnées,
   $$\text{position } \overrightarrow{OM} = x(t)+\vec{e}_x+z(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = \dot{x}(t)+\vec{e}_x+\dot{z}(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = \ddot{x}(t)+\vec{e}_x+\ddot{z}(t)\vec{e}_z$$
   on a donc $\vec{F} = -\alpha\left(\dot{x}(t) + \vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z\right)$
3. Dans le cas d'une vitesse élevée : $\vec{F} = -\kappa v(t)\vec{v}$.
   Partie cinématique : *on décrit le mouvement de la masse*
   avec le système de coordonnées,
   $$\text{position } \overrightarrow{OM} = x(t)+\vec{e}_x+z(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = \dot{x}(t)+\vec{e}_x+\dot{z}(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = \ddot{x}(t)+\vec{e}_x+\ddot{z}(t)\vec{e}_z$$
   avec $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$. On a donc $\vec{F} = -\kappa\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \times \left(\dot{x}(t) + \vec{e}_x + \dot{z}(t)\vec{e}_z\right)$

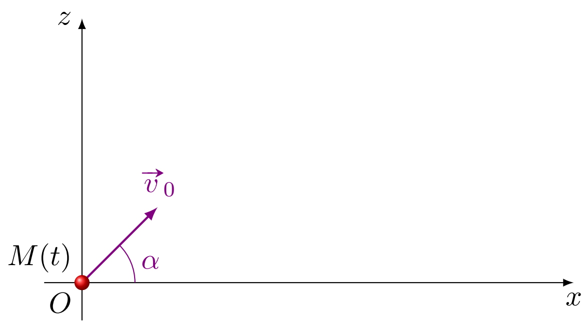
3 Exemples classiques de mouvement : la chute libre et le mouvement d'un pendule

Rien n'est à apprendre ici sauf ***la méthode de résolution qui doit être tout le temps la même !***

3.1 Lois horaires de la chute libre sans frottements

La méthode développée ici sera à étendre à tous les exercices de mécanique qu'on traitera. On étudie le mouvement d'une particule de masse m lancée avec un certain vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$.

> ***Exemple 8 :*** *On étudie le mouvement d'une masse m lancée avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ depuis le sol (altitude nulle) formant un angle α avec l'horizontale. On considère que durant son trajet, la masse n'est soumise qu'à son poids.*
>
> 1. *Obtenir les équations scalaires du mouvement.*
> 2. *En déduire les lois horaires du mouvement.*
> 3. *Déterminer l'altitude maximale de la masse au cours du temps.*
> 4. *Déterminer la trajectoire $z(x)$ décrite par la particule au cours de son mouvement.*
> 5. *Déterminer la distance parcourue par la masse quand elle retombe au sol. En déduire la valeur optimale de l'angle de lancer α*



Attention ! C'est un problème de **dynamique**. Cela veut dire qu'on étudie à la fois le mouvement (cinématique) et ses causes (mécanique).
Il y a des forces mais on ne perd donc pas ses bonnes habitudes de cinématique!!!

CORRECTION

1. *Les équations du mouvement sont des équations différentielles qui régissent l'évolution des coordonnées : $\rightsquigarrow$ c'est le PFD projeté.*
   - **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
     on choisit un système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$

     position $\overrightarrow{OM} = x(t)+\vec{e}_x+z(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ vitesse $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x+\dot{z}(t)\vec{e}_z \Rightarrow$ accélération $\vec{a} = \ddot{x}(t)+\vec{e}_x+\ddot{z}(t)\vec{e}_z$
   - **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
     - le poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
   - **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
     référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \text{ on projette sur les axes } \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

2. *Les lois horaires du mouvement c'est l'expression des coordonnées en fonction du temps : $\rightsquigarrow$ c'est intégré le PFD*

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A \\ \dot{z} = -gt + B \end{cases}$$

avec A et B deux constantes d'intégrations ... "Constante d'intégration" $\Rightarrow$ Conditions Initiales!!! Ici on a intégré l'accélération, on a la vitesse.
A $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$. C'est un **VECTEUR** donc on décompose dans la base :

$$\vec{v_0} = \underbrace{v_0\cos\alpha}_{\dot{x}(0)}\vec{e}_x + \underbrace{v_0\sin\alpha}_{\dot{z}(0)}\vec{e}_z$$

Finalement $A = v_0 \cos\alpha$ et $B = v_0 \sin\alpha$.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t + A \\ z = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + B \end{cases}$$

avec A et B deux constantes d'intégrations ... "Constante d'intégration" $\Rightarrow$ Conditions Initiales ! ! ! Ici on a intégré la vitesse, on a la position.
A $t = 0$, $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$. C'est un **VECTEUR** donc on décompose dans la base :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \underbrace{0}_{x(0)} \vec{e}_x + \underbrace{0}_{z(0)} \vec{e}_z$$

donc $A = 0$ et $B = 0$.
Finalement $x(t) = v_0 \cos\alpha t$ et $z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha t$.

3. *Il est important de "traduire" en formule mathématiques manipulable le texte !*
L'altitude maximale z_{max} est le maximum de $z(t)$. On cherche donc $\dot{z}(t_{max} = 0$ et $z_{max} = z(t_{max})$. On remarque qu'à l'altitude max, la vitesse verticale s'annule : la masse fait "demi-tour".

$$\dot{z}(t_{max}) = 0 \Rightarrow -gt_{max} + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

et donc $z_{max} = z(t_{max}) = -\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

4. *Pour le moment on a les coordonnées x et z en fonction du temps : $x(t)$ et $z(t)$. On veut z en fonction de x : $z[x]$.*

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ z = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ z = -\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \end{cases}$$

On a alors : $z[x] = -\dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$. C'est l'équation d'une parabole.

5. *De nouveau il faut "traduire" la phrase en math !*
La distance d parcouru est la position x de la balle telle que l'altitude z est nulle. On cherche donc $z[d] = 0$.

> ***Remarque :*** *On pourrait chercher t_0 tel que $z(t_0) = 0$ et $d = x(t_0)$ mais ce serait plus long.*

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}d^2 + \tan\alpha d = 0 \;\Rightarrow\; d = 0 \text{ et } d = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

Pour maximiser α il faut maximiser $\cos\alpha \sin\alpha$. Pour cela, l'angle ne doit être ni trop grand ni trop petit. C'est pour $\alpha = \pi/4 = 45°$.

Vous savez le faire : OK ... Vous savez le faire en moins de 20 minutes : là c'est acquis !

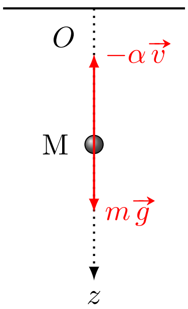
3.2 Chute libre verticale avec frottements

On s'intéresse cette fois à la chute verticale d'une masse mais, à cause de la vitesse élevée de cette dernière, les frottements fludies de l'air sont à prendre en compte.

> ***Exemple 9 :*** *On étudie la chute verticale d'une masse m sous l'action de la pesanteur. On lâche cette dernière sans vitesse initiale à l'altitude $h = 300m$. A cause de la présence de l'air autour d'elle, on suppose que l'amosphère exerce sur la masse une force de frottement fluide $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$.*
> *On choisit pour cette exercice un axe verticale (Oz), orienté vers le haut.*
> 1. *Donner l'équation du mouvement de la masse.*
> 2. *En déduire l'évolution de la vitesse $v(t)$ au cours du temps ainsi que la vitesse maximale v_{max} atteinte.*
> 3. *En déduire le temps $\tau_{1/2}$ au bout duquel la masse atteint la moitié de sa vitesse finale.*
> 4. *Exprimer l'équation horaire $z(t)$ du mouvement.*

CORRECTION

1. **SCHEMA !!!!!!!**



▷ **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
on choisit un système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_z)$ car le mouvement est suivant un axe seul.

$$\text{position } \overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z$$

▷ **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
  ▷ le poids $m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$
  ▷ frottement fluide : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ *(c'est un vecteur, on décompose !)* $\vec{F} = -\alpha\dot{z}\vec{e}_z$.

▷ **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \text{ on projette sur l'axe } \Rightarrow m\ddot{z} = +mg - \alpha\dot{z}$$

Finalement on a une équation d'ordre 1, sur $\dot{z} = v(t)$, la vitesse de la masse. On ne perd pas les bonnes habitudes, on l'écrit sous forme canonique.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{1/\tau} v(t) = g$$

2. On décompose la solution :
   ▷ solution particulière : on cherche une constante : $v_P = g\tau = \dfrac{mg}{\alpha}$.
   ▷ solution homogène : $\tilde{v} = Ae^{-t/\tau}$
   CI : à $t = 0$, $v(0) = 0$ donc $A = -\dfrac{mg}{\alpha}$.
   Finalement $v(t) = \dfrac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.
3. On remarque que $v(\infty) = \dfrac{mg}{\alpha}$ donc on cherche : $1 - e^{-\tau_{1/2}/\tau} = \dfrac{1}{2}$ donc $\tau_{1/2} = \tau \ln 2$.
4. Pour trouver $z(t)$ on intègre de nouveau $v(t)$ et on utilise la CI $z(0) = 0$. On trouve :

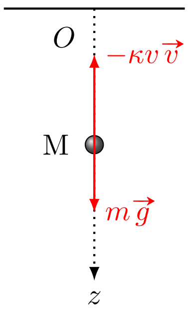
$$z(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(t + \frac{e^{-t/\tau} - 1}{\tau}\right)$$

Exemple 10 : *On reprend le système précédent mais désormais on considère un modèle de frottement quadratique $\vec{F}_\kappa = -\kappa v \vec{v}$.*

1. *Donner l'équation du mouvement de la masse.*
2. *Comparer la force de pesanteur et la force de frottement fluide aux temps cours. En déduire comment tombe la masse aux temps cours.*
3. *Donner l'accélération de la masse aux temps longs. En déduire l'expression de la vitesse stationnaire.*
4. *Proposer un programme qui permet d'obtenir une solution approchée de la solution $v(t)$ à l'aide de la méthode d'Euler.*

CORRECTION

1. **SCHEMA !!!!!!!**



▷ **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse*
on choisit un système de coordonnées cartésien $(O, \vec{e}_z)$ car le mouvement est suivant un axe seul.

$$\text{position } \overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z \Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = \dot{z}(t)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = \ddot{z}(t)\vec{e}_z = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$$

▷ **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
  ▷ le poids $m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$
  ▷ frottement fluide : $\vec{F} = -\kappa v(t)\vec{v}$ *(c'est un vecteur, on décompose !)* $\vec{F} = -\kappa\dot{z}^2\vec{e}_z = -\kappa v^2\vec{e}_z$.

▷ **Partie dynamique :** *on choisit un référentiel et on applique le PFD*
référentiel terrestre supposé galiléen ; PFD :

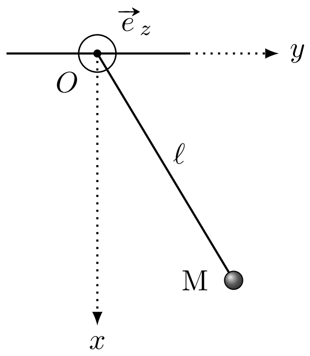
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \text{ on projette sur l'axe } \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = +mg - \kappa v^2$$

2. Aux temps cours, la vitesse est faible donc $\kappa v^2 << mg$v : il est raisonnable de ne considérer que le poids. La masse tombe comme en chute libre.
3. Aux temps longs, la vitesse de la masse tend vers une valeur stationnaire (c'est le régime permanent). Donc son accélération est nulle. On a alors :

$$0 = mg - \kappa v_\infty^2 \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

4. *Cf TP Euler*

3.3 Mouvement d'un pendule

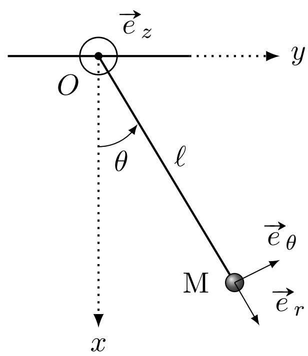


On considère une masse m attachée au bout d'un fil inextensible de longueur l. La masse oscille librement sous l'effet de la pesanteur g. On la lâche sans vitesse initiale en lui faisant faire un angle θ_0 avec la verticale.

> **Exemple 11 :**
> 1. *Introduire sur un schéma un système de coordonnées adapté à l'étude du problème.*
> 2. *Réaliser un bilan des forces et les représenter sur votre schéma.*
> 3. *Donner la position d'équilibre du système.*
> 4. *Ecrire les deux équations du mouvement.*
> 5. *Dans le cas de petites oscillations, $\theta << 1$. Montrer alors que l'angle que forme le fil avec la verticale est solution d'une équation différentielle bien connue.*
> 6. *Donner l'expression des coordonnées de M au cours du temps.*
> 7. *Donner la vitesse maximale atteinte par le pendule ainsi que sa position lorsqu'il l'atteint.*
> 8. *Exprimer la tension du fil $\vec{T}$ au cours du temps.*
>   ***Force de frottement fluide***
>   *On prend désormais en compte une force de frottement fluide $\vec{F}$ linéaire avec la vitesse $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.*
> 9. *Donner la nouvelle équation du mouvement. Quelle est l'équation différentielle obtenue ?*
> 10. *Pour quelle valeur de α n'observe-t-on aucune oscillation du pendule ?*
> 11. *Pour quelle valeur de α le pendule rejoint-il sa position d'équilibre le plus rapidement ?*

CORRECTION

1. **SCHEMAAAAAAAAA ! ! !**



Le pendule semble tourner autour du point O, on introduit un système de coordonnées polaire de centre O.
Attention ! quelque soit le point qu'on observe $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ font un angle de $+\pi/2$ **POSITIF** !

2.

3. **Partie mécanique :** *on décompose les forces dans la base*
   ▷ le poids $m\vec{g} = +mg\vec{e}_x$ **MAIS** $\vec{e}_z$ ne fait pas partie des vecteurs de la base ! !

$$\vec{e}_z = \cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \;\Rightarrow\; m\vec{g} = +mg\left(\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

   ▷ la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$
   Attention ! *absolument aucune idée de la valeur de T ! !*

4. A l'équilibre, la somme des forces est nulles :

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = -T + mg\cos\theta \\ 0 = -mg\sin\theta \end{array} \right.$$

Donc $\theta_{eq} = 0$.

5. ▷ **Partie cinématique :** *on décrit d'abord le mouvement de la masse* dans le système de coordonnées cylindrique $r = l$ et donc :

$$\text{position } \overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r Rightarrow \text{ vitesse } \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \text{ accélération } \vec{a} = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Les équations du mouvement projeté sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} -ml\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{array} \right.$$

6. Si $\theta << 1$ alors $\sin\theta \simeq \theta$. Par conséquent on a, via l'équation sur $\vec{e}_\theta$: $ml\ddot{\theta} = -mg\theta$.
On reconnaît l'équation d'un Oscillateur Harmonique : on la met sous forme canonique !!

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \text{ et donc } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

7. *On résout comme on sait faire !!*
On décompose : $\theta(t) = \theta_P + \widetilde{\theta}$, où θ_P est la solution particulière qui correspond au Régime Permanent. Ici $\theta_P = 0$.

$$\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes d'intégrations}$$

CI $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale) $\Rightarrow A = \theta_0$ et $B = 0$.

8. Vitesse de la masse $v(t) = l|\dot{\theta}| = l\theta_0\omega_0|\sin\omega_0 t|$. La vitesse maximale est donc $l\theta_0\omega_0$, atteinte pour $t_{max} = \dfrac{\pi}{2\omega_0}$.
A cet instant $\theta(t_{max}) = \theta_0\cos\omega_0\dfrac{\pi}{2\omega_0} = 0$: la masse est en position verticale.

9. Pour trouver T, on utilise l'équation du mouvement qu'on a pas encore utilisée et qui fait apparaître T : $-ml\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta$. Donc :

$$T = mg\cos\theta - ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\left[\theta_0\cos\omega_0 t\right] + ml\left(-\theta_0\omega_0\sin\omega_0 t\right)^2$$

Force de frottement fluide

10. La force de frottement se décompose dans la base comme $\vec{F} = -\alpha\vec{v} = -\alpha l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Finalement l'équation du mouvement sur $\vec{e}_\theta$ s'écrit :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\underbrace{\sin\theta}_{\simeq\theta} - \alpha l\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti. On introduit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ et $Q = \dfrac{m}{\alpha}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

11. Pas d'oscillation si $Q < 1/2$ donc si $\alpha > \dfrac{m}{2}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

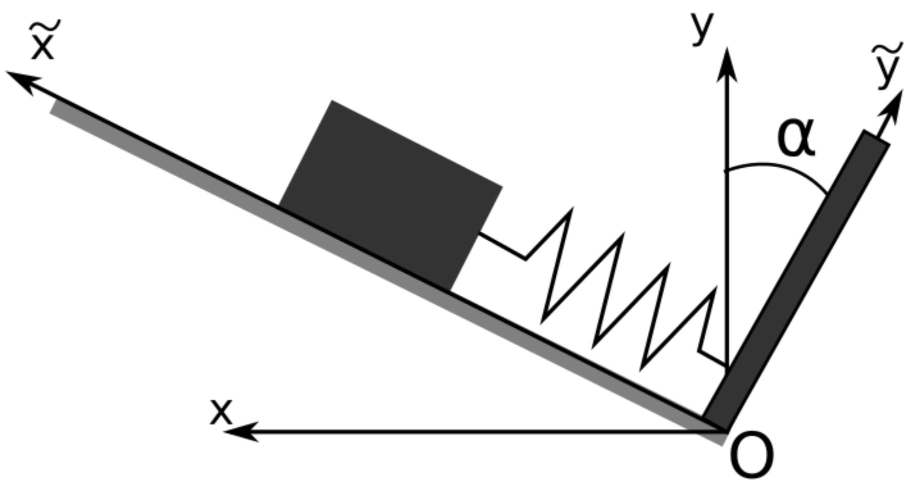
12. Pour que le pendule retrouve sa position d'équilibre rapidement, il faut être en régime critique donc $Q = 1/2 \Rightarrow \alpha = \dfrac{m}{2}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Vous savez le faire : OK ... Vous savez le faire en moins de 20 minutes : là c'est acquis !

μDm Glissement d'un solide

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

On s'intéresse au mouvement d'un solide cubique de masse m glissant sur un plan incliné. On attache le solide à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Le plan forme un angle α avec la verticale. On introduit deux repères cartésiens (O, x, y) et $(O, \widetilde{x}, \widetilde{y})$.
On appelle μ le coefficient de friction solide.



On note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteur de la base cartésienne (O, x, y) et $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ les vecteur de la base cartésienne $(O, \widetilde{x}, \widetilde{y})$

1. Exprimer les forces qui s'appliquent sur le système.
   Attention ! *on les exprime dans la base adaptée à la description du système !!!*
2. Le solide est immobile à une position $\widetilde{x}_{eq} = 2l_0$.
   (a) Donner l'expression de $\vec{T}$ la réaction tangentielle. Dans quel sens pointe-t-elle ?
   (b) Donner une condition sur l'angle l_0 pour que l'équilibre soit possible.
3. (*Bonus, dur*) Donner , à un angle α fixé, la plage $[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2]$ des positions possibles d'équilibre.

On s'intéresse au mouvement du solide depuis la position $\widetilde{x} = 10l_0$. Le solide est lâché sans vitesse initiale.

4. Montrer que l'équation du mouvement de la masse est :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{x}}{\mathrm{d}t^2} = -k(\widetilde{x} - l_0) + \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

5. Donner l'expression de la position $\widetilde{x}$ au cours du temps. En déduire celle de la vitesse.
6. En déduire l'instant T_{stop} où la masse s'arrête ainsi que sa position $\widetilde{x}_{\text{stop}}$. La masse va-t-elle taper le mur en O ?

μDm Glissement d'un solide

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

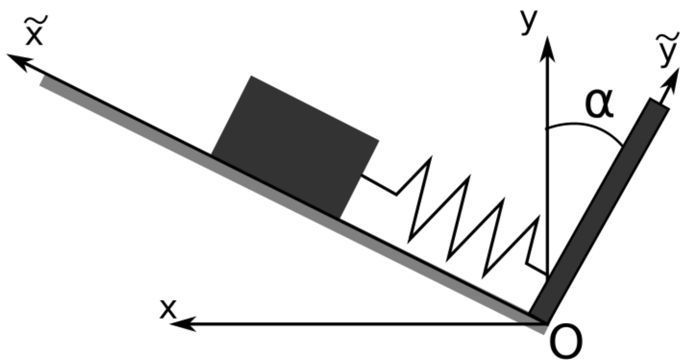
*On applique la **METHODE** du PFD ...*

Vecteur cinématiques

- position $\overrightarrow{OM} = \widetilde{x}\vec{u}_x$
- vitesse $\overrightarrow{OM} = \dot{\widetilde{x}}\vec{u}_x$
- accélération $\overrightarrow{OM} = \ddot{\widetilde{x}}\vec{u}_x$

Bilan des forces

- poids : $m\vec{g} = mg\,(-\sin\alpha\vec{u}_x - \cos\alpha\vec{u}_y)$
- réaction normale : $\vec{N} = +N\vec{u}_y$
- frottement solide : $\vec{T} = T\vec{u}_x$
- force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(\widetilde{x} - l_0)\vec{u}_x$.



Les équations du mouvement sont alors :

$$(\vec{u}_x)\ :\ m\ddot{\widetilde{x}} = -k(\widetilde{x} - l_0) + T - mg\sin\alpha \ \text{ et } \ 0 = N - mg\cos\alpha$$

1. *Déjà fait ...*
2. Les équations projetés de la statique donne :

$$(\vec{u}_x)\ :\ 0 = -k(2l_0 - l_0) + T - mg\sin\alpha \ \text{ et } \ 0 = N - mg\cos\alpha$$

   (a) On obtient alors $T = mg\sin\alpha + kl_0$. $\vec{T}$ pointe selon les $\widetilde{x}$ croissant.

   (b) Pour que l'équilibre soit possible, d'après les lois de Coulomb, il faut que $T < \mu N$ soit :

$$mg\sin\alpha + kl_0 < \mu mg\cos\alpha$$

   Par conséquent : $l_0 < \dfrac{mg}{k}\,(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$.

3. On refait l'étude précédente mais avec comme position d'équilibre $\widetilde{x}$. On trouve alors :

$$T = mg\sin\alpha + k(\widetilde{x} - l_0)$$

   Deux conditions alors :

   - $\vec{T}$ pointe selon les $\widetilde{x}$ croissant et donc $|T| = T$.
     La condition d'équilibre est alors :

$$mg\sin\alpha + k(\widetilde{x} - l_0) < \mu mg\cos\alpha \ \Rightarrow\ \widetilde{x} < l_0 + \frac{mg}{k}\,(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$$

   - $\vec{T}$ pointe selon les $\widetilde{x}$ décroissant et donc $|T| = -T$ La condition d'équilibre est alors :

$$-mg\sin\alpha - k(\widetilde{x} - l_0) < \mu mg\cos\alpha \ \Rightarrow\ \widetilde{x} > l_0 - \frac{mg}{k}\,(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

   On s'intéresse au mouvement du solide depuis la position $\widetilde{x} = 10l_0$. Le solide est lâché sans vitesse initiale.

4. On reprend les équations du mouvement trouvées précédemment :

$$(\vec{u}_x)\ :\ m\ddot{\widetilde{x}} = -k(\widetilde{x} - l_0) + T - mg\sin\alpha \ \text{ et } \ N = mg\cos\alpha$$

   Comme le solide glisse, on peut écrire $T = \mu N$ et $\vec{T}$ s'oppose au déplacement, qui se fait suivant les $\widetilde{x}$ décroissant.
   Donc $\vec{T} = -\mu mg\cos\alpha\vec{u}_x$.
   Le PFD suivant $\vec{u}_x$ donne alors :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{x}}{\mathrm{d}t^2} = -k\,(\widetilde{x} - l_0) + \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

5. On écrit l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\widetilde{x} = \frac{k}{m}l_0 + g\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

On reconnaît un oscilalteur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

On résout, en décomposant en solution particulière + solution homogène :

$$\widetilde{x} = l_0 + \frac{mg}{k}\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right) + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

CI : $\widetilde{x}(0) = 10l_0$ et $\dot{\widetilde{x}}(0) = 0$ donc

$$A = 9l_0 - \frac{mg}{k}\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right) \quad \text{et} \quad B = 0$$

On a : $\widetilde{x} = l_0 + \frac{mg}{k}\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right) + \left(9l_0 - \frac{mg}{k}\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right)\right)\cos\omega_0 t$

6. La masse s'arrête lorsque $\dot{\widetilde{x}} = 0$ soit pour

$$\sin\omega_0 T_{\text{stop}} = 0 \;\Rightarrow\; T_{\text{stop}} = \pi/\omega_0$$

(*on prend la première solution non-nulle*).

La position est alors :$\widetilde{x}_{\text{stop}} = \widetilde{x}(T_{\text{stop}}) = l_0 + \frac{mg}{k}\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right) - \left(9l_0 - \frac{mg}{k}\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right)\right)$

$$x_{\text{stop}} = 2\frac{mg}{k}\left(\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right) - 8l_0$$

La masse tapera le mur si $x_{\text{stop}} < 0$.

TD15 Principe de la dynamique newtonienne

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

1 Chute libre

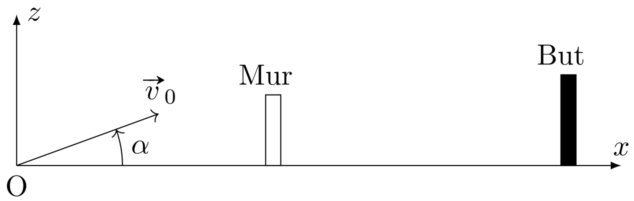
Exercice 1 - Profondeur d'un puits :
Pour connaître la profondeur H d'un puits, on lâche sans vitesse initiale une pierre. Le son du choc de la pierre contre le fond du puits est perçu au bout d'une durée $T = 7,30$ s après le lâcher de la pierre. Calculer H

- ▷ en ne prenant pas en compte la propagation du son
- ▷ en prenant en compte la propagation.

On prend $g = 9,81$ m.s^{-2} . La vitesse du son dans l'air valant $c = 340$m/s

Réponses : $H = 218$m

Exercice 2 - Coup franc :
On étudie un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2.44 m (cf figure). Le ballon de masse $m = 430$ g est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O. Le mur, de hauteur 1.90 m, est situé à 9.15 m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ initiale de norme $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des temps correspond au départ du ballon.



Mouvement sans frottement

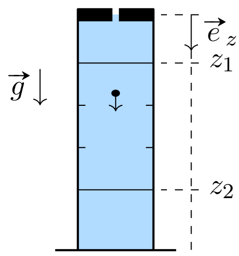
1. Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air. Établir l'équation $z(x)$ de la trajectoire.
2. Le ballon passe-t-il au dessus du mur ? Le tir est-il cadré ? Quelle est la durée du tir ?
astuce : pour ces questions, prendre le temps de "traduire" les questions en formule mathématiques sur $z[x]$ ou $z(t)$.

Mouvement avec frottement

3. En réalité, des frottements existent que l'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur $5 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.
En appliquant le PFD, montrer que les composantes du vecteur vitesse de la balle vérifie une équation différentielle du premier ordre.
4. Montrer que la vitesse tend vers une valeur limite $\vec{v}_{lim}$ qu'on exprimera.
5. Donner un ordre de grandeur du temps nécessaire à cette évolution. La balla atteindra-t-elle un jour cette vitesse limite ?

2 Frottements

Exercice 3 - Viscosimètre à bille :



Une bille en acier (de masse volumique $\rho_a = 7800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) de rayon $R = 5\,\mathrm{mm}$ tombe dans de la glycérine (de masse volumique $\rho_g = 1260\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$). La bille subit, lorsqu'elle possède la vitesse $\vec{v}$, une force de frottement fluide (ou force de traînée) $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$ où η est une constante appelée viscosité dynamique de la glycérine. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. On néglige la poussée d'Archimède.

On lâche la bille au niveau du haut du tube sans vitesse initiale.

1. Préciser le référentiel d'étude. Effectuer un bilan des forces s'appliquant sur la bille.
2. Établir l'équation différentielle que vérifie la vitesse de la bille $\vec{v}$. Quelle la constante τ du mouvement ?
3. A partir de l'équation du mouvement, montrer que la vitesse de la bille tend vers une valeur limite dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.
   Pour quels temps cette vitesse est-elle atteinte ?
4. Donner l'expression de la vitesse au cours du temps.

   L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1.6\,\mathrm{s}$ mise pour passer de l'altitude $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$ à $z_2 = 50\,\mathrm{cm}$.
   On suppose qu'entre ces deux altitudes, le régime permanent est atteint.
5. En déduire l'expression puis la valeur numérique de la viscosité η.
6. Donner la valeur numérique de τ et donner un ordre de grandeur de la distance parcourue pendant ce temps. Pourquoi ne pas avoir réalisé la mesure précédente depuis la surface ?
7. On donne $\eta_{eau} = 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$. À votre avis, ce dispositif est-il adapté à la mesure de la viscosité de l'eau ?

Exercice 4 - Voiture et frottements fluides :

Une voiture, de masse m, roulant rectilignement à la vitesse $v_0 = v_0\vec{u_x}$, coupe son moteur à $t = 0$ et n'est plus soumise, suivant $\vec{u_x}$, qu'à une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\vec{F} = -h\vec{v}$.

1. Écrire l'équation décrivant la variation de v en fonction du temps (on fera apparaître une constante de temps τ que l'on définira).
   En déduire l'équation horaire du mouvement.
2. Au bout de combien de temps et sur quelle distance la voiture s'arrête-t-elle ?
3. Exprimer la vitesse de la voiture en fonction de sa position : $v(x)$.
4. Reprendre l'étude précédente si la force de frottement est de la forme : $\vec{F} = -k\|\vec{v}\|\vec{v}$.
   Astuce :
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{1+t/\tau}\right] = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{1+t/\tau}\right)^2$$

Réponses : 1. $\tau = m/h$; $x(t) = v_0\tau(1 - e^{-t/\tau})$ — *2.* $v(t) = \dfrac{v_0}{1+\frac{t}{\tau}}$ où $\tau = \dfrac{m}{kv_0}$; $x(t) = v_0\tau\ln\left(1+\dfrac{t}{\tau}\right)$

Exercice 5 - Descente à ski (frottement solides) :

Un skieur de masse m descend une piste faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ la vitesse du skieur.
La neige exerce sur le skieur un frottement solide de coefficient dynamique.

On choisit comme origine de l'axe Ox la position initiale du skieur que l'on suppose partir avec une vitesse nulle et on note (Oy) la normale à la piste.
On prend $m = 80\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 45°$ et $\lambda = 10\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, $f = 0.05$.

1. Déterminer la réaction normale exercée par la neige sur le skieur.

2. Montrer que le skieur atteint une vitesse limite v_l. Calculer v_l (le record du monde de vitesse en ski est d'environ $250\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$).
3. Déterminer la vitesse du skieur au cours du temps.
4. Calculer l'instant t_1 où le skieur atteint une vitesse égale à $v_l/2$.
5. À la date t_1, le skieur chute. On néglige alors la résistance de l'air et le coefficient de frottement avec le sol est multiplié par 100. Calculer la distance parcourue par le skieur dans cette position avant de s'arrêter.

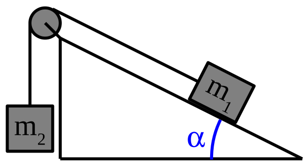
En réalité, la modélisation pour les frottements de l'air n'est pas pertinente. On choisit donc maintenant $\vec{F} = -KSv\vec{v}/2$. On prendra $K = 0.6\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et $S = 0.4\,\mathrm{m}^2$.

6. En négligeant les frottements avec la piste montrer que le skieur atteint une vitesse nouvelle limite v_l.

3 Tension/ressorts

Exercice 6 - Masses reliées par une poulie :

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil inextensible de masse négligeable. La masse m_1 glisse sans frottements sur un plan incliné d'angle α et la masse m_2 a un déplacement vertical, le fil glissant sans frottements sur une poulie.



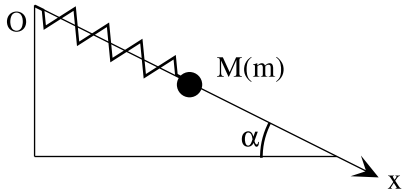
1. Introduire pour chaque masse un repère de coordonnées adapté à leur mouvement.
2. Quel est le lien entre l'accélération (en norme) de la masse 1 et celle de la masse 2 ?
3. Déterminer la réaction R du plan incliné sur la masse m_1.
4. Exprimer la tension T du fil.

Réponses : $T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g(1+\sin\alpha)$; $N = m_1 g\cos\alpha$

Exercice 7 - Tension d'une corde :

1. Une pierre de masse m est attachée au bout d'une corde sans masse de longueur R. On laisse le fil pendre librement. Lorsque la pierre est en équilibre, exprimer la norme de la tension de la corde T en fonction de m et g.
2. La pierre est mise en mouvement circulaire uniforme, de rayon R, dans le plan horizontale à la vitesse v_0.
   - ▷ Introduire un repère et exprimer la position, vitesse et accélération de la pierre en fonction de R, v_0 et des vecteurs de la base.
   - ▷ Réaliser un bilan des forces.
   - ▷ A l'aide du PFD en déduire la norme de $\vec{T}$, la tension du fil.
3. (*) La pierre réalise un mouvement circulaire non-uniforme, de rayon R, dans le plan verticale. On repère la position de la pierre à l'aide de l'angle θ que le fil forme avec la verticale.
   - ▷ Introduire un repère cylindrique et exprimer la position, vitesse et accélération de la pierre en fonction de R, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et des vecteurs de la base.
   - ▷ Réaliser un bilan des forces (on n'oubliera pas la pesanteur).
   - ▷ A l'aide du PFD en déduire la norme de $\vec{T}$, la tension du fil, en fonction de R, m, g, θ et $\dot{\theta}$
   - ▷ Lorsque la pierre passe par le point le plus bas, la tension de la corde T_0 est égale à trois fois le poids de la pierre. En déduire la vitesse $v(\theta = 0)$ de la pierre en ce point.

Exercice 8 - Ressort sur plan incliné :



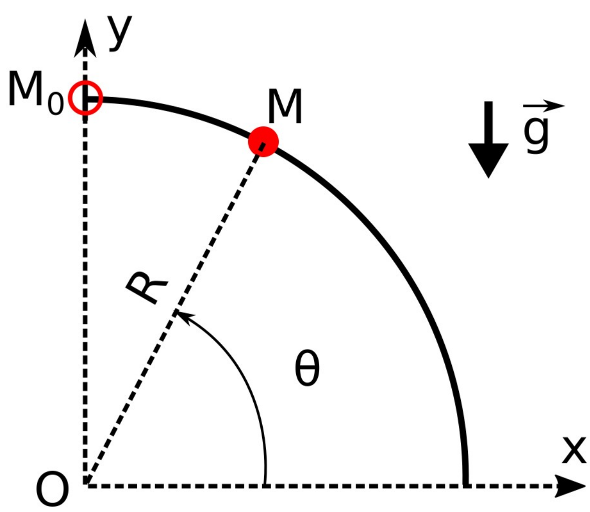
On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 , dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement lors du glissement sur le plan incliné. S

1. Déterminer l'abscisse x_{eq} du point M à l'équilibre en fonction de l_0 ,m, g, k et α.
2. A partir de la position d'équilibre, M est déplacé d'une distance d comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale.
   Etablir l'équation horaire $x(t)$ en fonction de d, k, m et x_e.

Réponses : $x_e = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$; $x(t) = x_e + d\cos\omega_0 t$

Réaction du support et décollage

Exercice 9 - Piste de luge : On considère une piste de luge qui a la forme d'un demi cercle de centre O et de rayon R. On néglige les frottement solide (on glisse sur de la glace) et fluide (on ne va pas assez vite).
La luge commence en M, $\theta = \pi/2$, sans vitesse initiale et glisse le long de la piste. On cherche l'angle θ_1 pour lequel la luge décolle de la piste.



1. Déterminer les expressions des vecteurs vitesses et accélération du point M.
2. Par l'application du PFD, donner deux équations du mouvement dont une peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\theta} = k\cos\theta$$

   avec k une constante dont on précisera l'expression.
3. En intégrant l'expression précédente, obtenir une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de la position θ.
4. En déduire une expression du vecteur vitesse de la luge au point M.
5. Montrer que la luge décolle au point de coordonnées $\theta_1 = \arcsin 2/3$.
   En déduire la valeur de la vitesse au décollage.

TD15 Principe de la dynamique newtonienne

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

Avant toute chose, on retravaille les exemples du COURS ! ! ! ! ! ! ! ! ! !

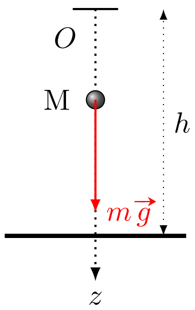
Pour chacun des exercices, on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

1 Chute libre

Exercice 1 - Profondeur d'un puits :

Sans prendre en compte la vitesse du son

On prend un axe (Oz), orienté vers le bas avec l'origine au sommet du puits.



▷ **Vecteurs cinématiques :**
$\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$; $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$.

▷ **Bilan des forces :**
poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$.

▷ **PFD :**
$m\vec{a} = m\vec{g}$ donc $\ddot{z} = g$

On intègre : $\dot{z}(t) = a_0 t$ et $z(t) = a_0 t^2/2$ et le temps de chute est $z(T) = H$ donc $H = a_0 T^2/2$.

En prenant en compte la vitesse du son

Complètement similaire sauf que le temps de chute n'est pas le temps au bout duquel on entend le plouf : $T = T_{chute} + T_{son}$, où

▷ Temps de chute : $z(T') = H$ donc $H = a_0 T'^2/2$

▷ Temps de propagation du son : $T_{son} = H/c$

Finalement : $T = \sqrt{\dfrac{2H}{a_0}} + \dfrac{H}{c}$.

Polynôme d'ordre 2 en $Y = \sqrt{H}$. On résout ...

$$Y = \sqrt{\frac{c^2}{2a_0} + cT} - \frac{c}{\sqrt{2a_0}} = \quad \text{donc} \quad H = \sqrt{\sqrt{\frac{c^2}{2a_0} + cT} - \frac{c}{\sqrt{2a_0}}}$$

Exercice 2 - Coup franc :

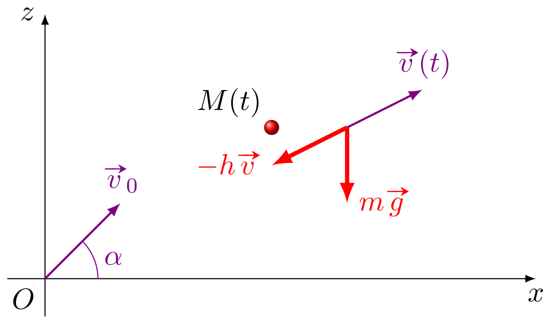
Mouvement sans frottement

1. *C'est de la chute libre "classique" : on reprend son cours et on le fait **rapidement** et **méthodiquement** (les deux allant de paire)*
$$z[x] = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x + \tan\alpha x$$

2. On fait la "traduction"
   ▷ Passe au dessus du mur : $z[9.15] > 1.90$m
   ▷ Tir cadré : $z[20] < 2,44$m
   ▷ Durée du tir : $z(\tau) = 20$m

Plus qu'à faire les AN ...

3. **Mouvement avec frottement**



tout comme avant sauf :
- ...
- Bilan des forces : poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$; force de frottement fluide : $-h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{e}_x - h\dot{z}\vec{e}_z$.
- PFD : $m\vec{a} = m\vec{g} - h\vec{v}$ donc :

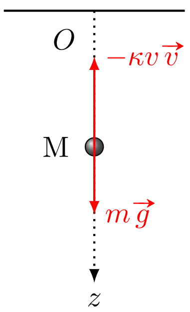
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -h\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg - h\dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + \dfrac{h}{m}\dot{z} = -g \end{cases}$$

On obtient bien deux équations différentielles du premier ordre sur $\dot{z}$ et $\dot{x}$, de temps caractéristique $\tau = m/h$.
- Sans même résoudre, $\dot{x}$ et $\dot{z}$ tendent vers des valeurs limites égales au solution particulière. On trouve alors : $\dot{x}_\infty = 0$ et $\dot{z}_\infty = -mg/h$
  Finalement $\vec{v}_\infty = -mg/h\vec{e}_z$.
- $\vec{v}$ atteint sa valeur limite pour $t > 5\tau$. En faisant l'application numérique, on se rend compte que la balle atteindra le but bien avant.

2 Frottements

Exercice 3 - Viscosimètre à bille :

1. On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.



Attention ! *on applique la méthode*
- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ avec $v(t) = \dot{z}(t)$; $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$
- **Bilan des forces** :
  poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ avec $m = 4\pi R^3\rho_a/g$; force de frottement fluide : $-6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R\dot{z}\vec{e}_z$
- **PFD**
  $m\vec{a} = m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$

2. Donc :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{6\pi\eta R}{m}v = g$$

on introduit le temps caractéristique $\tau = m/(6\pi\eta R) =$

3. **Attention !**

Méthode en DS. Vitesse limite
La vitesse limite (*ou vitesse en régime stationnaire*) est la vitesse aux temps longs : $v_{lim} \simeq v(t)$ pour $t \sim \infty$. La vitesse limite est donc la solution particulière de l'équation v_P.

Ici on a $v(t) \simeq v_\infty$ et donc $0 + \dfrac{6\pi\eta R}{m}v_\infty = g$.
On trouve $v_\infty = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}$. Cette vitesse est atteinte pour des temps $t > 5\tau$.

4. On résout (**Attention !** méthode !!) : $v(t) = v_P + \tilde{v}$
- solution particulière $v_P = v_\infty = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}$
- solution homogène $\tilde{v} = Ae^{-t/\tau}$

CI $v(0) = 0$ donc $v(t) = \dfrac{mg}{6\pi\eta R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1.6\,\mathrm{s}$ mise pour passer de l'altitude $z_1 = 10\,\mathrm{cm}$ à $z_2 = 50\,\mathrm{cm}$. On suppose qu'entre ces deux altitudes, le régime permanent est atteint.

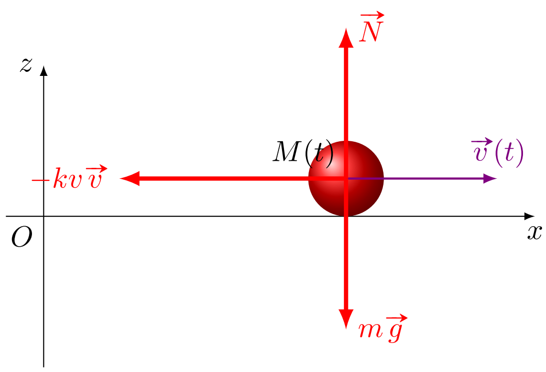
5. En régime permanent, $v(t) \simeq v_\infty$: la vitesse est constante donc $v_\infty \Delta t = z_2 - z_1$. On obtient v_∞ puis η : $\eta = \dfrac{mg}{6\pi R(z_2 - z_1)}\Delta t$.
   AN : $\eta \simeq$.... ? **Attention !** unité !! Pour les trouver on procède par analyse dimensionnelle : $[\eta] = [F]/[R][v] = \mathrm{kg.m^{-1}s^{-1}}$

6. On peut donner une estimation haute de la distance parcourue via $\Delta z = v_\infty \tau$ (comme $v(t) < v_\infty$). L'intérêt de faire les mesures loin de la surface est de se placer en régime stationnaire où $v(t) \simeq v_\infty$ et donc avoir une estimation aisée de $z_2 - z_1$.

   Remarque : *Si $v = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ (sans simplification) il aurait fallu trouver $z(t)$ puis résoudre $z(\Delta t) - z_1 = z_2 - z_1$ avec des exponentielles et tout et tout ... Pas pratique !*

7. On peut avec cette nouvelle valeur de η estimer le temps τ et la distance parcourue avant d'atteindre le régime permanent. On obtient alors un distance parcourue bien trop grande : cela ne fonctionnerait pas aussi facilement (cf remarque).

Exercice 4 - Voiture et frottements fluides : *Question 1, 2, 3 déjà faites dans le TD précédent et le Chap XIV ... On s'attarde sur la question 4.*



- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ avec $v(t) = \dot{x}$ car $\dot{x} > 0$; accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$
- **Bilan des forces**
  poids $-mg\vec{e}_z$; force de frottement fluide $-kv^2\vec{e}_x$; réaction du support $\vec{R} = N\vec{e}_z$ (*pas de frottement*)
- **PFD** :
  sur (Ox), on a alors : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}x = -kv^2$

On cherche donc à résoudre : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}v^2 = 0$.

C'est une équation différentielle d'ordre 1 **NON LINEAIRE** (à cause de v^2) et là **Attention !** : tout ce qu'on a appris ne marche plus !! Notamment : plus de découpage en une solution particulière et une solution homogène.

Méthode en DS. Séparation des variables

Pour résoudre les équations différentielles autres que les 3 classiques (Régime Linéaire d'ordre 1, Oscillateur Harmonique, Oscillateur amorti)

1. on sépare d'un côté tous les termes dépendant de la solution et de l'autre côté tous les termes dépendant de la variable

$$\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{solution:}f(t),\ \mathrm{d}f,\ \ldots} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{variable : } t,\ \mathrm{d}t \text{ ou } x,\ \mathrm{d}x}$$

2. on intègre à gauche et à droite entre $t = 0$ et t en faisant **Attention !** aux bornes :

$$\int_{f(0)}^{f(t)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;;= \int_0^t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. il faut ensuite manipuler l'équation pour obtenir $f(t)$.

L'équation différentielle est $dfracdvdt + \dfrac{k}{m}v^2 = 0$: solution $v(t)$ et variable t. Donc on sépare puis on intègre entre $t = 0$ et t :

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t -\frac{k}{m}\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \left[-\frac{1}{v}\right]_{v(0)}^{v(t)} = -\frac{k}{m}t$$

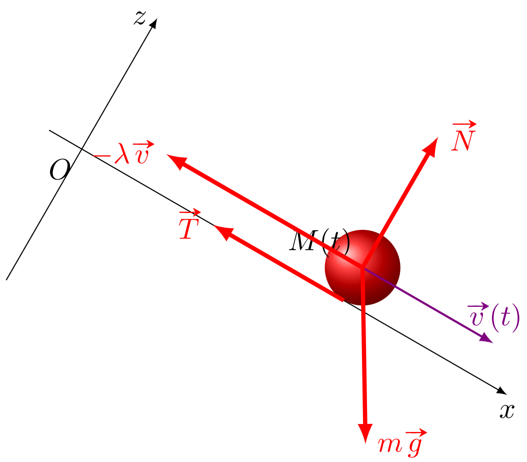
Trouver la primitive peut être parfois difficile ...

Finalement on a : $\dfrac{-1}{v(t)} - \dfrac{-1}{v(0)} = -\dfrac{k}{m}t$. D'où $v(t) = \dfrac{v_0}{1 + \dfrac{kv_0}{m}t}$.

On intègre de nouveau pour trouver la position $x(t)$: $x(t) = \dfrac{kv_0^2}{m} \ln\left[1 + \dfrac{kv_0}{m}t\right]$

Exercice 5 - Descente à ski (frottement solides) :

1. *Si on ne voit pas quoi faire, on applique la méthode de résolution d'exercice de mécanique. Si on sait quoi faire, on sait qu'il faut appliquer la méthode de résolution d'exercice en mécanique ...*



- **Vecteurs cinématiques :**
  - $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ (pas de mouvement suivant (Oy))
  - vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ ($v(t) = \dot{x}$)
  - accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$
- **Bilan des forces :**
  - poids $m\vec{g} = mg\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$
  - force de réaction $\vec{R} = N\vec{e}_y - T\vec{e}_x$ avec $T = fN$ car il y a glissement
  - force de frottement fluide $-\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{e}_x$
- **PFD projeté sur les axes :**
  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - \lambda\vec{v}$ soit

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T - \lambda\dot{x} \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

On a alors $N = mg\cos\alpha$.

2. La projection du PFD sur (Ox) donne : $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - T - \lambda\dot{x}$ soit, avec $T = fN = fmg\cos\alpha$ et $\dot{x} = v(t)$:
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) - \lambda v(t)$$
En régime permanent $v(t) \simeq v_l$ constant et : $0 = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) - \lambda v_l$ soit $v_l = \frac{mg}{\lambda}\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$.

3. On va résoudre l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$
   - solution particulière $v_P = v_l = \frac{mg}{\lambda}\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$
   - solution homogène $\tilde{v} = Ae^{-t/\tau}$.

   CI à $t = 0$, v$(t = 0) = 0$ donc $A + v_l = 0$.
   Attention ! On applique les CI sur $v(t) = v_P + \tilde{v}$ et pas que sur $\tilde{v}$! ! !
$$v(t) = v_l\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec } v_l = \frac{mg}{\lambda}\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$$

4. On pose $v(t_1) = v_l/2$ et on trouve $t_1 = \tau\ln 2$.

5. On recommence l'étude mais désormais avec comme équation : $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg\left(\sin\alpha - 100f\cos\alpha\right)$ et $v(t = 0) = v_l/2$.
   On a alors $v(t) = v_l/2 - mg\left(100f\cos\alpha - \sin\alpha\right)t$ et donc le temps d'arrêt T est $T = \frac{v_l}{2mg\left(100f\cos\alpha - \sin\alpha\right)}$..

En réalité, la modélisation pour les frottements de l'air n'est pas pertinente. On choisit donc maintenant $\vec{F} = -KSv\vec{v}/2$. On prendra $K = 0.6\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $S = 0.4\,\mathrm{m^2}$.

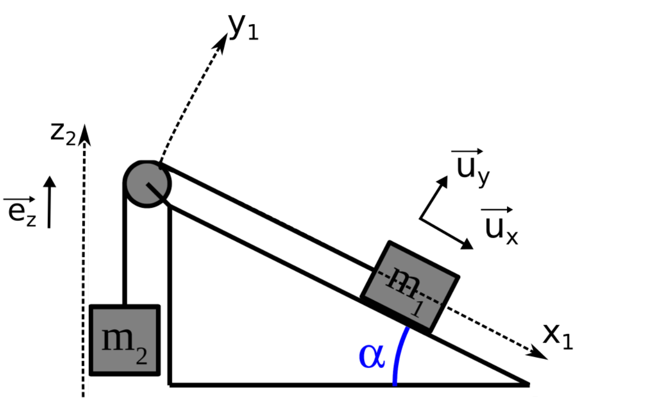
6. Vitesse limite = solution particulière donc
$$0 = mg\sin\alpha - KSv_l^2 \;\Rightarrow\; v_l = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{KS}}$$

3 Tension/ressorts

Exercice 6 - Masses reliées par une poulie :

1. On introduit deux systèmes de coordonnées, un pour chaque masse.
   - masse m_1 : vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et coordonnées (x_1, y_1)/
   - masse m_2 : vecteur $\vec{e}_z$ et coordonnée z_2 (mouvement à 1D)

   Attention ! $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $\vec{e}_z$ ne forment pas une base à 3 dimensions !



2. On remarque que la longueur de la corde reliant les deux masses est fixe : si m_1 se déplace m_2 bouge de la même quantité : $\dot{x}$ (pour m_1) $=\dot{z}$ (pour m_2) et donc $\ddot{x} = \ddot{z}$.

3. *Cf comme d'habitude : on écrit les vecteurs cinématiques de m_1, les forces, ...* ***pour les deux masses séparément ! !***. On trouve alors :
   - masse 1 : $m_1\ddot{x} = m_1 g\sin\alpha - T$ et $0 = -mg\cos\alpha + N$
   - masse 2 : $m_2\ddot{z} = -m_2 g + T$

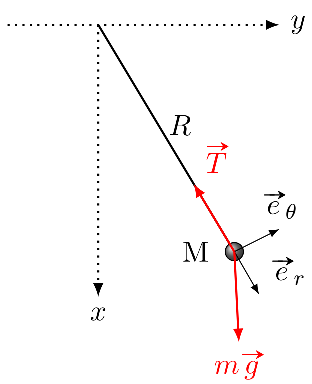
   Attention ! la tension du fil T est la même **en intensité** pour les deux masses ! Donc $N = mg\cos\alpha$

4. Comme $\ddot{x} = \ddot{z}$ alors :
$$g\sin\alpha - \frac{T}{m_1} = -g + \frac{T}{m_2} \;\Rightarrow\; g(1 + \sin\alpha)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

5. Exprimer la tension T du fil.

Exercice 7 - Tension d'une corde :

1. Principe de la statique $T = mg$
2. *Cf cours* $T = mR\omega^2 = m\dfrac{v_0^2}{R}$
3.



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$; $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec $v = R|\dot{\theta}|$; $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

▷ **Bilan des forces**
poids : $m\vec{g} = mg\,(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$; tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

▷ **PFD projeté sur les axes**

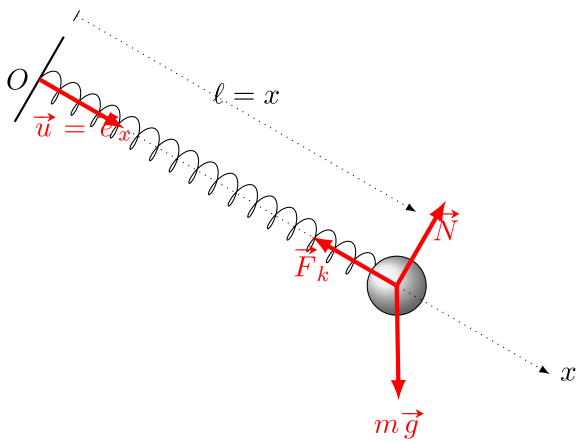
$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

donc $T = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$.

▷ Au point le plus bas $\theta = 0$ donc $\cos\theta = +1$. On a alors $T_0 = mR\dot{\theta}^2(\theta = 0) + mg = 3mg$ donc $\dot{\theta}^2(\theta = 0) = 2g/R$.
Comme $v = R|\dot{\theta}|$ alors $v(\theta = 0) = \sqrt{2gR}$.

Exercice 8 - Ressort sur plan incliné :

D'abord la méthode d'analyse, on verra ensuite la première question ...



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$

▷ **Bilan des forces :**

▷ poids $m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$

▷ force de rappel du ressort : $-k(x - l_0)\vec{e}_x$ (**Attention !** à bien écrire $\vec{u}$ et l dans la base *cf schéma*)

▷ réaction : $\vec{R} = N\vec{e}_y$ (pas de frottement donc $T = 0$)

▷ **PFD projeté sur les axes**

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\theta - k(x - l_0) \\ 0 = -mg\cos\theta + N \end{cases}$$

1. A l'équilibre $\ddot{x} = 0$ donc : $mg\sin\theta - k(x_{eq} - l_0) = 0$ et $x_{eq} = l_0 + mg\sin\alpha/k$
2. On écrit l"équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} = g\sin\theta + \frac{k}{m}l_0 \;\Rightarrow\; \text{Oscillateur harmonique avec } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

On écrit $x(t) = x_P + \tilde{x}$

▷ $x_P = x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$

▷ $\tilde{x} = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

CI $x(0) = x_{eq} + d$ et $\dot{x}(0) = 0$. On a donc :

$$x_{eq} + A = x_{eq} + d \;\text{ et }\; B\omega_0 = 0$$

donc $x(t) = x_{eq} + d\cos\omega_0 t$.

Réaction du support et décollage

Exercice 9 - Piste de luge : 1. Mouvement circulaire donc $r(t) = R$ constant et :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \; ; \; \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \; ; \; \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

2. **Bilan des forces**
   ▷ poids $m\vec{g} = mg(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta$
   ▷ réaction du support $\vec{R} = N\vec{e}_r$ (*pas de frottement*)

   PFD projeté sur les axes

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta + N \\ mR\ddot{\theta} = -mg\cos\theta + \end{cases}$$

   On a alors : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{R}\cos\theta$ et $k = -g/R$.

3. **Attention !** on ne cherche pas ici à obtenir une équation horaire $\dot{\theta}(t)$ mais une équation paramétrique $\dot{\theta}[\theta]$!

   > **Méthode en DS. Obtenir la vitesse en fonction de la position**
   > A partir d'une équation de la forme : ..... $\ddot{\theta}$ = ... $F[\theta]$
   > ▷ on multiplie par $\dot{\theta}$: ..... $\ddot{\theta}\dot{\theta}$ = ... $F[\theta]\dot{\theta}$
   > ▷ on reconnaît $\ddot{\theta}\dot{\theta} = \left(\dot{\theta}^2/2\right)'$
   > ▷ on intègre entre deux **temps** $t = 0$ et t quelconque

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\cos\theta \;\Rightarrow\; \underbrace{\ddot{\theta}\dot{\theta}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\dot{\theta}^2/2]} = -\frac{g}{R} \times \underbrace{\dot{\theta}\cos\theta}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sin\theta]}$$

   On intègre entre $t = 0$ et t :

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\theta}^2/2\right] = -\frac{g}{R}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sin\theta] \;\Rightarrow\; \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}(0)^2}{2} = -\frac{g}{R}\left(\sin\theta - \sin\theta(0)\right)$$

   avec $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \pi/2$).
   On a : $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{R}\left(1 - \sin\theta\right)$.

4. Vecteur vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $v(t) = R|\dot{\theta}|$. Avec l'expression précédente : $v = \sqrt{2gR\left(1 - \sin\theta\right)}$.

5. **Décollage $\iff$ N qui s'annule !!**
   Réaction normale du support : $N = mg\sin\theta - mR\dot{\theta}^2$ soit :

$$N = mg\sin\theta - mR\frac{2g}{R}\left(1 - \sin\theta\right) = 3mg\sin\theta - 2mg$$

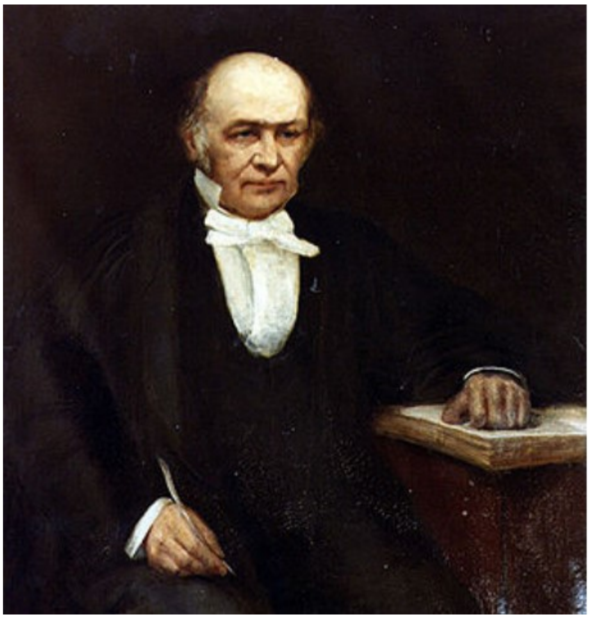
   Donc N s'annule, et il y a décollage, pour $\sin\theta_1 = 2/3$.
   A ce moment là : $v[\theta_1] = \sqrt{2gR\left(1 - 2/3\right)} = \sqrt{\dfrac{2gR}{3}}$.

Chap XVI

Approche énergétique du mouvement

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières



Savoirs ♡

- ♡ **Travail et puissance d'une force**
  - puissance d'une force
  - caractère résistif ou moteur d'une force
  - travail élémentaire d'une force et travail d'une force le long d'une trajectoire

- ♡ **Energie cinétique, gradient et énergie potentielle**
  - énergie cinétique
  - gradient d'une fonction en coordonnées cartésiennes et cylindriques
  - énergie potentielle et lien avec une force conservative
  - travail d'une énergie potentielle

- ♡ **Énergie mécanique et théorèmes énergétiques**
  - Énergie mécanique
  - Théorème de l'énergie mécanique
  - Cas particulier d'un système conservatif

- ♡ **Positions d'équilibres**
  - notion de position d'équilibre et d'état d'équilibre
  - équilibre stable et équilibre instable ; lien avec l'énergie potentielle

Savoir Faire

Calculer le travail d'une force entre deux points A et B

Obtenir l'énergie potentielle d'une force ; conclure sur le caractère conservatif ou non d'une force

Applications des théorèmes énergétiques
- *Discuter de la faisabilité d'un mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique*
- *Pour un système conservatif obtenir des grandeurs : vitesse max ; altitude max ; ...*
- *Discuter l'influence des frottements sur la trajectoire d'un mobile*
- *Obtenir l'équation du mouvement par le théorème de la puissance mécanique*

Décrire le mouvement d'un point à l'aide d'un graphe d'énergie potentielle
- *trouver les positions d'équilibre stable et instable*
- *discuter la nature du mouvement à partir des conditions initiales : état lié ou de diffusion*

Qu'est-ce que l'approche énergétique ?

Que permet le PFD ?

Pour comprendre le principe de l'énergie en mécanique, il faut comprendre ce qu'elle permet de faire mieux que le PFD.

Méthode en DS. Pourquoi le PFD ?
Le PFD permet d'obtenir les équations du mouvement et les lois horaires : ils donnent l'évolution des grandeurs cinématiques **au cours du temps**.

Dans de nombreux cas, on a "trop d'information".

> **Exemple 1 :** *Je lance un cailloux en l'air avec une vitesse verticale v_0 et je cherche son altitude maximale. Je cherche une information à un endroit de la trajectoire : pas la peine de connaître l'évolution de la position à tout temps.*

Le PFD marche "tout le temps", mais n'est pas forcément le mieux adapté.

▶ Que permet l'approche énergétique ?

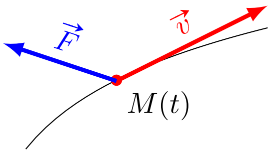
L'approche énergétique permet de palier ce défaut : elle permet d'obtenir de façon beaucoup plus simple des informations sur le mouvement *tant que ces dernières ne sont pas liées au temps.*

Méthode en DS. Pourquoi l'approche énergétique ?
On utilise l'énergie si on cherche :
- ▷ une vitesse/une position en un endroit particulier (*exemple : vitesse maximale/minimale, hauteur maximale/minimale, ...*
- ▷ la vitesse en fonction de la position de la particule
- ▷ la faisabilité d'une trajectoire (la particule atteindra-t-elle le point cible ?)
- ▷ ...

1 Notion de travail et de puissance

1.1 Puissance d'une force

▶ Définition



Considérons la trajectoire du point M. A un instant t donné, dans le référentiel $\mathcal{R}$ il est à la position $\overrightarrow{OM}(t)$ et à la vitesse $\vec{v}(M)$.
Le point M est soumis à une force $\vec{F}$.

Définition. Puissance d'une force
Dans le référentiel $\mathcal{R}$, la puissance d'une force $\vec{F}$ est :

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)(t)}\ .$$

La puissance s'exprime en Watt (W).

Analyse dimensionnelle

$$[\mathcal{P}] = [\vec{F}.\vec{v}] = [\vec{F}][\vec{v}] = MLT^{-2} \times LT^{-1} = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$$

On reconnaît au numérateur la dimension d'une énergie. En la divisant par un temps, on obtient la dimension de la dérivée temporelle d'une énergie $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t$: c'est bien une puissance.

♡ *Instant math* ♡
Le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ s'exprime

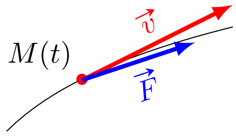
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

avec θ l'angle formé par les deux vecteurs.

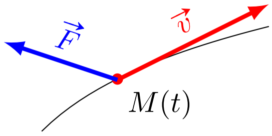
> **Application 1 :** *Soit un point matériel M de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$ soumis uniquement à la force de gravitation, avec le vecteur $\vec{e}_z$ orienté vers le haut. On prendra $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ et $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Calculer la puissance de la force si*
> - $\vec{v} = v_0 \vec{e}_z$
> - $\vec{v} = -v_0 \vec{e}_z$
> - $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$
> - $\vec{v} = v_0 \cos\alpha \vec{e}_z + v_0 \sin\alpha \vec{e}_x$ *avec* $\alpha = \pi/3$.

▶ Caractère moteur ou résistant d'une force

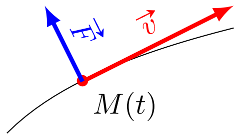
- **Si $\mathcal{P} > 0$, la force est qualifiée de motrice** ou **moteur**. Alors l'angle entre la force et la vitesse est inférieure à $\pi/2$.



- **Si $\mathcal{P} < 0$, la force est qualifiée de résistive** ou **résistante**.
  Alors l'angle entre la force et la vitesse est supérieure à $\pi/2$.



- **Si $\mathcal{P} = 0$, on dit que la force ne travaille pas**.
  Alors l'angle entre la force et la vitesse est égale à $\pi/2$.



Propriété. Force qui ne travaille pas
Si une force est perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille pas : d'un point de vu énergétique, il n'est pas utile de la considérer.
On pense notamment à la réaction normale du support.

1.2 Travail d'une force

Soit un point matériel M en mouvement à la vitesse $\vec{v}(M)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Il est soumis à une force $\vec{F}$.

▶ Déplacement élémentaire

Lien puissance-énergie L'énergie transmise pendant une durée Δt est liée à la puissance reçue :

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \times \Delta t$$

En multipliant la puissance d'une force par dt on obtient l'énergie qu'elle a transmis au point matériel pendant l'instant t :

$$\mathcal{P}\mathrm{d}t = \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t$$

Définition. Déplacement élémentaire
Le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ correspond au déplacement pendant un temps infinitésimal dt :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

♡ **Instant pas math** ♡

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x \times \mathrm{d}t + ...$$

Même si $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ n'est pas une fraction, on fait comme si ... On a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + ...$$

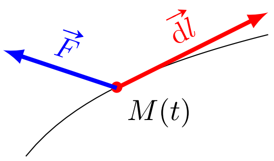
Propriété. Déplacement élémentaire et coordonnées cartésiennes
En coordonnées cartésiennes, le déplacement élémentaire s'exprime comme :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

▶ Travail élémentaire

On appelle cette nouvelle quantité obtenue le **travail élémentaire de la force.**

Définition. Travail élémentaire



On définit le travail élémentaire d'une force δW par

$$\boxed{\delta W = \mathcal{P}(t)\ \mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}} \tag{1.1}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est le déplacement infinitésimal de la masse pendant le temps $\mathrm{d}t$.
Il s'exprime en Joule.

Attention ! Ne pas confondre puissance fournie et travail élémentaire !!
- ▷ Puissance : $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$
- ▷ Travail élémentaire $\delta W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

▶ Travail total

Lorsque le point M se déplace d'un point A à un point B :
le travail total W fourni par la force $\vec{F}$ s'écrit comme la somme des petits travaux δW fourni à chaque étape $M_1, M_2, ...$ du voyage.

$$\delta W(M_1) + \delta W(M_2 = +... + \sum \delta W(M_i) = \int \delta W$$

Définition. Travail fourni par une force
On définit le travail W fourni par la force entre les points A et B par

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

Le travail s'exprime en Joule (J). Il représente l'énergie que la force a donné au point matériel pendant son trajet de A à B.

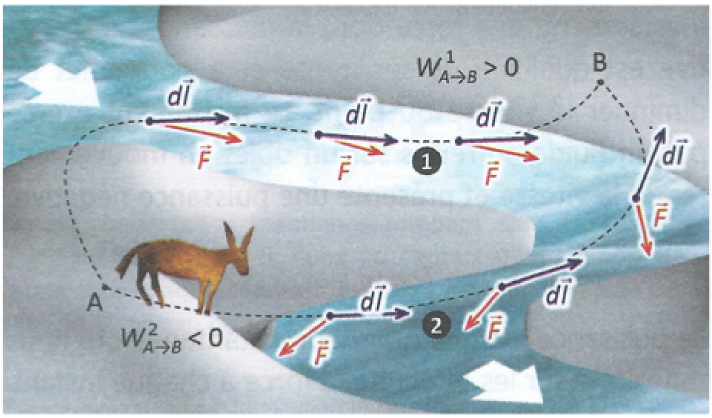
- ▷ Si $W_{A\to B}>0$ Le travail est **globalement** positif, M reçoit de l'énergie au cours du déplacement, la force est motrice.
- ▷ Si $W_{A\to B}<0$ Le travail est **globalement** négatif, M cède de l'énergie au cours du déplacement, la force est résistante.

▶ Travail et chemin

Propriété.
Le travail fourni par une force pour que le point matériel aille d'un point à un autre dépend du chemin suivi.

Il ne faut pas fournir la même quantité d'énergie selon le chemin que l'on prend pour aller d'un point à un autre.

Exemple 2 : Dans l'exemple suivant, l'âne a deux possibilités pour aller de A vers B mais il doit se confronter à la force $\vec{F}$ due au courant.



Tout le long du chemin 1, $\vec{F}\cdot\vec{d\ell} > 0$ donc $W^1_{A\to B} > 0$ alors que pour le chemin 2, on a $\vec{F}\cdot\vec{d\ell} < 0$ donc $W^2_{A\to B} < 0$. Le travail dépend donc du chemin suivi.

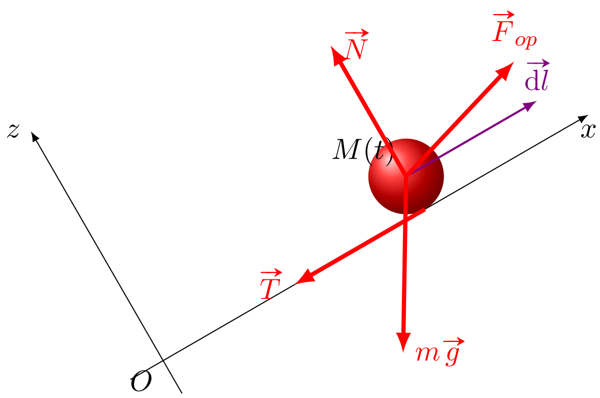
1.3 Tirer une masse sur un plan incliné

Exemple 3 : On considère une masse m qui se déplace en ligne droite le long d'un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. On la tire avec une force $\vec{F}_{op}$ d'un point A à un point B sur une longueur L.

1. *Comment orienter la force pour maximiser le déplacement.*
2. *Justifier que la force de réaction normale ne travaille pas.*
3. *Calculer le travail que fournit la force $\vec{F}_{op}$ pour tirer la masse sur une longueur L.*
4. *On appelle f le coefficient de friction solide. Montrer que le travail de la force tangentielle $\vec{T}$ est égale à :*
$$W_{A\to B} = -fmg\sin\alpha L$$
Commenter son signe.
5. *Calculer le travail du poids. Commenter son signe.*

CORRECTION

Pas de mystère, on fait la méthode initiale : schéma, vecteurs cinématiques, bilan des $\vec{F}$! !



▷ **Vecteurs cinématiques** :
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

▷ **Bilan des $\vec{F}$**
$m\vec{g} = -mg(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y)$
$N = N\vec{e}_y$
$\vec{T} = -T\vec{e}_x$; glissement $T = fN$
$\vec{F}_{op} = F_{op}\cos\beta\vec{e}_x + F_{op}\sin\beta\vec{e}_y$

1. Pour maximiser l'effet de $\vec{F}_{op}$, il faut maximiser sont travail (ou sa puissance) : $\vec{F}_{op}$ doit être colinéaire avec $\vec{dl}$ donc $\beta = 0$ et $\vec{F}_{op} = F_{op}\vec{e}_x$.
2. $\vec{N}$ est perpendiculaire au mouvement (qui est suivant $\vec{e}_x$) donc $\delta W = 0$.

3. **Attention !** *il faut être méthodique !!*
   ▷ **Travail élémentaire :** $\delta W = \vec{F}_{op} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$ avec $\vec{\mathrm{d}l} = \dot{x}\vec{e}_x \mathrm{d}t = \mathrm{d}x\vec{e}_x$.
   Donc $\delta W = F_{op}\mathrm{d}x$.
   ▷ **Variable d'intégration et coordonnées des bornes** : on intègre suivant x donc $A \to x_A$ et $B \to x_B$ avec $x_B - x_A = L$.
   ▷ **Calcul de** $W_{A\to B}\left(\vec{F}_{op}\right)$:

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{op}\right) = \int_{A\to B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} F_{op}\mathrm{d}x = F_{op}\left(x_B - x_A\right) = F_{op}L$$

4. *On refait les mêmes étapes !!*
   Il est nécessaire de trouver T donc il faut trouver N : PFD suivant $\vec{e}_y \Rightarrow 0 = N - mg\cos\alpha$ donc $N = mg\cos\alpha$.
   Avec les mêmes étapes on trouve $8A \to B\left(\vec{T}\right) = -fmg\cos\alpha L$. On remarque que le travail est négatif : la force de frottement s'oppose au mouvement.

5. *On refait les mêmes étapes !!*
   ▷ **Travail élémentaire :** $\delta W = m\vec{g} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$ avec $\vec{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$.

$$\delta W = -mg\sin\alpha \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} - mg\cos\alpha \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0}$$

   Donc $\delta W = -mg\sin\alpha\mathrm{d}x$.
   ▷ **Variable d'intégration et coordonnées des bornes** : on intègre suivant x donc $A \to x_A$ et $B \to x_B$ avec $x_B - x_A = L$.
   ▷ **Calcul de** $W_{A\to B}\left(m\vec{g}\right)$:

$$W_{A\to B}\left(m\vec{g}\right) = \int_{A\to B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} = -mg\sin\alpha\mathrm{d}x = -mg\sin\alpha\left(x_B - x_A\right) = -mg\sin\alpha L$$

1.4 Théorème de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

Nous avons défini la notion de puissance et de travail d'une force et décrit de façon qualitative leurs effets sur l'énergie cinétique. Nous allons introduire ici des théorèmes qui nous permettent de discuter leur influence de façon quantitative.

▶ Énergie cinétique

Plaçons nous dans un référentiel $\mathcal{R}$ et considérons un point matériel M de masse . Celui-ci est animé d'une vitesse $\vec{v}(M_{/\mathcal{R}})$.

Définition. Énergie cinétique
Dans le référentiel $\mathcal{R}$, l'énergie cinétique du point M animé de la vitesse $\vec{v}$ est la grandeur scalaire

$$E_{\mathrm{c}}(M) = \frac{1}{2}mv^2(t)$$

Son unité est le Joule (J).

Attention ! L'énergie cinétique dépend de la vitesse, donc du référentiel d'étude.

▶ Énoncé du théorème de la puissance cinétique

Attention ! Tous les théorèmes énergétiques existent sous deux formes :
▷ sous forme de **puissance** : il s'applique à un instant t ou en un point spécifique M
▷ sous dorme de **l'énergie** : il s'applique sur une trajectoire de $A \to B$

Théorème. Théorème de la puissance cinétique
Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}(M)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(t)} . \tag{1.2}$$

Les vitesses et les travaux des forces sont calculés dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Il s'agit d'une reformulation du PFD mais en terme énergétique.

Astuce pratique :
ce théorème sert surtout à discuter le caractère moteur ou résistif d'une force en fonction du signe de sa puissance !

- ▷ puissance positive ⇒ l'énergie cinétique augmente ⇒ la particule accélère
- ▷ puissance négative ⇒ l'énergie cinétique diminue ⇒ la particule décélère

▶ Théorème de l'énergie cinétique

Théorème. Théorème de l'énergie cinétique
Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique du point matériel M entre A et B est égale au travail des forces entre ces deux points.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_i)$$

Attention ! Ce théorème est très peu utile car il en existe une forme "améliorée".

2 Forces conservatives, énergies potentielles et énergie mécanique

Pour certaines forces, on peut encore optimiser l'approche car il n'est même plus nécessaire de calculer le travail total : adieu donc l'intégrale de chemin !

2.1 Forces conservatives

Reprenons l'exemple précédent : quelque soit la trajectoire de la masse entre A et B, on aurait trouvé le même résultat pour le travail du pois :

$$W_{A\to B} = -mg(z_B - z_A)$$

Le travail du poids entre deux points ne dépend pas du chemin parcouru : c'est **une force conservative.**

Définition. Force conservative
Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend ni de la trajectoire suivie, ni de la façon dont elle est parcourue.

Attention ! Ce n'est pas vrai pour toutes les forces : **typiquement les forces de frottements son non-conservative.**

Astuce pratique :
si une force dépend de manière explicite du temps t ou de la vitesse v, elle ne pourra pas s'écrire comme une force conservative.

2.2 Energie potentielle

Une façon simple de vérifier si une force est conservative est de lui associer une énergie potentielle E_p.

▶ Opérateur gradient

Définition. Opérateur gradient
Le gradient d'une fonction f, noté $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est un vecteur. Sa définition dépend du système de coordonnées :

- ▷ coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

- ▷ coordonnées cylindrique (r, θ, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

♡ **Instant math** ♡
La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à x : on considère toutes les autres variables comme fixe et on dérive "normalement" par rapport à x.

▶ Énergie potentielle

Propriété. Force conservative et énergie potentielle
On dit qu'une force $\vec{F}$ est conservative ou qu'elle dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction E_p telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

Cette propriété sert de définition à l'énergie potentielle E_p.

Méthode en DS. Trouver l'énergie potentielle
1. Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi
2. Exprimer le gradient de l'énergie potentiel
3. Identifier terme à terme pour trouver les dérivée de E_p
4. Intégrer et fixer le niveau zéro des potentiels

> *Exemple 4 :* **Energie potentielle de pesanteur**
> *Calculer l'énergie potentielle de pesanteur, i.e. l'énergie potentielle associée au poids $m\vec{g}$. On se place dans un système de coordonnées cartésien, avec l'axe vertical (Oz) orienté vers le haut et l'origine O situé au niveau du sol.*

Les différentes étapes décrites seront le étapes à suivre pour toutes les recherches des énergies potentielles.

1. **Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi**

   Le poids dans la repère : $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ donc :

   $$-\vec{F} = mg\vec{e}_z$$

2. **Exprimer le gradient de l'énergie potentiel dans le système de coordonnées choisi**

   En cartésien :

   $$\overrightarrow{\text{grad}} E_p(x, y, z) = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z$$

3. **On identifie terme à terme entre les deux expressions**

   ▷ sur $\vec{e}_x$: $\dfrac{\partial E_p}{\partial x} = 0$: la fonction E_p ne dépend pas de x

   ▷ sur $\vec{e}_y$: $\dfrac{\partial E_p}{\partial y} = 0$: la fonction E_p ne dépend pas de y

   ▷ sur $\vec{e}_z$:

   $$\frac{\partial E_p}{\partial z} = mg \;\Rightarrow\; E_p(z) = mgz + C$$

   avec C une constante à déterminer.

   Problème : nous n'avons pas de conditions limites ici. La constante C peut donc prendre n'importe quelle valeur.

> **Propriété. Niveau zéro d'une énergie potentielle**
> Une énergie potentielle est toujours définie à une constante près. On choisit donc un point de l'espace où on fixe la valeur de l'énergie à zéro : c'est **l'origine des potentiels**.

On décide ici arbitrairement de fixer le 0 au niveau de la surface terrestre $z = 0$.
On a donc $E_p(z = 0) = 0$ et $E_p(z = 0) = C$ donc $C = 0$.

On retiendra alors trois **ATTENTION !!** :

1. **Attention !** on pense au moins dans la définition !! $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$
2. **Attention !** l'expression de l'énergie potentielle dépend du système de coordonnées choisi !!
3. **Attention !** l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près qu'il faut fixer en choisissant une origine des potentiels

Astuce pratique :
Pour toute les énergies on vérifiera le sens d'évolution : l'énergie potentielle doit augmenter si on déplace le système dans un sens "non-naturel"

▶ Travail d'une énergie potentielle

Un point matériel M se déplace de A à B le long d'une trajectoire. On cherche à calculer le travail $W_{AB}(\vec{F})$ où $\vec{F}$ est une force conservative.

Avec les mains :
On gardera à l'esprit que le gradient est l'équivalent à trois dimensions de la dérivée : $\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p \sim \dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$.
Donc :

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = (E_p(x_A) - E_p(x_B)) = f(x_B) - f(x_A)$$

Le travail donne alors :

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \int_A^B \underbrace{-\overrightarrow{\text{grad}}E_p \cdot \vec{\mathrm{d}l}}_{\sim\text{dérivée}} = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) = E_p(A) - E_p(B)$$

Propriété. Travail et énergie potentielle
Le travail fournit par une force $\vec{F}$ dérivant d'une énergie potentielle Ep entre deux points A et B est égal à :

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$$

> ***Exemple 5*** *: Donner le travail du poids reçue par une masse m lorsqu'elle s'élève d'une hauteur h.*

On choisit un axe verticale (Oz) orienté vers le haut. Dans ce cas : $E_{p,g} = mgz$.
On appelle A le point de départ, altitude z, et B le point d'arrivée, altitude $z+h$. Le travail du poids est donnée par son énergie potentielle :

$$W_{A\to B} = E_{p,g}(A) - E_{p,g}(B) = mgz - mg(z+h) = -mgh$$

Le travail est négatif : la force est résistive. Le poids s'oppose à ce qu'une masse s'élève.

2.3 Forces conservatives à connaître

Il est important de connaître les expressions des énergies potentielles de ces trois forces particulières :
- ▷ pesanteur
- ▷ gravitationnelle
- ▷ force de rappel d'un ressort

et de savoir les redémontrer !!

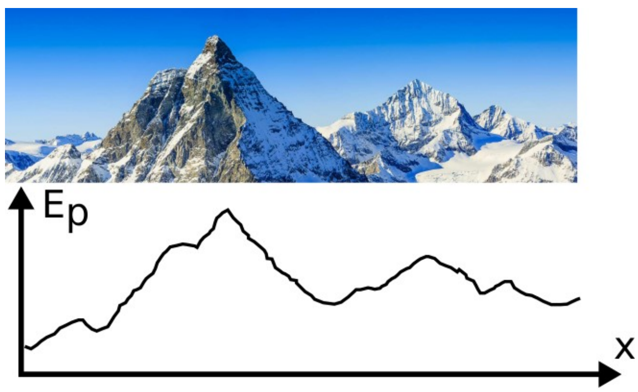
► L'énergie potentielle de pesanteur

Propriété. Energie potentielle de pesanteur $E_{p,p}$
Dans un système de coordonnées cartésien, avec un axe vertical (Oz) orienté vers le haut :

$$E_{p,p} = mgz + C$$

Attention ! Ce n'est vrai qu'avec un axe ascendant ! Si on prend un axe verticale orienté vers le bas on a $E_{p,p} = -mgz$.

Astuce pratique :
Lorsqu'un point matériel se déplace sur une surface, l'énergie potentielle de pesanteur ressemble, à un facteur mg près, à la surface sur le quel se déplace le point.



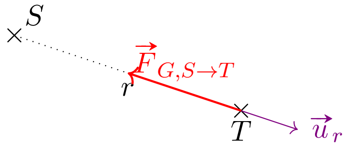
Si on marche sur la ligne de crête, E_p ressemble à la topologie de la montage.

▶ L'énergie potentielle gravitationnelle

On considère le Soleil. On appelle P son centre de gravité et M_S sa masse. La terre, de masse M_T et de centre T est soumis à la force gravitationnelle du Soleil.
On souhaite trouver l'énergie potentielle gravitationnelle $E_{p,\mathcal{G}}$.

1. **Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi**

   On choisit un repère adapté à la situation : la Terre **tourne** autour du Soleil ⇒ on choisit un système de coordonnées cylindrique, avec comme centre le Soleil.



   Dans ce repère on a :
   - ▷ distance Terre-Soleil : $d = r$
   - ▷ vecteur unitaire Soleil→Terre : $\vec{u}_{S\to T} = \vec{u}_r$

$$\vec{F}_{S\to T} = -\mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r^2}\vec{u_r}$$

   Attention ! On n'oublie pas le moins : $-\vec{F}_{S\to T} = \mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r^2}\vec{u_r}$

2. **Exprimer le gradient de l'énergie potentiel dans le système de coordonnées choisi**
   En cylindrique :

$$\overrightarrow{\text{grad}}E_{p,\mathcal{G}}(r,\theta,z) = \frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial z}\vec{e}_z$$

3. **On identifie terme à terme entre les deux expressions**

   - ▷ sur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$: $E_{p,\mathcal{G}}$ ne dépend ni de θ, ni de z
   - ▷ sur $\vec{e}_r$:

$$\frac{\partial E_{p,\mathcal{G}}}{\partial r} = \mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r^2}$$

   ♡ *Instant math* ♡

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{-1}{x^2}$$

   On a donc :

$$E_{p,\mathcal{G}} = -\mathcal{G}\frac{M_S m_T}{r} + C$$

   On décide ici arbitrairement de fixer le 0 au niveau de l'infini $r \to \infty$. On a donc $C = 0$.

Propriété. Energie potentielle d'interaction gravitationnelle
L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle entre deux masse m_1 et m_2 séparée d'une distance d est :

$$E_{p,\mathcal{G}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{d}$$

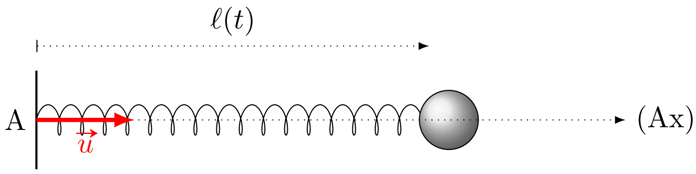
avec comme origine des potentiel l'infini.

Astuce pratique :
Déplacement "non-naturel" : les deux masses s'éloignent ⇒ d augmente et ainsi $E_{p,\mathcal{G}}$ également.
Attention ! L'énergie potentielle est négative !

> ***Application 2*** *: En reprenant l'étude réalisée sue la force d'interaction gravitationnelle, donner l'expression de l'énergie potentiel d'interaction électrostatique.*
> *On rappelle que la force d'interaction électrostatique entre deux particules chargées est :*
>
> $$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

▶ L'énergie potentielle élastique

Considérons une masse M attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est fixe. On note $\ell(t)$ la longueur du ressort.
Exprimer l'énergie potentielle élastique $E_{p,k}$ de la force de rappel du ressort.



1. **Exprimer l'opposé de la force dans le repère choisi** On introduit un repère de coordonnées cartésien, d'origine A confondu avec le point fixe du ressort. L'axe (Ax) est confondu avec l'axe du mouvement du ressort.

   La force $\vec{F}$ qui s'exerce sur la masse égale à
   $$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}$$
   avec ici $l(t) = x(t)$ et $\vec{u} = \vec{e}_x$.
   L'opposé de la force est donc :
   $$-\vec{F} = k(x(t) - \ell_0)\vec{e}_x$$

2. **Exprimer le gradient de l'énergie potentiel dans le système de coordonnées choisi**
   En cartésien :
   $$\overrightarrow{\mathrm{grad}} E_{p,k}(x,y,z) = \frac{\partial E_{p,k}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_{p,k}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_{p,k}}{\partial z}\vec{e}_z$$

3. **On identifie terme à terme entre les deux expressions**

   ▷ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$: $E_{p,k}$ ne dépend ni de y ni de z

   ▷ sur $\vec{e}_x$:
   $$\frac{\partial E_{p,k}}{\partial x} = k(x - l_0) \;\Rightarrow\; E_{p,k} = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 - +C$$
   On choisit comme origine des potentiels la position à l'équilibre $x = l_0$. On a alors $C = 0$.
   On reconnaît que $x = l$, la longueur du ressort ici.

Propriété. Energie potentiel élastique
L'énergie potentiel élastique d'une force de rappel d'un ressort d'une longueur l est :
$$E_{p,k} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$$
avec k et l_0 la raideur et la longueur à vide du ressort.

3 Théorème de l'énergie mécanique et cas pratiques

3.1 Théorème de l'énergie mécanique

▶ Energie mécanique

Définition. Énergie mécanique
On définit l'énergie mécanique E_m du point matériel M dans le référentiel $\mathcal{R}$ système comme la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives auquel il est soumis :

$$E_m = E_c + \sum E_p$$

Attention ! L'énergie mécanique est définie à une constante près à cause de la définition de l'énergie potentielle. De plus, elle dépend du référentiel à cause de l'énergie cinétique.

▶ Enoncé

Théorème. Theorème de l'énergie mécanique
Dans un référentiel galiléen la variation de l'énergie mécanique d'une particule entre deux point A et B est égale au travail des forces non conservatives.

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{nc})$$

Le plus souvent les forces non-conservatives sont des forces de frottement qui ont un travail négatif et donc ont tendance à faire diminuer l'énergie mécanique.

Propriété. Variation de l'énergie mécanique

- L'énergie mécanique d'un point M soumis uniquement à des forces conservatives ($\sim$ pas de frottement) se conservent.
- L'énergie mécanique d'un point matériel M soumis à des forces de frottement diminue.

> ***Remarque :*** *La dénomination « conservative » vient de cette propriété. Une force conservative conserve l'énergie, contrairement à une force non conservative.*

On a le pendant temporel : la puissance mécanique (*peu utile*).

Propriété. Theorème de la puissance mécanique
La variation temporelle de l'énergie mécanique est du à la puissance des forces non conservatives :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$$

Astuce pratique : pour les forces de frottements, $\mathcal{P} < 0$ et donc l'énergie mécanique diminue.

Attention ! Le théorème de l'énergie mécanique n'a aucun intérêt si on ne sait pas L'APPLIQUER ! ! Les exemples suivants sont donc essentiel à comprendre.

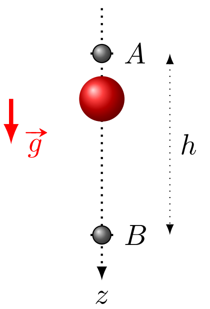
3.2 Exemple pratique

▶ **Energie potentiel pesanteur**

> *Exemple 6 :* ***Vitesse de chute libre***
> *On considère une masse m en chute libre. Elle la lâche initialement au point A sans vitesse et on néglige les frottements de l'air. On appelle B le point situé à une distance h de A vers la Terre.*
> 1. *Introduire un référentiel et un système de coordonnées adaptées (SCHEMA !!!)*
> 2. *Calculer le travail du poids entre le point entre A et B.*
> 3. *En déduire sa vitesse après avoir chuter de 100m.*

CORRECTION

1. *Cette première question n'existera évidemment plus : on doit le faire tout seul !!*



▷ **Vecteurs cinématiques** :
$\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ et $v = \dot{z}$ car z augmente.

▷ **Bilan des forces ET des énergie potentielles** :
poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_z$ et $E_{p,g} = -mgz$ car (Oz) est orienté vers le bas.

2. Le travail du poids : $W_{A\to B}(m\vec{g}) = E_{p,g}(A) - E_{p,g}(B) = -mg(z_A - z_B) = mgh$.
Attention ! *Souvent il ne sera plus utile de calculer W : on le mettra tout de suite dans l'énergie mécanique !*

3. *Typiquement une question pour le TEM.* ***Attention !*** *à bien s'entraîner sur le* ***méthode*** *de mis en place du théorème !!*
   ▷ **Choix du trajet :**
   - ▷ point départ A : position initiale z_A et vitesse nulle
   - ▷ point d'arrivée B : à 100m sous le point de départ $z_B = z_A + 100\text{m}$

   ▷ **Bilan des énergie** :
   - ▷ point A : $E_c = 0$ (pas de vitesse initiale) et $E_p = E_{p,g}(A) = -mgz_A$
   - ▷ point B : $E_c = \frac{1}{2}mv_B^2$ (*c'est la vitesse qu'on cherche*) et $E_p = E_{p,g}(B) = -mgz_B$.

   ▷ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

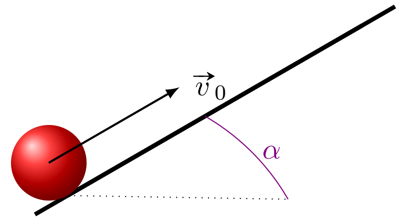
   ▷ **Application du TEM**

$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_B^2 - mgz_B\right) - (0 - mgz_A) = 0$$

On a alors $v_B^2 = mg(z_B - z_A) = 2gh$ donc $v_B = \sqrt{2gh}$. On remarque notamment que la vitesse à l'arrivée est la même quelle que soit la masse de l'objet.

Exemple 7 :

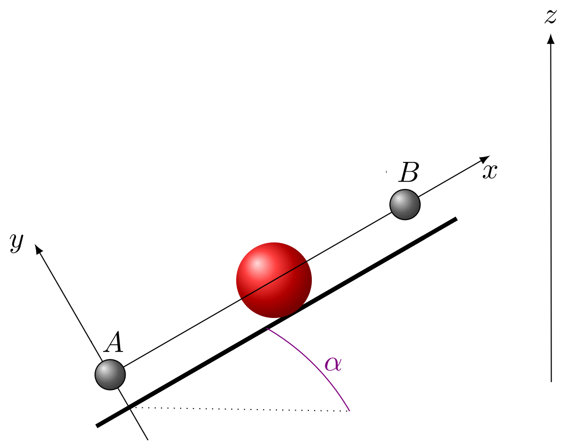
On considère une masse m qui peut glisser sans frottements le long d'un plan incliné qui forme un angle α avec l'horizontale.
La masse se trouve initialement au bas de la pente et on lui confère une vitesse intiale v_0, orienté vers la pente.



1. *Introduire un système de coordonnées adapté et définir les énergies cinétiques et potentielles.*
2. *Le système est-il conservatif ?*
3. *A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, exprimer la distance maximale que la masse va parcourir avant de faire demi-tour.*
4. *En déduire la hauteur maximal atteinte.*
5. *(*) On prend en compte désormais les frottements solides avec le plan incliné.*
   - ▷ *On considère la masse au point de coordonnées x. Exprimer le travail des forces de frottements en ce point.*
   - ▷ *En déduire la nouvelle distance parcourue par la masse.*

CORRECTION

1.



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $v = \dot{x}$ car x augmente.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

▷ **Bilan des forces et énergies potentielles**
poids $m\vec{g}$ et $E_{p,g} = +mgz$ avec un axe z orienté vers le haut
Attention ! *l'axe z ne fait pas partie de la base : il faut exprimer z en fonction de x*

$$\sin\alpha = z/x \;\Rightarrow\; z = x\sin\alpha$$

$$E_{p,g} = +mg\sin\alpha\, x$$

2. Seul le poids travaille et c'est une force conservative : le système est donc conservatif.
3. ▷ **Choix du trajet :**
   - ▷ point départ A : position initiale $x_A = 0$ et vitesse v_0
   - ▷ point d'arrivée B : point où la balle fait demi tour $v_B = 0$

   ▷ **Bilan des énergie** :
   - ▷ point A : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et $E_p = E_{p,g}(A) = 0$
   - ▷ point B : $E_c = 0$ et $E_{p,g}(B) = mg\sin\alpha\, x_B$.

   ▷ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

   ▷ **Application du TEM**

$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \;\Rightarrow\; (0 + mg\sin\alpha\, x_B) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - 0\right) = 0$$

On a alors $x_{max} = x_B = \dfrac{v_0^2}{2g\sin\alpha}$

4. On passe $x \to z$: $z_{max} = x_{max}\sin\alpha = \dfrac{v_0^2}{2g}$: quel que soit l'angle α la balle monte de la même hauteur. C'est d'ailleurs celle qu'on aurait trouvé en lançant la balle verticalement sans plan incliné.

5.(a) *Revoir l'exemple 3 pour le calcul du travail d'une force de frottement sur un plan incliné.*

$$W_{A\to B}(\vec{T}) = -fmg\cos\alpha\, x_B$$

(b) On ré-applique le **TEM** mais avec $W_{A\to B}(\vec{F}_{NC}) \neq 0 = -fmg\cos\alpha\, x_B$.

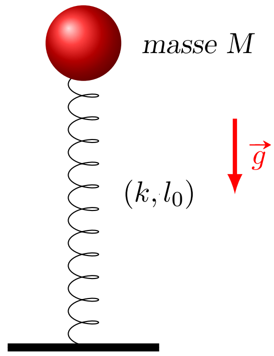
$$(0 + mg\sin\alpha\, x_B) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - 0\right) = -fmg\cos\alpha\, x_B$$

On résout pour avoir $x_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$. On remarque que la nouvelle distance est plus faible : les forces de frottement s'oppose au mouvement.

▶ **Energie potentiel élastique**

Exemple 8 :

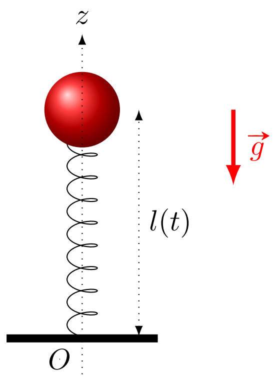
On s'intéresse à un système d'amortissement de voiture. On modélise le système de façon grossière : on considère un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (l'amortisseur) sur lequel est posée une masse m (la voiture). Initialement, le ressort est comprimé (à cause d'une aspérité de la route) : il possède une longueur nulle $l = 0$. On lâche le système, la masse ayant initialement une vitesse nulle.



1. *Introduire un système de coordonnées adapté au problème.*
2. *Lister les forces conservatives du problème et exprimer leur énergies potentielles à l'aide des coordonnées.*
3. *Le système est-il conservatif ? Justifier.*
4. *En appliquant le théorème de l'énergie mécanique :*
   - ▷ *que vaut la vitesse de la masse quand l'altitude est maximale. En déduire l'altitude maximale h_{max}.*
   - ▷ *(*) trouver la position où la vitesse est maximale ainsi que sa valeur v_{max}*
5. *On prend en compte les frottements de l'air via une force $\vec{F}_\alpha = -\alpha\vec{v}$.*
   - ▷ *Est-ce une force conservative ?*
   - ▷ *Exprimer la puissance des forces de frottement fluide. Discuter son signe.*
   - ▷ *En déduire l'impact sur le mouvement des frottements.*

CORRECTION

1.



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ avec $v(t) = |\dot{z}|$ (**Attention !** $\dot{z}$ change de signe régulièrement !)

2. Forces conservatives (*pas besoin de les exprimer dans les vecteurs de la base, on ne s'intéresse ici qu'aux énergie potentielles*
   - ▷ poids $m\vec{g}$ et énergie potentielle $E_{p,g} = +mgz$ (*axe* (Oz) *ascendant*)
   - ▷ force de rappel du ressort $\vec{F}_k$ et énergie potentielle $E_k = \frac{1}{2}(l - l_0)^2$ avec $l = z$.
3. Il n'y a pas de frottement : le système est conservatif, E_m est constante.
4. ▷ **Choix du trajet :**
   - ▷ point départ A : position initiale $l_A = 0$ et sans vitesse $v_A = 0$
   - ▷ point d'arrivée B :position d'élongation maximale $l_B = h_{max}$ et $v_B = 0$ (la balle fait demi-tour)

   ▷ **Bilan des énergie** :
   - ▷ point A : $E_c = 0$; $E_{p,g}(A) = 0$ et $E_{p,k} = \frac{1}{2}kl_0^2$

- ▷ point B : $E_c = 0$; $E_{p,g}(B) = mgh_{max}$; $E_{p,k} = \frac{1}{2}k(h_{max} - l_0)^2$

▷ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

▷ **Application du TEM**

$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \Rightarrow mgh_{max} + \frac{1}{2}k(h_{max} - l_0)^2 - \frac{1}{2}kl_0^2 = 0$$

On résout $h_{max}^2 + 2\left(\frac{mg}{k} - l_0\right)h_{max} = 0$ donc

$$h_{max} = 2\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

Cette solution a un sens si $kl_0 > mg$: initialement la force du ressort doit être supérieur au poids pour que le mouvement commence.

4. (*) Attention ! *Question plus difficile mais importante à comprendre :* on applique de nouveau le **TEM dans un cas général** :

▷ **Choix du trajet :**
- ▷ point départ A : position initiale $l_A = 0$ et sans vitesse $v_A = 0$
- ▷ point d'arrivée B : position de vitesse quelconque v et étirement h quelconque

▷ **Bilan des énergie** :
- ▷ point A : $E_c = 0$; $E_{p,g}(A) = 0$ et $E_{p,k} = \frac{1}{2}kl_0^2$
- ▷ point B : $E_c = \frac{1}{2}v^2$; $E_{p,g}(B) = mgh$; $E_{p,k} = \frac{1}{2}k(h - l_0)^2$

▷ **Force Non-Conservative et travail** : pas de forces NC donc travail nul

▷ **Application du TEM**

$$(E_c(B) + E_{p,g}(B)) - (E_c(A) + E_{p,g}(A)) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}k(h - l_0)^2 - \frac{1}{2}kl_0^2 = 0$$

On a alors :

$$v^2 = 2\left(\frac{kl_0}{m} - g\right)h - \frac{k}{m}h^2$$

On a obtenu une équation de la vitesse en fonction de la position de la masse, $v[h]$. On peut alors résoudre tout un tas de question.

> ***Remarque :*** *On retrouve facilement que l'étirement maximale h_{max} : il s'obtient pour $v^2 = 0$ et donc $h_{max} = 2(l_0 - mg/k)$.*

On a une expression de $u = v^2$ en fonction de h : $u[h]$, on cherche son maximum.

$$u'[h] = 2\left(\frac{kl_0}{m} - g\right) - 2\frac{k}{m}\tilde{h} \Rightarrow \tilde{h} = \frac{m}{k}\left(\frac{kl_0}{m} - g\right) = l_0 - \frac{mg}{k}$$

On a alors $u_{max} = u[\tilde{h}] = \left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)\left(\frac{kl_0}{m} - g\right) = \frac{k}{m}\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)^2$ et donc :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

De nouveau cette vitesse n'est possible que si $kl_0 > mg$.

4 Etude d'un mouvement à l'aide de l'énergie potentiel

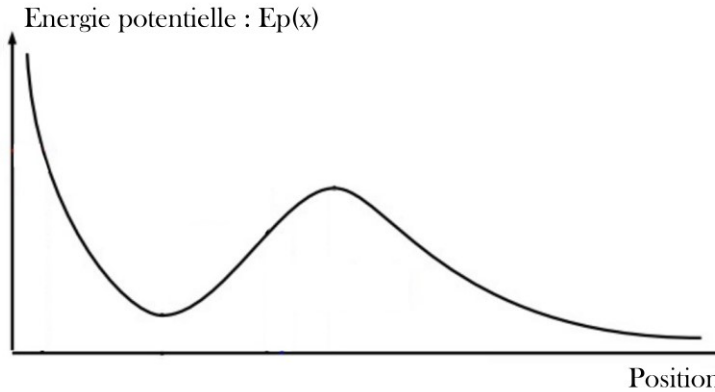
4.1 Notion de graphe énergétique

En plus de permettre de résoudre facilement des problèmes, l'aspect énergétique permet de décrire le mouvement de particules pour lesquelles on ne sait pas résoudre le PFD : pour cela on utilise des **graphe énergétique**.

Considérons un système à un degré de liberté, typiquement :

- ▷ coordonnées cartésiennes : mouvement sur un seul axe (Ox)
- ▷ coordonnées cylindrique : mouvement circulaire, seul compte l'angle θ.

On suppose le système conservatif : il n'est soumis qu'à des forces conservatives, d'énergie potentielle E_p.
Un graphe énergétique est la tracé de l'énergie potentielle E_p en fonction du degré de liberté (noté x ici mais k'angle θ est également possible).



Attention ! On trace par rapport à la position, pas le temps!!!

Astuce pratique :
d'un point de vue analyse, toutes les énergies potentielles se valent. Il est plus simple de considérer qu'on étudie l'énergie potentiel de pesanteur : tout se passe comme si on étudiait l'évolution d'une bille dans un circuit qui a la forme du graphe $E_p(x)$.

4.2 Position d'équilibre

Définition. Etat d'équilibre
Un état d'équilibre est un état pour lequel le système, initialement immobile, reste immobile. On distingue :

- ▷ les positions d'**équilibres stable** : si on écarte le point matériel de la position d'équilibre, il se repositionne naturellement dessus
- ▷ les positions d'**équilibres instable** : si on écarte le point matériel de la position d'équilibre, il s'en éloigne naturellement

Propriété. Position d'équilibre
Les états d'équilibresx_{eq} sont situés au niveau des maximas de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{eq}) = 0$$

Les positions d'équilibre stable correspondent à des minima :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq}) > 0$$

Les positions d'équilibre instable correspondent à des maxima :

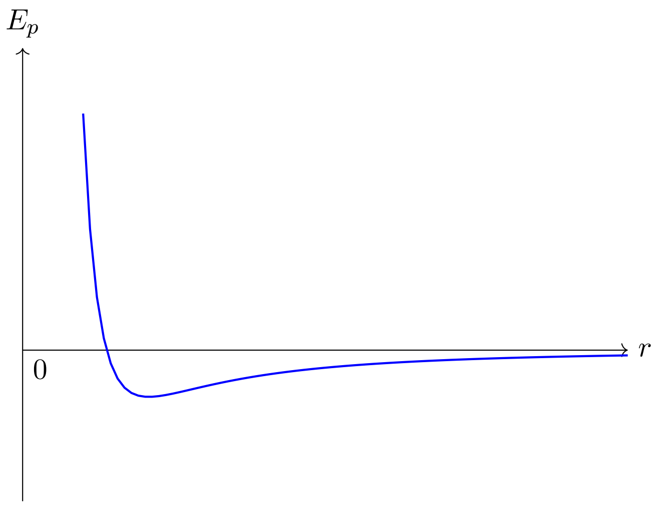
$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq}) < 0$$

Attention ! On dérive par rapport à la position!!!

> ***Exemple 9 :*** ***Potentiel de Yukawa*** *On donne le potentiel qui décrit les interactions électrostatique entre particules subatomiques :*
>
> $$E_p(r) = E_0 \left(\frac{a}{r^3} - \frac{b}{r^2}\right)$$
>
> *avec E_0 une énergie potentielle de référence.*
> 1. *Donner les dimensions de a et b.*
> 2. *A l'aide de votre calculette, représenter schématiquement le graphe énergétique de E_p (on pourra prendre $E_0 = 1$, $a = 10$ et $b = 9$ en unité SI).*
> 3. *Identifier sur le graphe les positions d'équilibres stables et instables.*
> 4. *Donner l'expression de la position d'équilibre stable en fonction de a et b.*

CORRECTION

1. Par analyse dimensionnelle, la parenthèse doit être de dimension 1 donc $[a] = L^3$ et $[b] = L^2$.
2. On trace le graphe pour avoir sa forme générale en tête :



3. On remarque qu'il y a un minimum, donc un position d'équilibre stable.
4. On cherche le minimum :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = 0 \Rightarrow -3\frac{a}{r_{eq}^4} + 2\frac{b}{r_{eq}^3} = 0 \Rightarrow r_{min} = \frac{3a}{2b}$$

On vérifie que $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}^2r}(r = r_{eq}) > 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}^2r}(r = r_{eq}) = E_0\left(12\frac{a}{r_{eq}^5} - 6\frac{b}{r_{eq}^4}\right) = -\frac{E_0}{r_{eq}^5}(12a - 6br_{eq}) = -\frac{E_0}{r_{eq}^5}\underbrace{\left(12a - 6b\frac{3a}{2b}\right)}_{=3a}$$

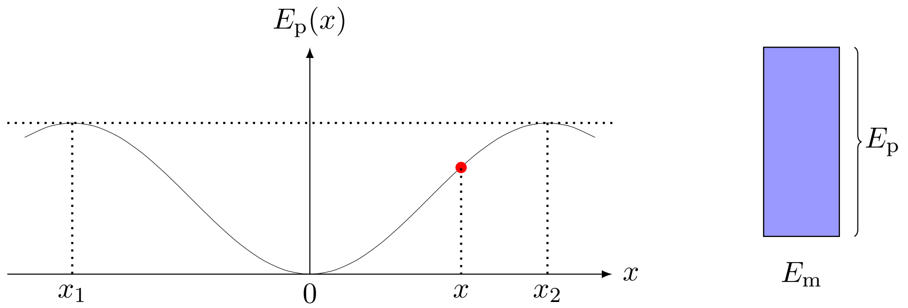
4.3 Trajectoire d'une particule : état lié ou de diffusion

Considérons une particule au voisinage d'une position d'équilibre stable. Elle possède initialement de l'énergie sous deux formes :
- ▷ sous forme d'énergie cinétique E_c grâce à sa vitesse
- ▷ sous forme d'énergie potentielle E_p

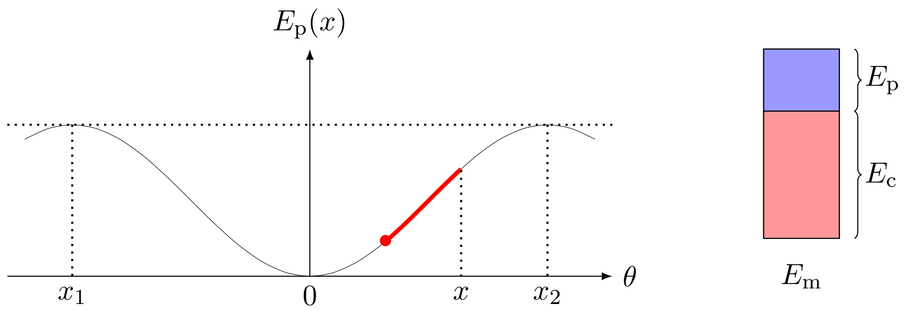
Supposons qu'elle se déplace suivant les x décroissant. On se demande quel va être son mouvement.

▶ Etat lié

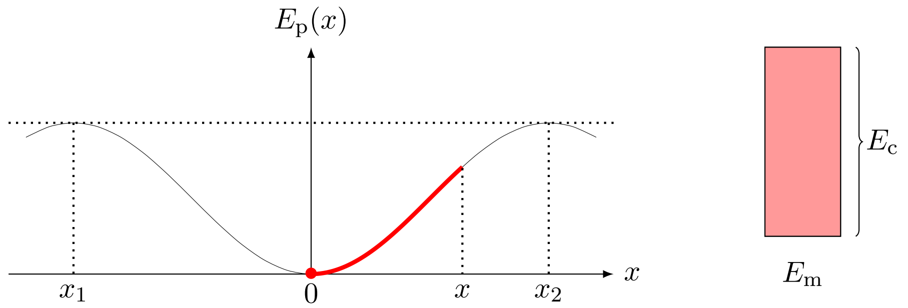
On suppose dans ce cas que la particule possède une vitesse nulle initialement.



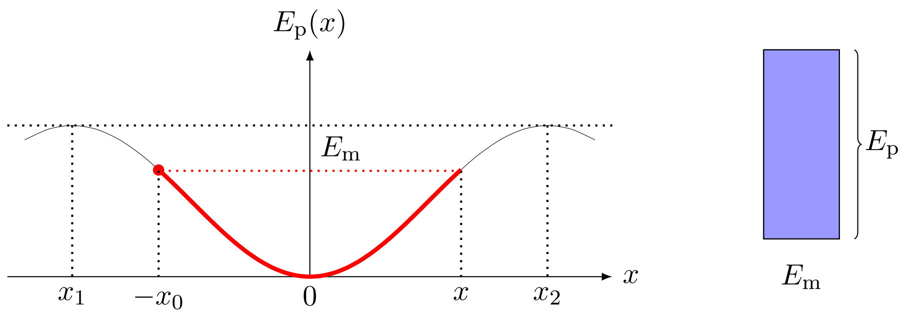
Etat initial $x = x_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, la vitesse est nulle.



En se déplaçant vers le minimum, la masse perd de l'énergie potentielle. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.



Au minimum, la masse a perdu toute son énergie potentielle. Son énergie cinétique, et donc sa vitesse, est maximale.

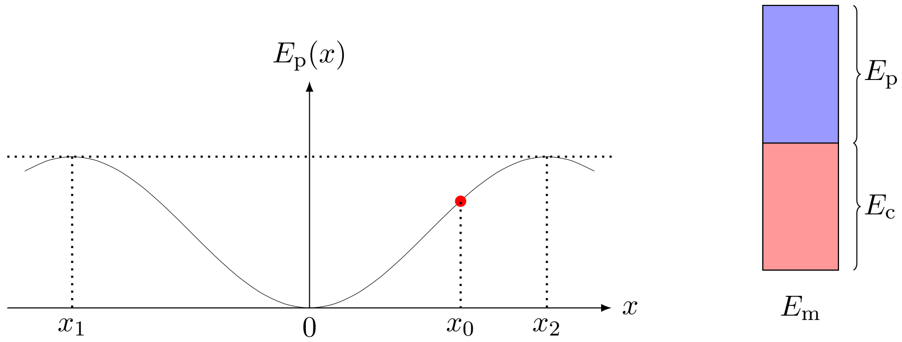


La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximal $-x_0$ par symétrie. Ensuite, la masse repart dans l'autre direction et oscille.

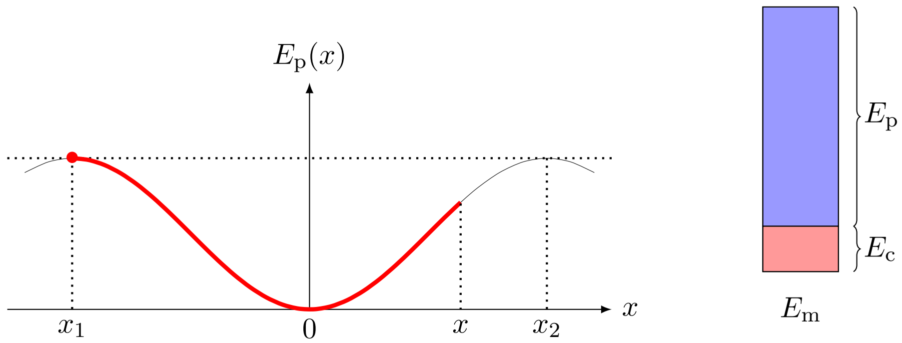
Définition. Etat lié
Lorsque l'énergie cinétique initiale de la particule ne lui permet pas de franchir les maxima de l'énergie potentiel, son mouvement est borné.
La particule n'a pas assez d'énergie pour sortir du puits de potentiel, on parle d'état lié.

▶ Etat libre (ou de diffusion)

On suppose que la particule part de la même position mais désormais elle possède une vitesse élevée, qu'on retrouve sous la forme d'énergie cinétique.



Initialement la particule est en x_0 et on suppose sa vitesse négative : elle se dirige vers les x décroissant. Elle va repasser par les mêmes étapes que précédemment.



La masse arrive sur le maximum de potentiel mais il lui reste de l'énergie cinétique ($\sim$ de la vitesse), elle va donc passer par dessus le maximum de potentiel et continue son mouvement.

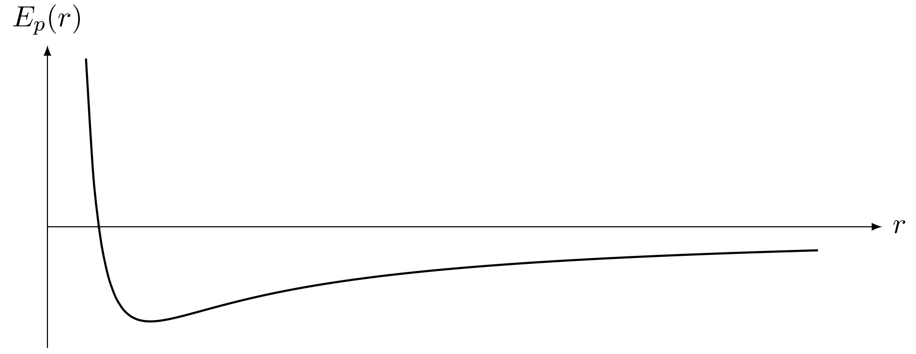
Définition. Etat de diffusion
Lorsque l'énergie cinétique initiale de la particule lui permet de franchir les maxima de l'énergie potentiel, son mouvement est sans fin.
La particule a assez d'énergie pour sortir du puits de potentiel, on parle d'état libre ou de diffusion.

▶ Etat libre ou état de diffusion

Méthode en DS. Energie et nature d'une trajectoire
Sur un graphe d'énergie potentielle, on représente l'énergie mécanique initiale de la particule $E_m(0)$.

- ▷ si l'énergie mécanique de la particule est supérieure à l'énergie potentielle maximale : le mouvement de la particule ne sera pas borné.
  Si $E_m(0) > E_{p,max} \Rightarrow$ état de diffusion
- ▷ si l'énergie mécanique de la particule est inférieure à l'énergie potentielle maximale : le mouvement de la particule sera confiné.
  Si $E_m(0) < E_{p,max} \Rightarrow$ état de lié

Exemple 10 : On donne le graphe de l'énergie potentielle d'une particule. A quelle condition la particule aura un état de diffusion ?



4.4 Dynamique autour d'une position d'équilibre (pour aller plsu loin)

▶ Exemple de l'oscillateur harmonique

Prenons le cas d'un oscillateur harmonique : par exemple, une masse au bout d'un ressort qui glisse sans frottement le long d'un axe. On mesure la position de la masse à l'aide de la coordonnée x, avec comme origine le point d'attache du ressort.
Calculons l'énergie mécanique :

▷ Energie potentiel d'un ressort : $E_{p,k} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$. Ici, $l(t) = x(t)$ et on trouve facilement que $x = l_0$ est la position d'équilibre stable.

▷ Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Ici $v(t) = \dot{x}(t)$.

L'énergie mécanique est donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

Propriété. Equation du mouvement et énergie mécanique
On obtient l'équation du mouvement d'une particule solide en dérivant par rapport au temps l'énergie mécanique.

Attention !

▷ on dérive par rapport au temps l'énergie mécanique ⇒ équation du mouvement

▷ on dérive par rapport à la position l'énergie potentiel ⇒ position d'équilibre

Si on dérive l'énergie mécanique par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ car le système est conservatif, il n'y a pas de force de frottement}$$

♡ *Instant math* ♡ :

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{\dot{x}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}f(\dot{x})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}}_{\ddot{x}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}}$$

Notamment :

▷ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(x - l_0)^2\right] = \dot{x} \times 2(x - l_0)$

▷ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{x}^2\right] = \ddot{x} \times 2\dot{x}$

$$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}(x - l_0) = 0 \ \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

On retrouve bien l'équation classique du système masse-ressort, c'est-à-dire de l'oscillateur harmonique.

Propriété. Comportement d'un OH
Tout système dont l'énergie potentiel peut s'écrire comme $E_p(x) \simeq C + \frac{K}{2}(x - x_{eq})^2$ possède le comportement d'un oscillateur harmonique.

▶ Mouvement près d'une position d'équilibre stable

Considérons un graphe énergétique et zoomons aux alentours d'une position d'équilibre stable. Suffisemment proche de x_{eq}, la courbe ressemble à une parabole.

heartsuit Instant math heartsuit : une parabole est une courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Propriété. Développement de Taylor
Au voisinage d'un nombre x_1, une fonction f peut être approximer par :

$$f(x) \simeq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + f''(x_1)\frac{(x - x_1)^2}{2}$$

Appliquons le développement de Taylor à proximité de la position d'équilibre x_{eq} :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{eq}) + \frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq})\frac{(x - x_{eq})^2}{2}$$

Comme x_{eq} est une position d'équilibre stable :

- ▷ $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}(x_{eq}) = 0$
- ▷ $\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{eq}) > 0$. On le notera K.

On a donc :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + \frac{K}{2}(x - x_{eq})^2$$

On retrouve le comportement d'un OH.

Propriété. Mouvement autour d'une position d'équilibre stable
Autour d'une position d'équilibre stable, tous les systèmes présentes des oscillations de faibles amplitudes régies par l'équation d'un oscillateur harmonique.

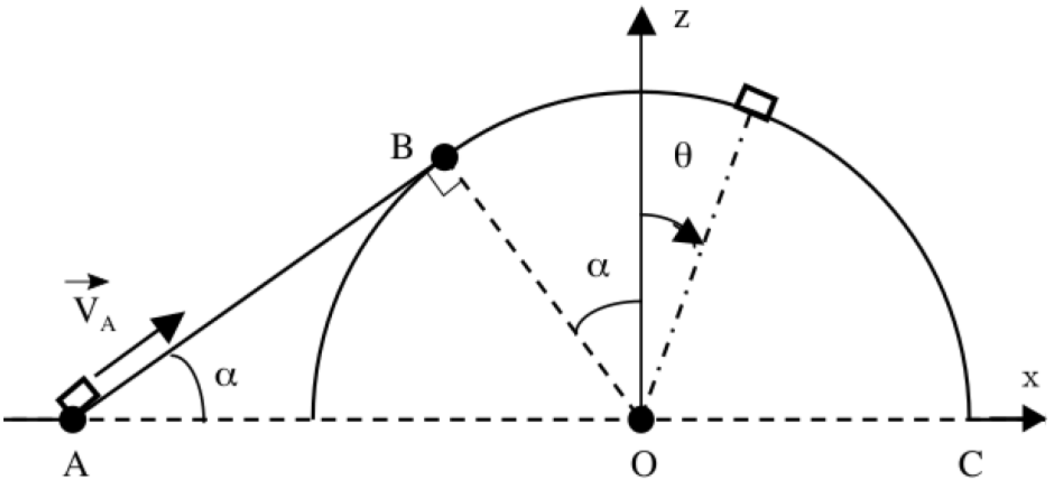
Décollage d'un skieur

Un skieur, masse 80kg, arrive sur une bosse modélisée en deux partie :

▷ rampe rectiligne AB inclinée d'un angle de 30° par rapport à l'horizontale

▷ une portion circulaire BC de rayon $R = 2\text{m}$ et d'angle $\pi/2 + \alpha$.

La bosse est conçue de telle sorte que AOB soit rectangle en B.



À l'instant $t = 0$, le glaçon est lancé depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$, puis il glisse sans frottement sur le tremplin. On admet que le mouvement a lieu dans le plan Oxz et on définit la base cartésienne associée $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$. On désigne par $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$ l'intensité du champ de pesanteur

1. Par un raisonnement énergétique, montrer que le skieur atteint le point B si sa vitesse en A est supérieur à une vitesse limite v_l :
$$v_l = \sqrt{2Rg\cos\alpha}$$
2. Donner alors le lien entre la vitesse v_B du skieur au point B et sa vitesse v_A initiale.

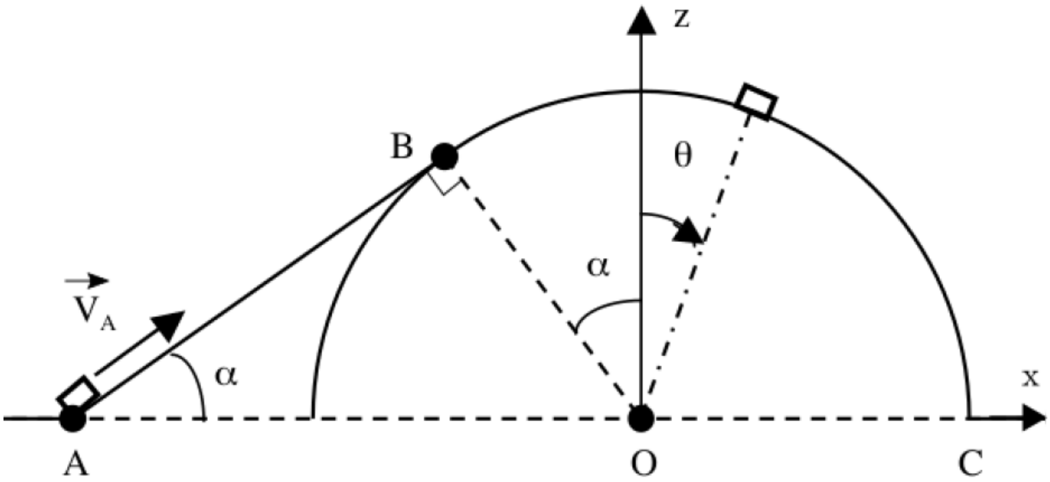
   On s'intéresse désormais au mouvement entre B et C et on suppose que $v_A > v_l$. On étudie le mouvement du skieur à l'aide d'une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de centre O.
3. Faire un schéma des forces appliquées au skieur, puis projeter le principe fondamentale de la dynamique sur les vecteurs de la base polaire.
   En déduire une expression de N en fonction de m, R, θ, $\dot{\theta}$ et g.
4. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur du skieur en un point M quelconque en fonction de m, R, θ, $\dot{\theta}$ et g.
5. Montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du skieur est :
$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)}$$
6. A quel condition sur v_B, puis sur v_A y a-t-il décollage au point niveau du point B ?
7. On suppose qu'il n'y a pas décollage entre B et le sommet de la bosse. Déterminer l'angle θ_d pour lequel le skieur décolle de la bosse.

μDm

Décollage d'un skieur

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

Un skieur, masse 80kg, arrive sur une bosse modélisée en deux partie :
▷ rampe rectiligne AB inclinée d'un angle de 30° par rapport à l'horizontale
▷ une portion circulaire BC de rayon $R = 2$m et d'angle $\pi/2 + \alpha$.
La bosse est conçue de telle sorte que AOB soit rectangle en B.



À l'instant $t = 0$, le glaçon est lancé depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$, puis il glisse sans frottement sur le tremplin. On admet que le mouvement a lieu dans le plan Oxz et on définit la base cartésienne associée $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$. On désigne par $g = 9,8$m.s^{-2} l'intensité du champ de pesanteur

1. Exprimer la vitesse v_B du skieur au point B en fonction de sa vitesse v_A initiale ainsi que du tayon R de la bosse, de α et de l'accélération de la pesanteur g..

2. En déduire que le skieur atteint le point B si sa vitesse en A est supérieur à une vitesse limite v_l :
$$v_l = \sqrt{2Rg\cos\alpha}$$
On s'intéresse désormais au mouvement entre B et C et on suppose que $v_A > v_l$. On étudie le mouvement du skieur à l'aide d'une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de centre O.

3. Faire un schéma des forces appliquées au skieur, puis projeter le principe fondamentale de la dynamique sur les vecteurs de la base polaire.
En déduire une expression de N en fonction de m, R, θ, $\dot{\theta}$ et g.

4. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de pesanteur du skieur en un point M quelconque en fonction de m, R, θ, $\dot{\theta}$ et g.

5. A l'aide du théorème de l'énergie mécanique entre B et M, montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du skieur est :
$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)}$$

6. A quel condition sur v_B, puis sur v_A y a-t-il décollage au point niveau du point B ?

7. On suppose qu'il n'y a pas décollage entre B et le sommet de la bosse. Déterminer l'angle θ_d pour lequel le skieur décolle de la bosse.

μDm Décollage d'un skieur

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB -

1. *On veut la vitesse en un point* $\Rightarrow$ *on applique le* ***TEM***

   ▷ **Point de départ : A**
$$Ec = \frac{1}{2}mv_A^2 \ ; \ E_p = 0$$
   ▷ **Point d'arrivée : B**
$$Ec = \frac{1}{2}mv_B^2 \ ; \ E_p = mgz_B = mgR\cos\alpha$$
   TEM : $E_m(B) - E_m(A) = 0$ car par de force non conservative. On trouve alors :
$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos\alpha = \frac{1}{2}mv_A^2 \ \Rightarrow \ v_B = \sqrt{v_A^2 - 2Rg\cos\alpha}$$

2. Pour que le point B soit atteint il faut que $v_A^2 - 2Rg\cos\alpha > 0$ soit $v_A > v_l = \sqrt{2Rg\cos\alpha}$.
   On s'intéresse désormais au mouvement entre B et C et on suppose que $v_A > v_l$. On étudie le mouvement du skieur à l'aide d'une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de centre O.

3. **Vecteurs cinématiques**
   ▷ position $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$
   ▷ vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec $v = -R\dot{\theta}$
   ▷ accélération : $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

   Bilan des forces
   ▷ poids : $m\vec{g} = mg\left(-\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$
   ▷ réaction du support : $\vec{N} = N\vec{e}_r$

   Le PFD projeté donne alors :
$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \end{cases}$$
   On trouve alors $N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$.

4. ▷ énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$
   ▷ énergie potentielle pesanteur : $E_p = +mgz = mgR\cos\theta$

5. ▷ **Point de départ : B**
$$Ec = \frac{1}{2}mv_B^2 \ ; \ E_p = mgz_B = mgR\cos\alpha$$
   ▷ **Point d'arrivée : B**
$$Ec = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \ ; \ E_p = mgz_B = mgR\cos\theta$$
   TEM : $E_m(M) - E_m(B) = 0$ donc :
$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos\alpha$$
   On trouve alors (**Attention !** au signe!) :
$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)}$$

6. Il y a décollage si la réaction du support N s'annule. Donc, il y a décollage en B si $N[\theta = \alpha] = 0$ soit :
$$N[\alpha] = mg\cos\alpha - mR\dot{\theta}^2[\alpha] = 0$$
   Or $\dot{\theta}^2[\alpha] = \frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\alpha) = \frac{v_B^2}{R^2}$. Finalement :
$$N[\alpha] = mg\cos\alpha - mR\frac{v_B^2}{R^2} = 0 \ \Rightarrow \ v_B = \sqrt{Rg\cos\alpha}$$

Comme $v_B = \sqrt{v_A^2 - 2Rg\cos\alpha}$ donc il y a décollage si

$$v_A^2 - 2Rg\cos\alpha > Rg\cos\alpha \;\Rightarrow\; v_A > \sqrt{3Rg\cos\alpha}$$

7. On recommence le même raisonnement mais avec un angle θ quelconque :

$$N[\theta] = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 = 0 \;\text{ avec }\; \dot{\theta}^2 = \frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)$$

Donc $mg\cos\theta - mR\left(\frac{v_B^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\alpha - \cos\theta)\right) = 0$ soit

$$3mg\cos\theta - m\frac{v_B^2}{R} - 2mg\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{v_B^2}{3gR} + \frac{2}{3}\cos\alpha$$

Avec $v_B^2 = v_A^2 - 2Rg\cos\alpha$ on a $\cos\theta = \dfrac{v_A^2}{3gR}$

TD16 Approche énergétique du mouvement d'un point

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Les indispensables

Exercice 1 - Applications directes du cours :

1. Un cycliste, de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ bicyclette incluse, effectue l'ascension du Mont Ventoux. Il roule à la vitesse constante $v = 10.5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ sur une pente qui fait un angle $\alpha = 30$ degrés avec l'horizontale.
   (a) Quelle est la puissance $\mathcal{P}$ du poids ?
   (b) Un ordinateur portable consomme environ $\mathcal{P}' = 50\,\mathrm{W}$. Commenter les deux puissances.
2. Un skieur de $80\,\mathrm{kg}$ skie sans frotter sur la neige et effectue un dénivelé de $15\,\mathrm{m}$. Sachant qu'il est parti à l'arrêt, quelle vitesse atteint-il (en $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$) ?
3. Un traineau de masse 20kg, initialement au repos, glisse sur une pente en partant d'une altitude de 20m ; il atteint le bas de la pente avec une vitesse de 16m.s$^{(-1}$. Calculer la perte d'énergie dûe aux phénomènes de frottement.

Exercice 2 - Distance de freinage :

Une voiture de masse $m = 1500\,\mathrm{kg}$ roule à la vitesse de $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ sur une route horizontale. L'automobiliste freine et s'arrête sur une distance de $d = 15\,\mathrm{m}$. La force de freinage est supposée constante.

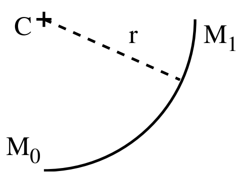
1. Déterminer le travail de cette force et en déduire la norme de T.
2. En supposant que cette force reste inchangée, quelle distance faut-il pour s'arrêter avec une vitesse initiale de $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$?

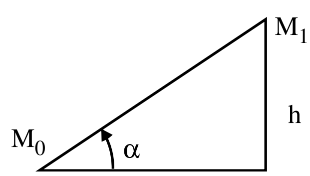
Exercice 3 - Théorème de l'Ec/Em :

Une bille de masse $m = 50$kg est susceptible de glisser :

• à l'intérieur d'une portion de jante circulaire, quart de cercle de centre C et de rayon $R_0 = 5$m avec une force de frottement constante $F = 100$N opposée à la vitesse

• sur une pente de hauteur $h = 5$m en présence de frottement de coefficient de glissement dynamique $f = 0.4$ constant, sur un plan incliné d'angle α.

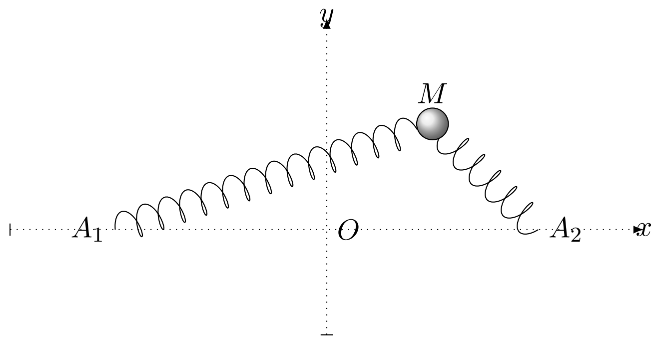




Déterminer dans chaque cas la vitesse minimale v_0 qu'il faut communiquer à la bille en M_0 afin qu'elle atteigne le point M_1.

Exercice 4 - Stabilité d'une position d'équilibre :

On considère un point matériel M de masse m relié à deux ressorts de raideur k et de longueur à vide l_0. Les ressorts sont attachés de part et d'autre du point O, centre du repère cartésien utilisé. On note A_1 et A_2leurs points d'attaches et $a = OA_1 = OA_2$.
O néglige la pesanteur et tout phénomène de frottement.



1. Déterminer l'énergie potentielle du point M en fonction de l_1 et l_2, les longueurs des ressorts 1 et 2.
2. Exprimer l_1 et l_2 en fonction des coordonnées du point M.
3. En déduire l'expression des forces de rappels des deux ressorts.

   On se place désormais sur l'axe (Oy),$x = 0$.
4. A l'aide de l'énergie potentielle, montrer qu'il au moins une position d'équilibre.
   A quelle condition sur a y en a-t-il plusieurs ?
5. Discuter la stabilité des positions d'équilibres suivant la valeur de a.

Exercice complet

Exercice 5 - Saut à l'élastique :

Un sauteur à l'élastique est modélisé par un point matériel M de masse $m = 70$ kg. Il tombe (sans vitesse initiale) depuis un pont avec un élastique accroché à ses pieds. La longueur de l'élastique non tendu est $l_0 = 20\,\text{m}$. L'élastique est modélisé par un ressort de raideur $k = 120\,\text{N/m}$.

La tension maximale permise par l'élastique (avant rupture) est $T_{\text{max}} = 1.5\,\text{kN}$. La hauteur du pont $H = 45\,\text{m}$. L'étude du saut comporte deux phases :
- la première au cours de laquelle le fil n'est pas tendu, et où il n'exerce donc pas de force de rappel ;
- la seconde au cours de laquelle le fil se tend, exerçant une force de rappel, jusqu'à sa longueur maximale.

Les frottements sont négligés et on prendra $g = 9.8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. **Phase 1**
   (a) Faire un schéma de la situation au cours de la première phase.
   (b) Déterminer la vitesse $v(z)$ en fonction de la position z.
   (c) Donner la vitesse à la fin de cette phase.
2. **Phase 2**
   (a) Faire un schéma de la situation au cours de la seconde phase.
   (b) Déterminer la vitesse $v(z)$ en fonction de la position.
   (c) En dérivant par rapport au temps le TEM, retrouver l'équation du mouvement.
   (d) Déterminer la longueur maximale du fil et la tension correspondante. Le fil va-t-il rompre ? Le pont est-il assez haut ?

Exercice 6 - Mouvement dans le champ de pesanteur terrestre :

Attention ! *PFD interdit dans cet exercice !!*
On admettra que la gravitation créée par la Terre, de masse M, de centre O et de rayon R, est identique à celui créé par une masse ponctuelle M placée en O, pour tout point situé à une distance $r > R$ de O.

1. Rappeler la force d'interaction gravitationnelle entre une masse m et la Terre.
   Au niveau de la surface de la Terre, comment s'appelle cette force. En déduire une expression de g.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle E_p et tracer la courbe $E_p = f(r)$ pour $r > R$.
3. Un satellite artificiel, de masse m, décrit une orbite circulaire à une distance r_0 constante du centre de la Terre. Déterminer en fonction de g_0, R, M et r_0 :

- ▷ la vitesse du satellite
- ▷ la durée de l'une de ses révolutions autour de la Terre.
- ▷ l'énergie cinétique du satellite.

4. On suppose qu'un projectile est lancé du sol verticalement avec la vitesse v_0.
   - ▷ Exprimer sa vitesse v lorsqu'il passe en un point distant de r du centre de la Terre.
   - ▷ Pour quelle valeur de r cette vitesse s'annulerait-elle ? En déduire la valeur minimale de v_0 pour que le projectile s'éloigne indéfiniment de la Terre. On néglige la résistance de l'air.

Réponses : $v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R^2}{r}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0 R^2}}$; $E_c = \frac{1}{2} m g_0 \frac{R^2}{r}$; $v = \sqrt{v_0^2 - 2 g_0 R\left(1 - \frac{R}{r}\right)}$; $v_{0(min)} = \sqrt{2 g_0 R}$

Exercice 7 - Travail d'une force non conservative (*) :

Un point matériel est astreint à se déplacer dans le plan xOy. Il est soumis à une force dont l'expression en fonction des coordonnées x et y du point matériel est :

$$\overrightarrow{F} = \alpha(y^2\overrightarrow{u_x} - x^2\overrightarrow{u_y})$$

On va chercher à prouver que cette force n'est pas conservative. Le point matériel se déplace du point A de coordonnées $(0,\, a<0)$ au point B de coordonnées $(b,0)$. On cherche à calculer le travail de la force $\overrightarrow{F}$ lors du déplacement

- ▷ chemin 1 : en suivant les deux segments de droite (AO) puis (OB) : chemin Γ_2.
- ▷ chemin 2 : en suivant la droite (AB) : chemin Γ_1.

1. **Chemin 1**
   (a) exprimer le déplacement élémentaire sur chacun des deux segments
   (b) calculer le travail sur chacun des deux segments
   (c) en déduire le travail total
2. **Chemin 2**
   (a) montrer qu'un déplacement horizontal dx induit un déplacement vertical dy :
   $$\mathrm{d}y = \frac{b}{a}\mathrm{d}x$$
   (b) donner le travail élémentaire de la force en fonction de α, a, b et dx
   (c) En déduire le travail total
3. Conclure sur le caractère conservatif de la force

Réponses : Force non conservative ; $W(\Gamma_1) = 0$; $W(\Gamma_2) = \alpha\frac{ab}{3}(a+b)$

TD16 Approche énergétique du mouvement d'un point

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Les indispensables

Exercice 1 - Applications directes du cours :

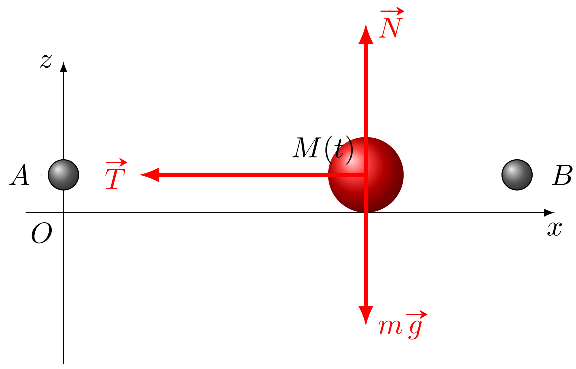
Attention ! *Petites applications rapides pour voir si on a bien compris les notions*

1. **Notion : puissance**
   (a) *On fait* **Attention !** *aux projections et aux unités !!*
   $\mathcal{P} = \vec{v} \cdot m\vec{g} = -mvg\sin\alpha = 160\text{W}<0$: le poids est résistif.
   (b) C'est trois fois moins que ce que produit le cycliste pour rouler à vitesse constante.

2. **Notion TEM et système conservatif**
   On applique le **TEM** entre le point A (altitude z_A, vitesse nulle) et le point B (altitude $z_B = z_A - h$, vitesse v_B).
   $$mgz_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgz_A = 0 \ \Rightarrow\ v_B = \sqrt{2gh} = 17\text{m/s}$$

3. **Notion : TEM et travail des forces de frottement**
   On applique le **TEM** entre le point A (altitude z_A, vitesse nulle) et le point B (altitude $z_B = z_A - h$, vitesse $v_B = 16\text{m/s}$).
   $$mgz_B + \frac{1}{2}mv_B^2 - mgz_A = W_{A\to B}(\vec{T}); \Rightarrow\ W_{A\to B}(\vec{T}) = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh < 0$$
   Les frottements sont résistifs

Exercice 2 - Distance de freinage :



- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $v(t) = \dot{x}$.
- **Bilan des forces**
  - $m\vec{g}$ ne travaille pas
  - $\vec{N}$ ne travaille pas
  - $\vec{T} = -T\vec{e}_x$

1. - **Travail élémentaire** : $\delta W = \vec{T} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = -T\vec{e}_x \cdot \mathrm{d}x\vec{e}_x = -T\mathrm{d}x$.
   - **Trajectoire** de A $x_A = 0$ à B $x_B = d$
   - **calcul du travail** :
   $$W_{A\to B}(\vec{T}) = \int_{A\to B} \delta W = \int_{x_A}^{x_B} -T\mathrm{d}x = -Td$$

2. On applique le **TEM** pour estimer T
   - **Trajet et bilan d'énergie**
     - point de départ A :
       $x_A = 0$ et $v_A = 50\text{km/h}=14\text{m/s}$
       Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_A^2$ et $E_p = 0$
     - point d'arrivée B :
       $x_B = d$ et $v_B = 0$
       Energie : $E_c = 0$ et $E_p = 0$

- **Travail des forces NC**
  on a montré que $W = \int_{x_A}^{x_B} -T\mathrm{d}x = -Td$
- **TEM**

$$0 - \left(\frac{1}{2}mv_A^2\right) = -Td \Rightarrow T = \frac{mv_A^2}{2d}$$

On trouve $T = 9600$N.

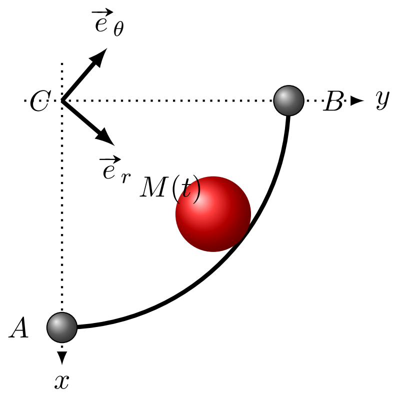
Avec cette valeur, on peut de nouveau appliquer le TEM pour une vitesse initiale de 90km/h et trouver $d = mv_A^2/2T$ soit 49m.

Exercice 3 - Théorème de l'Ec/Em :

Attention ! *Exercice important à bien maîtriser : beaucoup de situation ressemble à ces deux là !!*

Cas circulaire

On choisit un repère cylindrique de centre C suivant le point M. On note θ l'angle entre $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta$.



- **Vecteurs cinématiques**
  $\overrightarrow{OM} = R_0\vec{e}_r$; $\vec{v} = R_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $v(t) = R\dot{\theta}$
- **Bilan des $\vec{F}$ et des E_p**
  - Réaction du support $\vec{N}$: ne travaille pas
  - poids $m\vec{g} \to E_p = -mgx = -mgR_0\cos\theta$
  - force de frottement $\vec{T} = -T\vec{e}_\theta$

  On applique le **TEM** pour trouver la vitesse en B.

- **Trajet et bilan d'énergie**
  - point de départ A : $\theta = 0$ et $v_A = v_0$
    Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et $E_p = -mgR_0$
  - point d'arrivée B : $\theta = \pi/2$ et v_B
    Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_B^2$ et $E_p = 0$

- **Travail des forces NC**
  - travail élémentaire $\delta W = \vec{T}\cdot\vec{\mathrm{d}l}$ avec $\vec{\mathrm{d}l} = \vec{v}\mathrm{d}t = R_0\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R_0\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$
    Donc $\delta W = -TR_0\mathrm{d}\theta$.
  - trajectoire A $\theta_A = 0$ à B $\theta_B = \pi/2$
  - calcul du travail

$$W_{A\to B}(\vec{T}) = \int_{A\to B}\delta W = \int_0^{\pi/2} -TR_0\mathrm{d}\theta = -TR_0\pi/2$$

- **TEM**

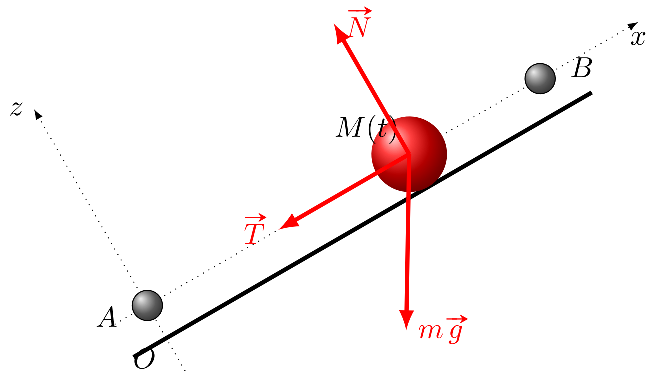
$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2 + 0\right) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR_0\right) = -TR_0\pi/2 \Rightarrow v_B^2 = v_0^2 - 2R_0g - \frac{TR_0\pi}{2m}$$

Pour que cela soit possible, il faut que $v_B^2 > 0$ donc :

$$v_0^2 > 2R_0g + \frac{TR_0\pi}{2m} \Rightarrow v_0 > \sqrt{2R_0g + \frac{TR_0\pi}{2m}}$$

On remarque que si $T = 0$ (*pas de frottement*) $v_0 > \sqrt{2gR_0}$: c'est le "classique" $\sqrt{2gh}$.

Rampe inclinée



▷ **Vecteurs cinématiques**
$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $v(t) = \dot{x}$

▷ **Bilan des $\vec{F}$ et des E_p**

▷ Réaction du support $\vec{N}$: ne travaille pas
▷ poids $m\vec{g} \to E_p = mg\sin\alpha\, x$
▷ force de frottement $\vec{T} = -T\vec{e}_x$ avec $T = fN$

On applique le **TEM** pour trouver la vitesse en B.

▷ **Trajet et bilan d'énergie**

▷ point de départ A : $x = 0$ et $v_A = v_0$
Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ et $E_p = 0$

▷ point d'arrivée B : $x = h/\sin\alpha$ et v_B
Energie : $E_c = \frac{1}{2}mv_B^2$ et $E_p = mgh$

▷ **Travail des forces NC**
▷ travail élémentaire $\delta W = \vec{T}\cdot\vec{dl}$ avec $\vec{dl} = dx\vec{e}_x$ et $T = fN = fmg\cos\alpha$ (*PFD projeté sur* $\vec{e}_y$)
Donc $\delta W = -fmg\cos\alpha dx$.
▷ trajectoire A $x_A = 0$ à B $x_B = h/\sin\alpha$
▷ calcul du travail

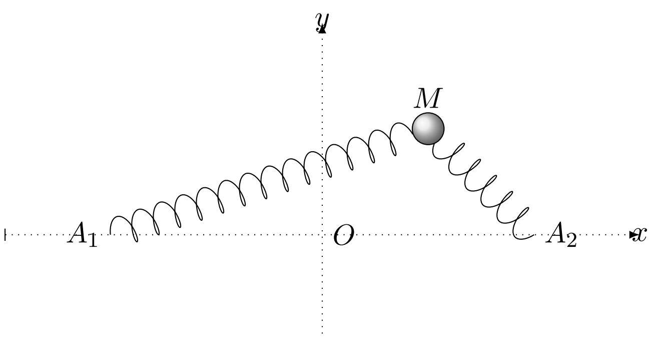
$$W_{A\to B}(\vec{T}) = \int_{A\to B}\delta W = \int_0^{h/\sin\alpha} -fmg\cos\alpha dx = -\frac{fmgh}{\tan\alpha}$$

▷ **TEM**
$$\left(\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh\right) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + 0\right) = -\frac{fmgh}{\tan\alpha} \Rightarrow v_B^2 = v_0^2 - 2gh - \frac{2fgh}{\tan\alpha}$$
Pour que cela soit possible, il faut que $v_B^2 > 0$ donc :

$$v_0^2 > 2gh + \frac{2fgh}{\tan\alpha} \Rightarrow v_0 > \sqrt{2gh + \frac{2fgh}{\tan\alpha}}$$

On remarque que si $f = 0$ (*pas de frottement*) on retrouve le "classique" $\sqrt{2gh}$.

Exercice 4 - Stabilité d'une position d'équilibre :



1. ▷ Energie potentielle du ressort 1 : $E_{p,1} = \frac{k}{2}(l_1 - l_0)^2$ avec $l_1 = A_1M = \sqrt{(x-(-a))^2 + (y-0)^2}$.
Attention ! *on cherche une longueur, on a un système à deux coordonnées ⇒ on écrit les coordonnées de M :* (x, y) *et* $A_1 : (-a, 0)$ *!!!*

▷ Energie potentielle du ressort 2 : $E_{p,1} = \dfrac{k}{2}(l_2 - l_0)^2$ avec $l_2 = A_2M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$.

Donc $E_p = \dfrac{k}{2}\left(\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right)^2 + \left(\sqrt{(x-a)^2+y^2} - l_0\right)^2\right)$.

2. *Cf avant*

3. **Attention !** Lien $\vec{F} \leftrightarrow E_p$: $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p$ donne E_p si on connaît $\vec{F}$ mais sert aussi dans l'autre sens : donne $\vec{F}$ si on connaît E_p !!

$$\vec{F}_1 = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_{p,1} = -\frac{\partial E_{p,1}}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p p, 1}{\partial y}\vec{e}_y$$

Un peu de calcul donc ... à faire avec ***méthode*** *!!*

$$\frac{\partial E_{p,1}}{\partial x} = \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sqrt{(x+a))^2+y^2} - l_0\right)^2\right] \qquad \text{(dérivée d'une fonction au carrée)}$$

$$= k\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right) \times \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right] \qquad \text{(dérivée d'une racine carrée (le } l_0 \text{ dégage)}$$

$$= k\left(\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0\right) \times \frac{1}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}} \times \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a)^2+y^2\right] \qquad \text{(dérivée de } (x+a)^2\text{)}$$

Finalement : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(x+a)^2+y^2\right] = 2(x+a)$ et donc :

$$\frac{\partial E_{p,1}}{\partial x} = 2k(x-a)\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

De la même façon on trouve : $\dfrac{\partial E_{p,1}}{\partial y} = 2ky\dfrac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$.

Finalement :

$$\vec{F}_1 = 2k(x-a)\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\vec{e}_x + 2ky\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2} - l_0}{2\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\vec{e}_y$$

Pour trouver $\vec{F}_2$, il suffit de remarque qu'il faut transformer $+a \to -a$.

4. Pour $x = 0$, les longueurs A_1M et A_2M sont les mêmes et l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E_p = k\left(\sqrt{a^2+y^2} - l_0\right)^2$$

L'énergie potentielle n'est plus qu'à une seule variable : $\partial \to \mathrm{d}$

▷ **position d'équilibre** : $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = 0$

▷ **stabilité** : $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}y^2} > 0$

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y} = 2k\left(\sqrt{a^2+y^2} - l_0\right)\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

On a plusieurs position d'équilibre potentielle :

▷ $y = 0$

▷ $\sqrt{a^2+y^2} - l_0 = 0$ donc $y^2 = l_0^2 - a^2$ donc $y = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$

Pour que les deux dernières position existent il faut que $l_0 > a$.

5. Soit on calcule $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}y^2} > 0$ et on évalue en $y = a$ et $y = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$ (*très calculatoire*) soit on est malin et on trace $E_p[y]$ sur sa calculette ! (*on peut prendre* $a = 1/l_0 = 2$ *et* $a = 2/l_0 = 1$)
On cherche alors les maximas et minimas d'énergie potentielle.

Exercice complet

Exercice 5 - Saut à l'élastique :

1. **Phase 1** Au cours de cette phase, l'élastique n'est pas tendu : il n'y a pas de force de rappel élastique et donc pas d'énergie potentielle élastique.
   On peut alors écrire rapidement le TEM entre le point de saut et un poiunt d'altitude z quelconque, avec un axe (Oz) orienté vers le bas dont l'origine coïncide avec la position initiale.
   $$\frac{1}{2}mv[z]^2 - mgz = 0$$
   On obtient alors $v[z] = \sqrt{2qz}$ et donc en fin de mouvement, $z = l_0$, $v[l_0] = \sqrt{2gl_0}$.
2. **Phase 2**
   Il faut alors prendre en compte l'élastique via son énergie potentielle élastique : $E_k = \frac{k}{2}(z - l_0)^2$.
   On applique le TEM entre un point $z = l_0$ et un point d'altitude quelconque z.
   Attention ! pas le droit de prendre comme point de départ O !
   $$\frac{1}{2}mv[z]^2 + \frac{k}{2}(z - l_0)^2 - mgz - \underbrace{\frac{1}{2}mv[l_0]^2}_{=mgl_0} = 0$$
   Donc $v[z] = \sqrt{2g(z + l_0) - \frac{k}{m}(z - l_0)^2}$.
   On écrit le TEM avec les coordonnées $v = \dot{z}$: $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{k}{2}(z - l_0)^2 - mgz = 0$
   $$\frac{1}{2}m \times 2\dot{z}\ddot{z} + \frac{k}{2} \times \dot{z}(z - l_0)^2 - mg\dot{z} = 0$$
   En simplifiant par $\dot{z}$ on trouve : $m\ddot{z} + k(z - l_0)^2 - mg = 0$ ce qui est équivalent au PFD projeté sur l'axe (Oz).

   A l'étirement maximale, la vitesse est nulle (le sauteur fait demi tour) donc :
   $$\frac{k}{2}(z_{max} - l_0)^2 - mgz_{max} - mgl_0 = 0 \ \Rightarrow\ z_{max}^2 - \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) z_{max} - 2\frac{mgl_0}{k} + l_0^2 = 0$$
   On trouve $z_{max} =$ ..... et on peut évaluer la force de rappel du ressort via $F = k(z_{max} - l_0)$.

Exercice 6 - Mouvement dans le champ de pesanteur terrestre :

Exercice difficile jusqu'au chapitre sur les mouvements à force centrale. A travailler une fois ce chapitre fini.

Exercice 7 - Travail d'une force non conservative (*) :

*A travailler en dernière approche, venir me voir si question. La partie **Chemin 1** est facilement abordable.*

Chap XVII

Moments cinétiques

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

Savoirs ♡

- ♡ **Moment cinétique d'un point matériel**
  - moment cinétique par rapport à un point fixe
  - moment cinétique par rapport à un axe fixe
- ♡ **Moment d'une force sur un point matériel**
  - moment d'une force par rapport à un point fixe
  - moment d'une force par rapport à un axe fixe
  - notion de bras de levier
- ♡ Théorème du moment cinétique

Savoir Faire

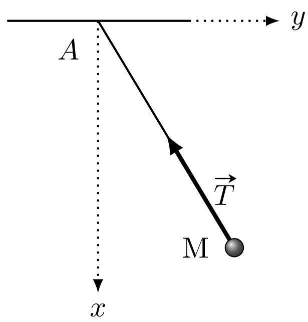
Calculer le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe fixe

Calculer le moment d'une force sur un point matériel par rapport à un axe fixe

Applications du TMC
- *cas du pendule simple*
- *cas du pendule conique*

Nous avons développé deux approches de la dynamique des points matériels :
- **à travers la quantité de mouvement (∼ PFD)** qui permet de traiter toute situation mais qui est parfois un peu lourde car on obtient les équations horaires du mouvement.
- **à travers l'énergie (∼ TEM)** qui permet de retrouver des grandeurs non temporelle (vitesse, position, ...) en absence de frottement

Nous avons déjà rencontré de nombreux cas où la direction de la force n'est pas constante mais cette dernière est toujours orientée vers un même point fixe. C'est le cas par exemple d'un pendule.



Nous allons développer ici une approche, **les moments cinétiques**, qui convient particulièrement à l'étude de ces cas.

Attention ! *Chapitre est cours et peut sembler de prime abord peu important. Mais il développe des techniques* ***indispensable*** *pour les deux chapitres suivant (mouvement à force centrale et rotation des solides).*

1 Moments cinétiques et trajectoires

1.1 Analogie entre PFD - TEM - TMC

Il est important de comprendre comment sont construits les 3 lois phares de la mécanique du point. Prenons le Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{ext}$$

- le terme de gauche représente la variation de la quantité de mouvement : c'est le domaine de la **cinématique**
- le terme de droite représente les forces extérieures : c'est la **mécanique**
- le "=" n'est possible que dans un référentiel galiléen

On retrouve cette même structure :
- dans le Théorème de l'Energie Mécanique : la variation de l'énergie mécanique (∼ "*gauche*") est égale, dans un référentiel galiléen, aux travaux élémentaires des forces non-conservatives ("∼ "*droite*").

- dans le Théorème du moment cinétique : la variation du moment cinétique d'un point matériel (∼ "*gauche*") est égal, dans un référentiel galiléen, à la somme des moments des forces (∼ "*droite*").

dans un référentiel galiléen,

PFD :
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}$$

TMC :
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_M^O}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}}^O}$$

TEM :
$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum \delta W(\vec{F}_{NC})$$

1.2 Moment cinétique d'un point matériel

▶ "Avec les mains"

Le moment cinétique d'un point matériel est une grandeur **purement cinématique** ($\sim$ pas de force). $\vec{L}_M^O$ décrit "la quantité de rotation d'un point matériel M autour d'un point fixe O.
C'est un vecteur :
- ▷ sa direction indique l'axe autour duquel le point tourne
- ▷ sa norme : "masse $\times$ distance à l'axe de rotation $\times$ vitesse de rotation

  Unité : kg $\times$ m $\times$ m.s^{-1}

Attention ! Quand on écrit $\vec{L}_M^O$ on pense "moment cinétique de M mobile par rapport à O fixe"!!!!!!!!!!!!!!

▶ Définition et calcul

Définition. Moment cinétique par rapport à un point
Le moment cinétique d'un point mobile M par rapport à un point fixe O est noté $\vec{L}_M^O$:

$$\vec{L}_M^O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

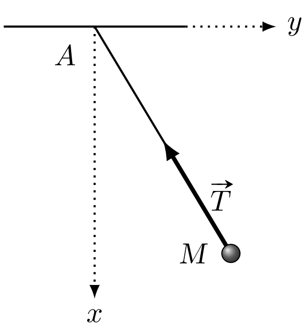
Attention ! Parler du moment cinétique de M n'a aucun sens!! Un moment cinétique est défini à l'aide de 2 points :
- ▷ point mobile M : point qui tourne
- ▷ point fixe O : point autour duquel on tourne

Tout comme pour le PFD, on préfèrera utiliser des grandeurs scalaires.

Définition. Axe de rotation
Un axe de rotation (Δ) est défini par :
- ▷ un point O par lequel passe l'axe
- ▷ un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ qui donne sa direction

On note alors $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$.

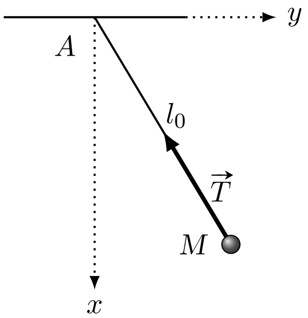
> *Exemple 1 : L'axe de rotation d'une porte :*
> - ▷ *point fixe : un des gonds*
> - ▷ *vecteur : vecteur vertical*

> *Exemple 2 :*
>
> 
>
>
> *Axe de rotation du pendule :*
> - ▷ *un point : point fixe A d'attache du fil*
> - ▷ *vecteur : $\vec{e}_z$*

Définition. Moment cinétique par rapport à un axe
Le moment cinétique d'un point mobile M par rapport à un axe fixe $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$ est noté $L_M^{(\Delta)}$

$$L_M^{(\Delta)} = \vec{L}_M^O \cdot \vec{u}_\Delta$$

Exemple 3 :



On souhaite calculer le moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Δ) de rotation du pendule.

0. ***On définit le point mobile, le point fixe et l'axe de rotation***
   - *Point mobile : la masse M*
   - *Point fixe A : point d'attache du pendule*
   - *Axe : $(\Delta) = (A, \vec{e}_z)$*

1. ***On écrit les vecteurs cinématiques***
   On choisit un repère cylindrique de centre A.
   - *position : $\overrightarrow{AM} = l_0 \vec{e}_r$*
   - *vitesse : $\vec{v} = l_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$*
2. ***On calcule le moment cinétique par rapport au point fixe***

$$\vec{L}_M^A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = l_0 \vec{e}_r \wedge m l_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_M^A = m l_0^2 \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m l_0^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

   ♡ *Instant math* ♡
   Dans une base directe : $\vec{1} \wedge \vec{2} = \vec{3}$ et on décale vers la gauche !!

3. ***On calcule le moment cinétique par rapport à l'axe fixe***

$$L_M^{(\Delta)} = \vec{L}_M^A \cdot \vec{e}_z = m l_0^2 \dot{\theta}$$

   Attention ! *Le point fixe qui définit l'axe et le point fixe par rapport auquel on calcule le moment cinétique sont les mêmes !*

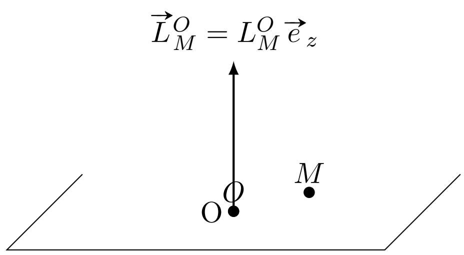
1.3 Cas particulier : mouvement plan

Le moment cinétique $\vec{L}_M^O$ représente la "quantité de rotation" d'un point M autour d'un point O. Si cette grandeur est nulle, cela signifie que le point M ne tourne pas autour de O.

Propriété. Mouvement rectiligne
Si le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O nul alors le mouvement de M est rectiligne et passe par O.

▶ Trajectoire d'un mouvement plan

On étudie la trajectoire d'un point M possédant un mouvement plan : le point M se déplace dans le plan (O, x, y).
- vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$
- vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$



On a alors :

$$\vec{L}_M^O = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \wedge m(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y) = (x\dot{y} - y\dot{x})\,\vec{e}_z$$

Le moment cinétique du point M pointe toujours dans la direction de $\vec{e}_z$. On admettra la contrapposé comme vraie.

Propriété. Moment cinétique et mouvement plan
Un point mobile M dont le moment cinétique par rapport à O est de direction fixe possède un mouvement plan.
Le plan du mouvement est perpendiculaire à $\vec{L}_M^O$.

Attention ! Cette propriété est très importante !

Astuce pratique : " montrer que le mouvement de M est plan " $\Rightarrow$ je montre que $\vec{L}_M^O$ est de direction fixe

2 Moment de force et théorème du moment cinétique

2.1 Moment de force

Le moment cinétique décrit la quantité de rotation d'un point mobile. Tout comme la variation de la quantité de mouvement d'un point dépend des forces qui s'appliquent en ce point, la variation du moment cinétique dépend d'une grandeur **mécanique** appelée **moment des forces**.

Définition. Moment d'une force par rapport à un point fixe
Le moment d'une force $\vec{F}$ appliqué à un point M par rapport à un point fixe O est notée $\vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F})$

$$\vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

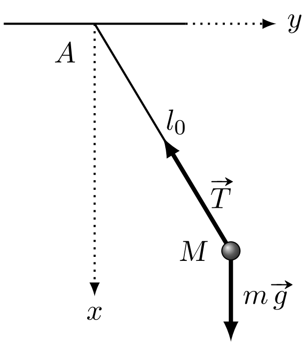
De la même façon que pour le moment cinétique, on peut définir le moment d'une force par rapport à un axe.

Définition. Moment d'une force par rapport à un axe fixe
Le moment d'une force par rapport à un axe fixe $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$ est noté $\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{F})$

$$\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

"Avec les mains"
Le moment d'une force appliquée en M par rapport à un axe (Δ) rend compte d'à quel point la force fait tourner le point M autour de (Δ).

Exemple 4 :



Calculons les moment des deux forces qui s'appliquent en M par rapport à l'axe de rotation $(\Delta) = (A, \vec{e}_z)$.

- *Tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$*

$$\vec{\mathcal{M}}_M^A(\vec{T}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{T} = l_0\vec{e}_r \wedge -T\vec{e}_r$$

$$\vec{\mathcal{M}}_M^A(\vec{T}) = -l_0T\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$$

On trouve un moment par rapport à A nul et donc un moment par rapport à l'axe (Δ) également nul.
Ce résultat est attendu ! La force de tension du fil n'entraîne pas le mouvement de rotation de M autour de (Δ) : son moment est nul.

- *poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_x$*
  Attention ! *On exprime tout dans une même base !! On a choisi précédemment $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ donc on doit exprimer $\vec{e}_x$ dans cette base*

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_M^A(m\vec{g}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{g} = l_0\vec{e}_r \wedge mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_M^A(m\vec{g}) = -l_0 mg\sin\theta\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -l_0 mg\sin\theta\vec{e}_z$$

Une fois qu'on a le moment par rapport au point fixe, on calcule celui par rapport à l'axe :

$$\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(m\vec{g}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_M^A(m\vec{g}) \cdot \vec{e}_z = -l_0 mg\sin\theta$$

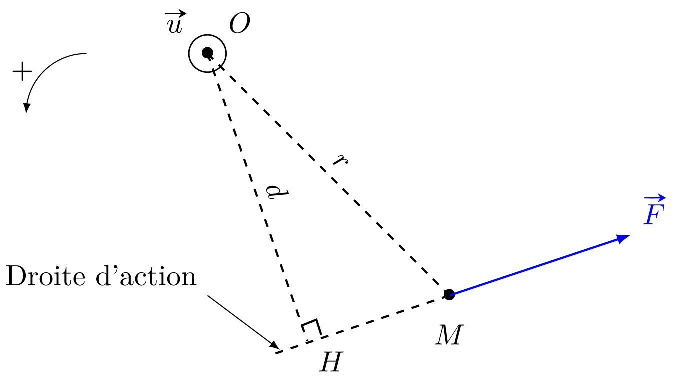
2.2 Bras de levier

Derrière cette notion un peu abstraite de moment d'une force se cache un concept de la vie de tous les jours : le bras de levier.

▶ Notion de bras de levier

On considère un axe Δ dirigé par un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et une force $\vec{F}$ orthogonale à l'axe (Δ).

On définit **la droite d'action** comme la droite dans le prolongement de $\vec{F}$. On note d la distance entre la droite d'action et l'axe de rotation. Cette grandeur est nommée **bras de levier**.



Attention ! d n'est pas égale à r : c'est la plus petite distance entre O et la droite d'action. Pour la trouver, on trace le projeté orthogonal de O sur la droite.

Propriété. Moment d'une force et bras de levier
Le moment d'une force par rapport à un axe (Δ) est

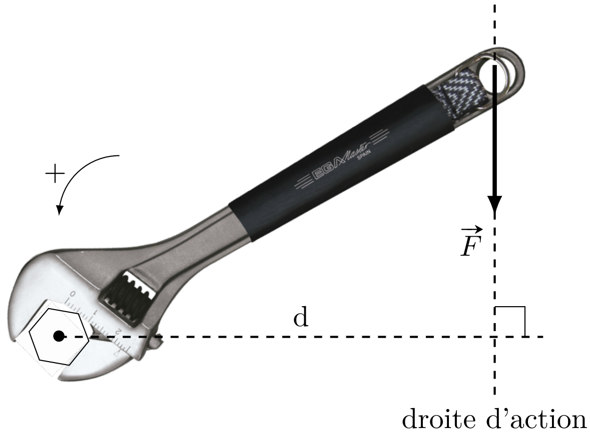
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm\text{" force } \times \text{ bras de levier}$$

Le signe dépend du sens dans lequel la force fait tourner le point.
Cas particulier : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$ si
- ▷ la droite d'action passe par l'axe (Δ) ;
- ▷ si la force est parallèle l'axe Δ

▶ Applications : La clé à molette

Si on essaie de dévisser un écrou, on utilise une clé à molette. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'opérateur (de norme F). On note (Δ) l'axe de rotation de l'écrou. Le moment par rapport à l'axe exercée par l'opérateur est $\mathcal{M}_\Delta = -Fd$.

On constate que pour avoir un moment le plus grand possible (en valeur absolue), on a intérêt à exercer une force orthogonale à la clé à molette. Dans ce cas, le bras de levier d est égale à la longueur de la clé. Par conséquent, plus la clé est grande, plus l'action est efficace.



2.3 Enoncé

Le Théorème du Moment Cinétique, ou TMC, est le pendant du PFD mais pour les moments.

Théorème. Théorème du moment cinétique
Dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un point M soumis à un ensemble de forces extérieures vérifie :

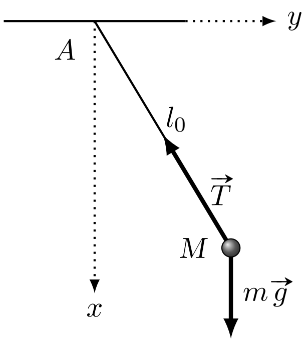
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_M^O}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F})$$

Théorème. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe
On considère dans un référentiel galiléen un point M soumis à un ensemble de forces extérieures. Pour un axe fixe $(\Delta) = (O, \vec{u}_\Delta)$ on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}L_M^{(\Delta)}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{F})$$

Attention ! Le TMC est une reformulation du PFD : il est donc nécessaire de se placer dans un référentiel galiléen pour pouvoir l'utiliser.

Exemple 5 :



Pour le pendule simple on avait par rapport à l'axe $(\Delta) = (A, \vec{e}_z)$:

- ▷ *moment cinétique :* $L_M^{(\Delta)} = ml_0^2\dot{\theta}$
- ▷ *moment de la tension du fil* $\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{T}) = 0$
- ▷ *moment du poids :* $\mathcal{M}_M^{(\Delta)}(m\vec{g}) = -mgl_0 \sin\theta$

Le TMC nous indique que :

$$\frac{dL_M^{(\Delta)}}{dt} = \mathcal{M}_M^{(\Delta)}(m\vec{g}) + \mathcal{M}_M^{(\Delta)}(\vec{T})$$

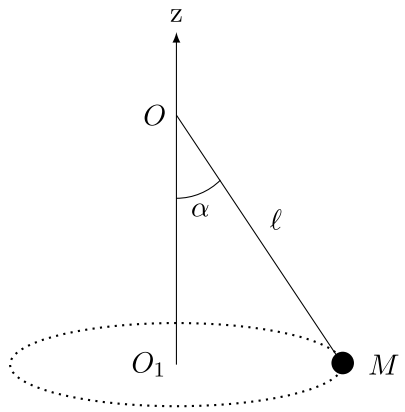
$$\frac{dml_0^2\dot{\theta}}{dt} = -mgl_0\sin\theta + 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l_0}\sin\theta = 0$$

On retrouve bien l'équation différentielle obtenue avec le PFD.

3 Exemple d'application : le pendule conique

Un point matériel M (de masse m) est suspendu à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ attaché en un point O fixe. On définit l'axe vertical $(\Delta) = (Oz)$.
On fait tourner le pendule de manière à ce que la masse effectuer un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω dans le plan horizontal (xO_1y). Le fil garde une inclinaison constante α par rapport à la verticale.

On remarque alors que si on augmente la vitesse de rotation ω, l'angle α augmente également. On cherche la relation entre ces deux grandeurs.



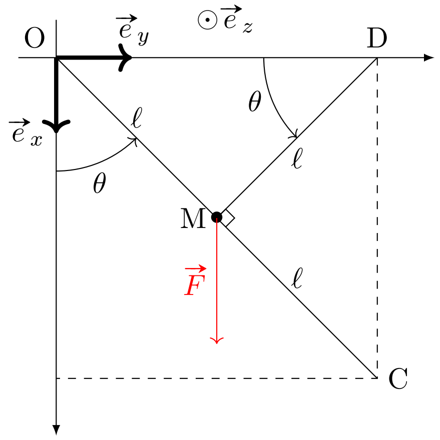
1. Sur un schéma en 3D représenter la base cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
   Faire de même pour un schéma à $2D$ dans le plan contenant O, O_1 et M
2. ▷ Exprimer le moment cinétique de M par rapport au point O en fonction de m, l, α, ω et des vecteurs de la base.
   ▷ Déterminer le moment cinétique des forces par rapport au point O.
   ▷ En appliquant le TMC par rapport à l'axe (O, z), montrer que l'on tombe sur une impasse.
   ▷ En appliquant le TMC par rapport au point O, trouver un lien entre α et ω.

TD17 Moment cinétique

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Exercice 1 - Applications directes du cours :

On considère le système mécanique ci-contre.



1. Calculer les produits vectoriels suivants avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ le vecteurs de la base polaire attachée à M.

   $(3\vec{e}_x + \vec{e}_z) \wedge (2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \quad ; \quad (\vec{e}_x) \wedge (3\vec{e}_r - 2\vec{e}_\theta)$

2. Le point matériel $\mathrm{M}(m)$ est soumis à une force constante $\vec{F} = F\vec{e}_x$. Exprimer et calculer les moments de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe passant par le point considéré orienté selon $\vec{e}_z$ suivants :

   $$\mathcal{M}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \; ; \; \mathcal{M}_{\mathrm{D}}(\vec{F}) \; ; \; \mathcal{M}_{\mathrm{C}}(\vec{F}) \; .$$

3. On considère un point M se déplaçant à une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u_x} + 3v_0\vec{u}_y$. A $t = 0$, $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_x$. Représenter la trajectoire de M sur un schéma.
   Calculer le moment cinétique de M au point O à l'instant t.

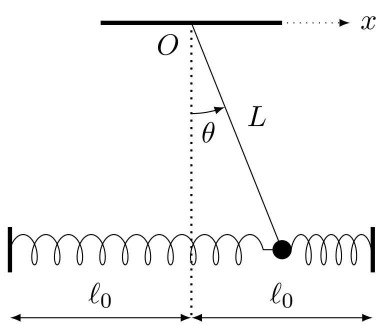
Exercice 2 - Pendule simple couplé à des ressorts :

On considère le dispositif suivant. Les deux ressorts sont identiques (raideur k et longueur à vide ℓ_0) et on écarte légèrement la masse M supposée ponctuelle de sa position d'équilibre verticale. On suppose que les deux ressorts sont toujours horizontaux.

1. En appliquant le TMC, déterminer une équation différentielle sur θ.

   On se place dans le cas de petites oscillations $\theta << 1$ donc $\sin\theta \sim \theta$, $\cos\theta \sim 1$.

2. En déduire la période des oscillations.



TD17 Moment cinétique

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Exercice 1 - Applications directes du cours :

1. On développe les produits et on projette $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$:

$$(3\vec{e}_x + \vec{e}_z) \wedge (2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) = \vec{0} - 9\vec{e}_z 2\vec{u}_y + 3\vec{e}_x$$

$$(\vec{u}_x)\wedge(3\vec{u}_\rho - 2\vec{u}_\theta) = \vec{e}_x \wedge 3\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) + \vec{e}_x \wedge -2\,(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y) = 3\sin\theta\,\vec{e}_z - 2\cos\theta\,\vec{e}_z$$

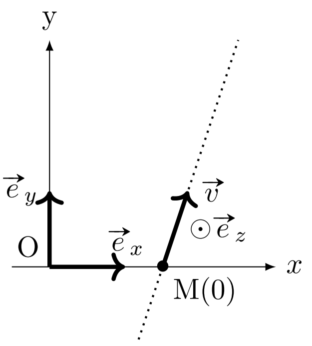
2. ▷ $\mathcal{M}_\mathrm{O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \cdot \vec{e}_z$

$$= l\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y) \wedge F\,\vec{e}_x \cdot \vec{e}_z$$

$$= -Fl\sin\theta\,\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = -Fl\sin\theta$$

De la même façon :
▷ $\mathcal{M}_\mathrm{D}(\vec{F}) = +Fl\sin\theta$
▷ $\mathcal{M}_\mathrm{C}(\vec{F}) = +Fl\sin\theta$

3. La vitesse est constante, la trajectoire est rectiligne.



Moment cinétique : $\vec{L}_M^O(t) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$.
Par intégration de $\vec{v}$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = (a + v_0 t)\,\vec{e}_x + 3v_0 t\,\vec{e}_y$$

Soit :

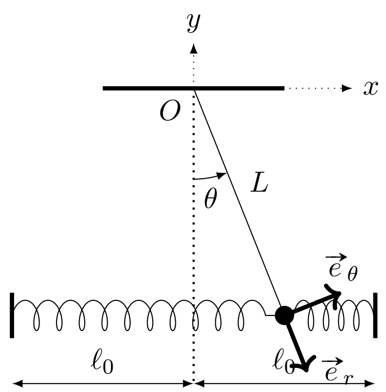
$$\vec{L}_M^O(t) = ((a + v_0 t)\,\vec{e}_x + 3v_0 t\,\vec{e}_y) \wedge (v_0\,\vec{e}_x + 3v_0\,\vec{e}_y)$$

$$\vec{L}_M^O(t) = 3v_0(a + v_0 t)\,\vec{e}_z - 3v_0^2 t\,\vec{e}_z$$

$$\vec{L}_M^O(t) = 3v_0 a\,\vec{e}_z$$

Exercice 2 - Pendule simple couplé à des ressorts :

On introduit un système de coordonnées **DIRECTE !!!** . Ca tourne, on préférera utiliser un système de coordonnées polaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$).



On choisit comme axe de rotation $(\Delta) = (O, \vec{e}_z)$.

1. ▷ **Vecteurs cinématiques** : $\overrightarrow{OM} = L\vec{e}_r$; $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
   Moment cinétique : $L_M^\Delta = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \cdot \vec{e}_z = mL^2\dot{\theta}$

   ▷ **Force et moments**
   - ▷ poids $m\vec{g} = mg\,(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$ donc

   $$\mathcal{M} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g} \cdot \vec{e}_z = -Lmg\sin\theta$$

   - ▷ force de rappel du ressort de gauche $\vec{F}_g = -k(l_g - l_0)(-\vec{e}_x)$ avec $l_g = l_0 + L\tan\theta$ soit $\vec{F}_g = k\tan\theta\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$

   $$\mathcal{M} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_g \cdot \vec{e}_z = -L^2k\tan\theta\cos\theta$$

   - ▷ force de rappel du ressort de droite $\vec{F}_d = -k(l_d - l_0)\,\vec{e}_x$ avec $l_d = l_0 - L\tan\theta$ soit $\vec{F}_d = k\tan\theta\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$

   $$\mathcal{M} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_d \cdot \vec{e}_z = -L^2k\tan\theta\cos\theta$$

   On a alors via la **TMC**

   $$mL^2\ddot{\theta} = -Lmg\sin\theta - 2L^2k\tan\theta\cos\theta$$

2. A l'aide des simplifications sur θ on trouve :

   $$mL^2\ddot{\theta} = -L(mg + 2kL)\theta \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{mg + 2kL}{mL}\theta = 0$$

   soit une pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mg + 2kL}{mL}}$ et une période $T_0 = 2\pi/\omega_0$.