Le Soulard

PCSI

Tome 6 : Mécanique II

- *Gravitation céleste*
- *Mécanique du solide en rotation*
- *Hydrostatique*

Cours de Physique
de première année
de classe préparatoire

Lycée Louis Thuillier

Chap XVIII

Mouvement et forces centrales

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

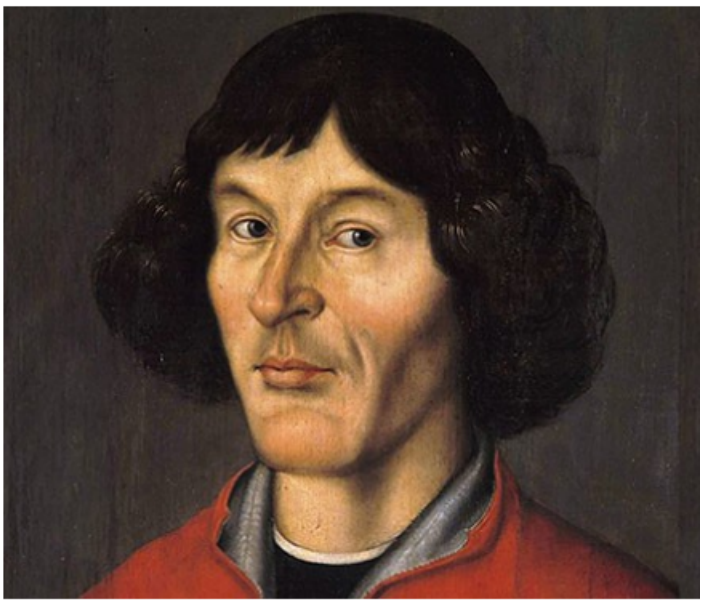
Table des matières

1 Les forces centrales **3**
- 1.1 Définitions . . . 3
- 1.2 Mouvement à force centrale . . . 3
- 1.3 Force centrale conservative . . . 5
- 1.4 Energie potentielle effective . . . 6

2 Force Newtonienne et énergie potentielle effective **9**
- 2.1 Définition et énergie potentielle . . . 9
- 2.2 Étude d'une trajectoire et énergie potentielle effective . . . 9

3 Mouvement d'un satellite autour de la Terre **12**
- 3.1 Etat de diffusion : $E_m > 0 \sim$ trajectoire d'une comète . . . 12
- 3.2 Etat lié : $E_m < 0 \sim$ trajectoire d'un satellite . . . 14
- 3.3 Trajectoire circulaire . . . 15
- 3.4 Mise en orbite d'un satellite . . . 17
- 3.5 Force répulsive ($K < 0$) . . . 19

4 Quelques applications à la gravitation **19**
- 4.1 Satellite géostationaires . . . 19
- 4.2 Atmosphère des planètes . . . 20



Savoirs ♡

- ♡ **Travail et puissance d'une force**
  - puissance d'une force
  - caractère résistif ou moteur d'une force
  - travail élémentaire d'une force et travail d'une force le long d'une trajectoire
- ♡ **Energie cinétique, gradient et énergie potentielle**
  - énergie cinétique
  - gradient d'une fonction en coordonnées cartésiennes et cylindriques
  - énergie potentielle et lien avec une force conservative
  - travail d'une énergie potentielle
- ♡ **Énergie mécanique et théorèmes énergétiques**
  - Énergie mécanique
  - Théorème de l'énergie mécanique
  - Cas particulier d'un système conservatif
- ♡ **Positions d'équilibres**
  - notion de position d'équilibre et d'état d'équilibre
  - équilibre stable et équilibre instable ; lien avec l'énergie potentielle

Savoir Faire

Calculer le travail d'une force entre deux points A et B

Obtenir l'énergie potentielle d'une force ; conclure sur le caractère conservatif ou non d'une force

Applications des théorèmes énergétiques

- *Discuter de la faisabilité d'un mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique*
- *Pour un système conservatif obtenir des grandeurs : vitesse max ; altitude max ; ...*
- *Discuter l'influence des frottements sur la trajectoire d'un mobile*
- *Obtenir l'équation du mouvement par le théorème de la puissance mécanique*

Décrire le mouvement d'un point à l'aide d'un graphe d'énergie potentielle

- *trouver les positions d'équilibre stable et instable*
- *discuter la nature du mouvement à partir des conditions initiales : état lié ou de diffusion*

Il existe un cas particulier où le TMC possède une expression simplifié : lorsque les moments des forces sont nulles. Cela arrive pour une classe de force appelées **forces centrales**. L'objectif de ce cours est de décrire les propriétés des mouvements engendrés, notamment les mouvements des astres et satellites.

1 Les forces centrales

1.1 Définitions

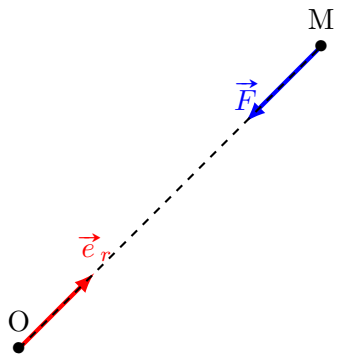
▶ Force centrale

Définition. Force centrale

Une force centrale est une force appliquée en un point matériel M et qui est, à tout instant, dirigée vers un point fixe O, appelé centre de force.

En introduisant un repère cylindrique de centre O, on a :

$$\vec{F} = F(r,\theta,z)\vec{e}_r$$



Vocabulaire

On parle de force
- ▷ **répulsive** si $F(r) > 0$
- ▷ **attractive** si $F(r) < 0$

> ***Exemple 1 :***
> - ▷ *interaction entre la Terre et un satellite*
> - ▷ *interaction entre le Soleil et la Terre*
> - ▷ *une masse au bout d'un ressort*
> - ▷ *une masse au bout d'un fil*

Une force centrale pointant toujours vers O, sa droite d'action passe par O .

Propriété. Moment d'une force centrale

Le moment d'une force centrale par rapport à son centre de force O est nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_M^O(\vec{F}) = \vec{0}$$

1.2 Mouvement à force centrale

▶ Mouvement plan

Un mouvement à force centrale est un mouvement au cours duquel le système est soumis à des forces dont la résultante est une force centrale.
Dans un référentiel galiléen, en appliquant le TMC par rapport au centre de force O on obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_M^O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

On remarque alors que le vecteur $\vec{L}_M^O$ est constant. Deux conséquences :
1. le vecteur est de direction fixe
2. le vecteur est de norme constante

On déduit du premier point que la trajectoire du point M est plane.

Propriété. Conservation du moment cinétique et mouvement plan
Au cours d'un mouvement à force centrale, la trajectoire est plane : le point M se déplace dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_M^O$ passant par O.

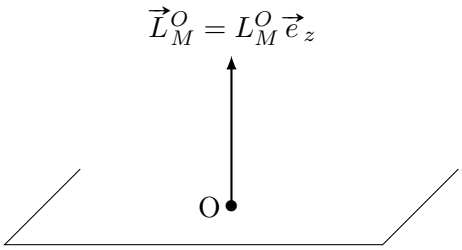
Astuce pratique :
Les conditions initiales, sur $\overrightarrow{OM}(t=0)$ et $\vec{v}(t=0)$ déterminent entièrement le plan du mouvement.

▶ Constante des aires

Quelle conclusion tirer de L_M^O =constante.

On note (Oxy) le plan du mouvement. L'axe (Oz) est donc défini par le vecteur $\vec{L}_M^O$. On utilise naturellement les coordonnées polaires dans ce plan.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$



Le moment cinétique de M en O est par définition

$$\vec{L}_M^O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Comme $\vec{L}_M^O$ est constant alors sa norme l'est aussi

$$mr^2\dot{\theta} = \text{ constante } = mC$$

Propriété. Constante des aires
Lors d'un mouvement dans un champ de force centrale, la quantité

$$C = r^2\dot{\theta}$$

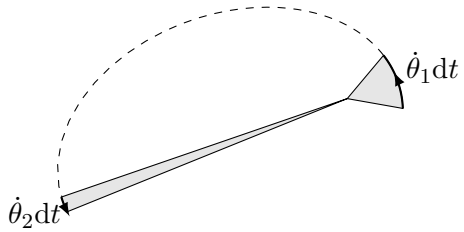
est une constante, appelée la **constante des aires**.

Implications

1. le signe de $\dot{\theta}$ est constant : le point M tournera toujours dans le même sens
2. si le rayon diminue alors la vitesse angulaire augmente et inversement.
   Attention ! Cela ne veut pas dire que la vitesse augmente !!

▶ Loi des aires

Avec les mains :



Pendant un temps $\mathrm{d}t$, le point mobile balaie un angle $\dot{\theta}\mathrm{d}t$ ce qui définit une aire

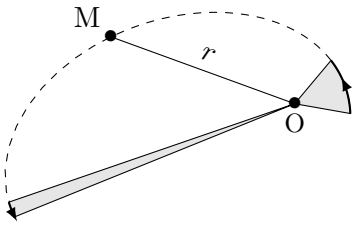
$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{r^2}{2}\dot{\theta}\mathrm{d}t$$

> ***Remarque :*** *Pour s'en rappeler : aire d'un cercle πr^2 = l'aire d'un arc de cercle d'angle 2π*

Comme $r^2\dot{\theta}$ est constant, pendant une même durée le point balaie des aires égales.

Propriété. Deuxième loi de Kepler
On aboutit à la **loi des aires** ou **deuxième loi de Kepler** qui indique que pendant des durées égales, le vecteur position balaye des aires égales.

"avec les mains" : plus on est proche (r petit) plus on tourne vite ($\dot{\theta}$ grand).



1.3 Force centrale conservative

A quelle condition une force centrale est conservative ?
Il existe pour cela une énergie potentielle E_p telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p \ \Rightarrow\ F(r,\theta,z)\vec{e}_r = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r + \vec{0}$$

Pour cela $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}$ et $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}$ sont nuls : l'énergie potentielle et donc la force ne dépend que de r.

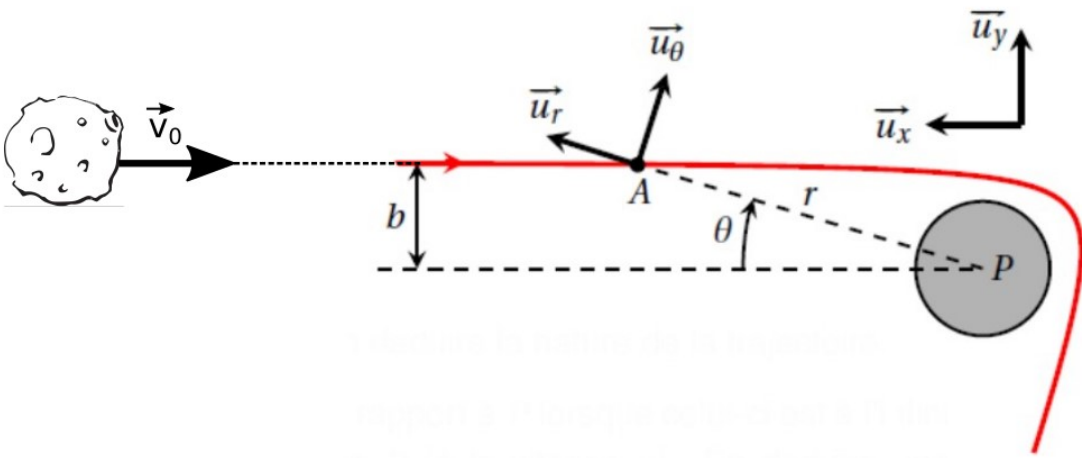
Propriété. Force centrale conservative
Une force centrale conservative ne dépend que du rayon r :

$$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$$

Exemple 2 : Dire pour chacun des forces suivantes si elle est conservative et si c'est le cas donner son énergie potentielle.

- $\vec{F} = F_0\vec{e}_r$
  OUI : $E_p = F_0 r + K$
- $\vec{F} = \mathcal{G}\frac{M_1M_2}{r^2}\vec{e}_r$
  OUI : $E_p = \mathcal{G}\frac{M_1M_2}{r} + K$
- $\vec{F} = F_0\cos\theta\vec{e}_r$
  NON

Exemple 3 : ***RIP les dinosaures***
Un astéroïde A de masse m arrive de l'infini avec une vitesse $v_0 = 2\text{km.s}^{-1}$ (paramètre d'impact $b = 3000\text{km}$) par rapport à la Terre de centre P.



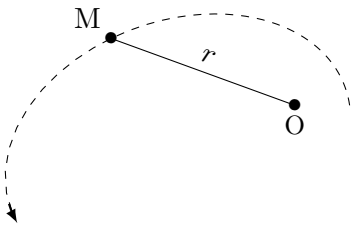
1. *Exprimer la force d'interaction gravitationnelle entre la Terre et l'astéroïde. Est-ce une force centrale conservative ?*
2. *Justifier que le mouvement de l'astéroïde est plan et montrer que la grandeur $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.*
3. *Evaluer la constante des aires C*
4. *Exprimer le moment cinétique de l'astéroïde par rapport au centre de la Terre lorsque celui-ci est à une distance minimale r_{min} de P en fonction de v sa vitesse en ce point et r_{min}.*
5. *En déduire une expression de la vitesse de l'astéroïde lorsqu'il passe le plus près de la Terre.*

CORRECTION

1. Force d'interaction : $\vec{F}_{\mathcal{G}} = -\mathcal{G}\dfrac{mM_T}{r^2}\vec{e}_r$. C'est bien une force centrale, de centre de force P, le centre de la Terre. Elle est conservative, d'énergie potentielle $E_p = -\mathcal{G}\dfrac{mM_T}{r}$.
2. La force étant centrale, son moment par rapport au point P est nul donc par application du TMC, le moment cinétique de l'astéroïde par rapport P est constant. Deux conséquences :
   ▷ le mouvement est plan donc $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ (pas de $\vec{e}_z$)
   ▷ constante des aires :
   $$\vec{L}_M^O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$
   $\vec{L}_M^O$ étant constant, $r^2\dot{\theta}$ est constant, noté C constante des aires.
3. On évalue C à l'aide de la valeur de $\vec{L}_M^O$ en $t = 0$.
   $$\vec{L}_M^O(0) = \overrightarrow{OM}(0) \wedge m\vec{v}_0 = mbv_0 \text{ donc } C = bv_0$$
4. Lorsque l'astéroïde passe au plus près de la Terre, le rayon r est minimal donc $\dot{r}[r = r_{\min}] = 0$. Finalement :
   $$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r_{\min}\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r_{\min}\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{L}_M^O = mr_{\min}^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$
   Comme $v[r_{\min}] = r_{\min}\dot{\theta}$ alors $\vec{L}_M^O = mr_{\min}v\vec{e}_z$
5. Par conservation $C = bv_0$ et $C = r_{\min}v$ donc $v = \dfrac{b}{r_{\min}}v_0$.
   Comme $b > r_{\min}$, l'astéroïde accélère au passage de la Terre.

1.4 Energie potentielle effective

On considère le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale conservative $\vec{F}$ qui découle d'une énergie potentielle $E_p(r)$.
Le mouvement est plan, on décrit sons mouvement à l'aide d'une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



Comment introduire l'énergie potentielle effective ?

Le système étant soumis uniquement à une force conservative, son énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_p(r) + E_c(r, \dot{\theta}) \text{ constante}$$

On voudrait étudier le mouvement du point M à l'aide d'un graphe énergétique.
Problème : on ne sait étudier ce genre de système que si le mouvement possède un seul degré de liberté. Ici il y a deux degrés de liberté : r et θ.

Calculons l'énergie cinétique du système.

▷ vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$
▷ vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

La vitesse instantanée s'écrit donc : $v(t) = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$. L'énergie cinétique est donc :

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$$

Le mouvement étant à force centrale, la grandeur $r^2\dot{\theta}$ est constante, notée C la constante des aires. On a donc :

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

En remplaçant dans l'énergie cinétique on a :

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\frac{C}{r^2})^2\right) \;\Rightarrow\; E_c = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2}$$

Finalement l'énergie mécanique s'écrit comme :

$$E_m = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$$

La variable θ a disparu ! Tout se passe comme si le système était à un seul degré de liberté r avec :

▷ une énergie cinétique effective : $E_{c,eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$
▷ une énergie potentielle effective : $E_{p,eff} = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$

Propriété. Energie potentielle effective
L'étude énergétique d'un mouvement à force centrale conservative à 2 dimensions est équivalent à l'étude d'un mouvement à 1 dimension le long de la coordonnée r, en remplaçant l'énergie potentielle par une énergie potentielle effective :

$$E_{p,eff} = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$$

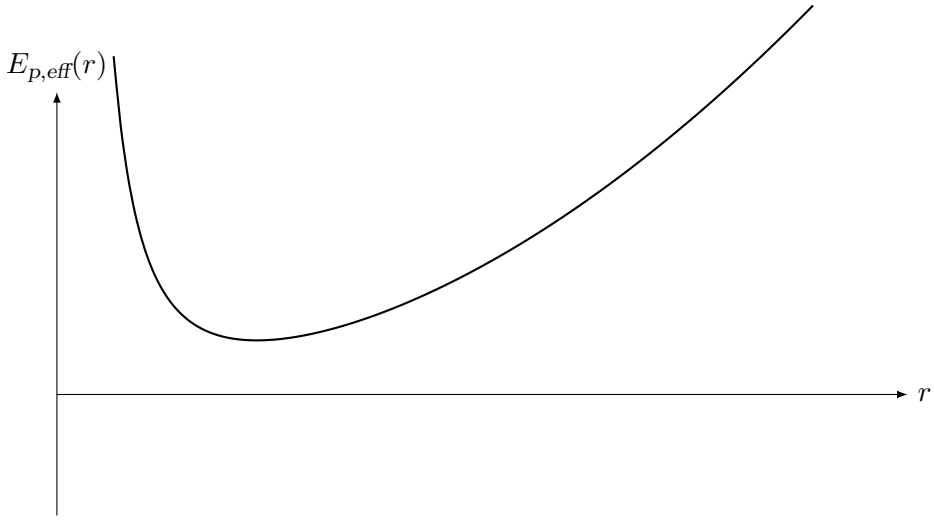
C'est très pratique pour discuter :

▷ les états libres ou liés
▷ les position d'équilibre stable ou instable

Attention ! Ce n'est pas parce qu'elle a disparu que la variable θ n'existe plus : le système continue de tourner ! ! On ne discute ici que l'évolution du rayon r.

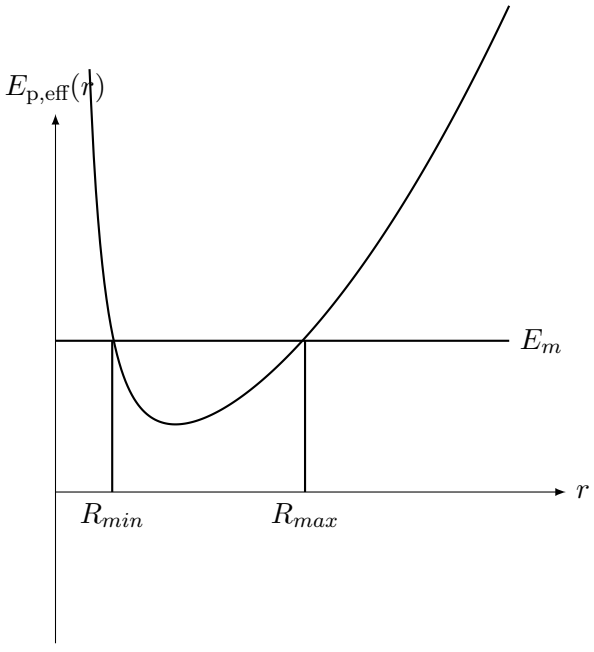
Exemple 4 : ***Etat d'équilibre stable***

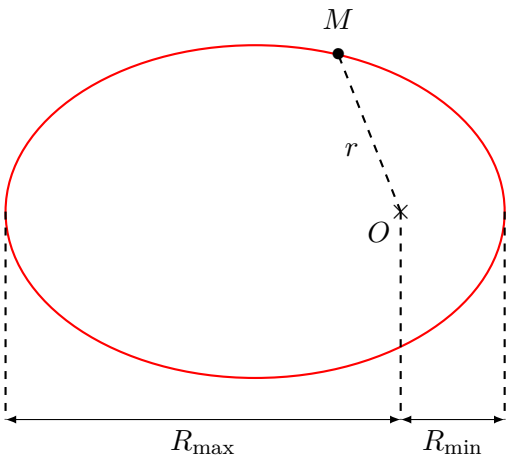
1. *Sur le graphe suivant d'énergie potentielle effective, repérer la position d'équilibre stable. Quelle est la trajectoire de la particule lorsqu'elle se trouve dans cette position d'équilibre ?*
2. *Justifier que la particule ne peut pas être dans un état libre. En déduire alors la forme schématique d'une trajectoire quelconque.*



CORRECTION

1. La position d'équilibre stable correspond au minimum de l'énergie potentielle. Dans ce cas de figure, le rayon r de la trajectoire est fixée **mais** la particule possède une vitesse angulaire : la trajectoire est donc circulaire.
2. Quelle que soit l'énergie initiale de la particule, son énergie mécanique croisera toujours la courbe de l'énergie potentielle. La trajectoire est alors un mouvement lié, r variant entre les deux valeurs extrémales possibles **tout en continuant à tourner autour du centre de la trajectoire**.





2 Force Newtonienne et énergie potentielle effective

2.1 Définition et énergie potentielle

Définition. Force newtonienne
Une force centrale est dite *newtonienne* si elle est de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$$

C'est une force conservative. Calculons son énergie potentielle $E_p(r)$.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = \frac{K}{r^2} \ \Rightarrow\ E_p(r) = -\frac{K}{r} + C$$

On prend généralement la constante nulle.

Propriété. Energie potentielle
Une force newtonienne est une force conservativce d'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{K}{r}$$

en prenant l'origine de potentielle à $r \to +\infty$.

▶ Exemple :force gravitationnelle et force électrostatique

Deux cas de force newtonienne sont très souvent rencontrés :

▷ l'interaction attractive gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 avec

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r \ \text{ donc } \boxed{K = \mathcal{G}m_1m_2}$$

▷ l'interaction électrostatique entre deux charges q_1 et q_2 avec

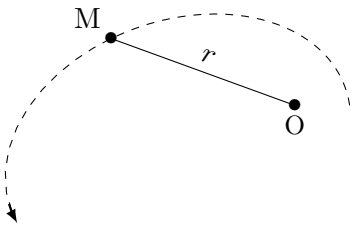
$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \ \text{ donc : } \boxed{K = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}}$$

Cette force est répulsive ou attractive selon les signes respectifs des charges.

Attention ! *Nous allons construire la suite du cours à travers un exemple. Il conviendra de bien faire attention entre ce qui relève du cours (et donc à connaître) et ce qui relève de l'exercice (et donc à savoir refaire).*
Tous les résultats seront transposables aux forces Newtonienne.

2.2 Étude d'une trajectoire et énergie potentielle effective

On s'intéresse au mouvement d'un satellite de masse m autour de la Terre de masse M_T. On repère la position du satellite par le point M et le centre de la Terre par le point O.



On se place dans un référentiel géocentrique, supposé galiléen : le centre de la Terre est fixe et est choisie comme origine du repère.

▶ Vecteurs cinématiques

▷ Position $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{e}_r$
▷ Vitesse $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

▶ Utilisation du TMC

Le satellite est soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle de la Terre :

$$\vec{F}_{\mathcal{G}} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\vec{e}_r$$

C'est une force centrale de centre de force O : son moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_M^O$ est nul. On en déduit alors grâce au TMC que :
▷ le mouvement est plan
▷ le moment cinétique est constant

$$\vec{L}_M^O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

Par conséquent $r^2\dot{\theta}$ est constant, noté C la constante des aires : $r^2\dot{\theta} = C$.

▶ Analyse énergétique : énergie potentielle effective

▷ **énergie cinétique :**

$$E_c = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r} + (r\dot{\theta})^2\right)$$

Comme $C = r^2\dot{\theta}$ on a :

$$E_c = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right)$$

▷ **énergie potentielle**

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\vec{e}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p \Rightarrow \mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2} = \frac{\text{d}E_p}{\text{d}r}$$

soit : $E_p(r) = -\mathcal{G}\dfrac{mM_T}{r} + K$ avec $K = 0$ (on prend l'origine des potentiels à $r \to +\infty$).

▷ **énergie potentielle effective**
Le système est conservatif, l'énergie mécanique se conserve

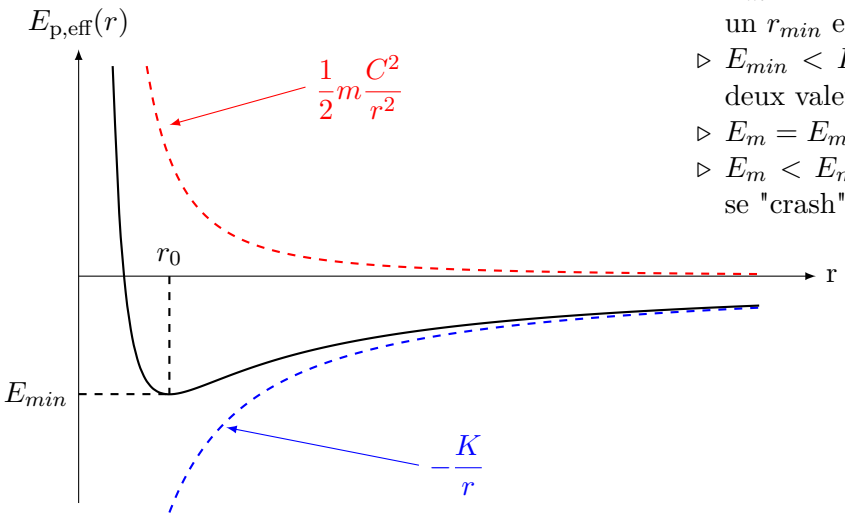
$$E_m = E_c + E_p = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \mathcal{G}\frac{mM_T}{r}$$

$$E_m = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{mC^2}{2r^2} - -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r}}_{E_{p,\text{eff}}}$$

On a alors une énergie potentielle effective : $E_{p,\text{eff}} = \dfrac{mC^2}{2r^2} - -\mathcal{G}\dfrac{mM_T}{r}$.

▶ Analyse énergétique : différentes trajectoires possibles

Pour analyser les trajectoires possibles, on revient à ce qu'on sait faire : étudier les position d'équilibre, les états liés ou de diffusion, ...



- ▷ $E_m > 0$: état de diffusion, le rayon varie entre un r_{min} et $+\infty$.
- ▷ $E_{min} < E_m < 0$: état lié, le rayon varie entre deux valeurs $r_1 < r < r_2$.
- ▷ $E_m = E_{min}$: état lié et r ne varie pas
- ▷ $E_m < E_{min}$: trajectoire impossible, le système se "crash" sur la Terre

Attention ! Il ne faut pas oublier que dans chaque cas l'angle θ varie : le point M voit son rayon rr évoluer **tout en continuant de tourner autour de la Terre !**

3 Mouvement d'un satellite autour de la Terre

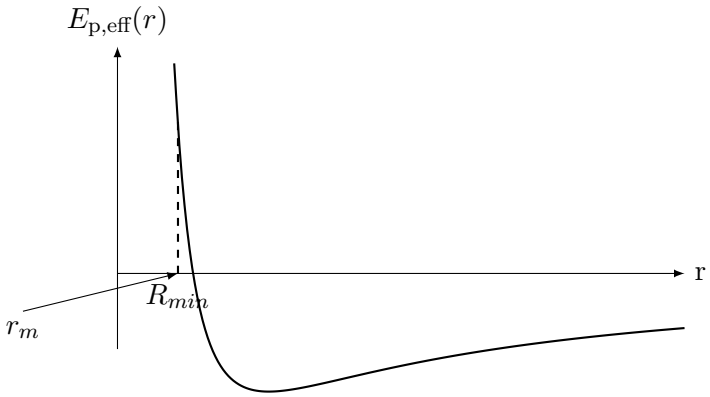
Astuce fondamentale du chapitre : ne jamais écrire d'équation différentielle !
Pour cela on a :

- ▷ mouvement circulaire : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \dfrac{v^2}{R}\vec{e}_r$
- ▷ TMC et conservation du moment cinétique
- ▷ Conservation de l'E_m et étude de graphe énergétique
- ▷ loi de Kepler

Nous allons étudier en détails ces différentes trajectoire. A chaque fois il faudra savoir :

1. *relier la nature de la trajectoire à l'énergie mécanique (positive, négative, ...)*
2. *obtenir des informations sur la vitesse grâce à la l'expression de E_m et $E_{p,eff}$*
3. *faire un peu de géométrie sur les ellipses*
4. *comprendre et savoir refaire l'exercice classique associé*

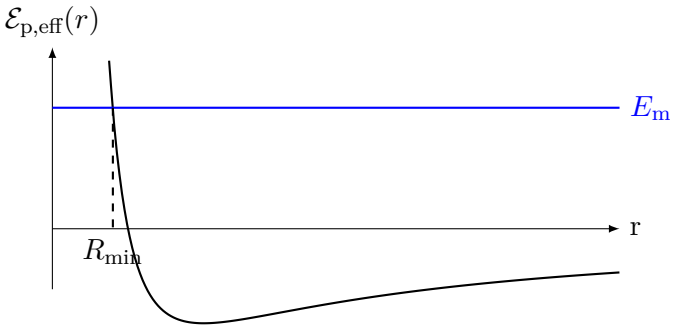
3.1 Etat de diffusion : $E_m > 0$ ∼ trajectoire d'une comète

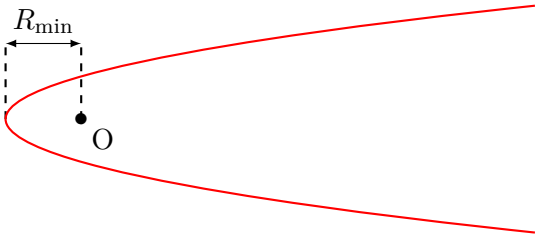


Le point M peut donc se déplacer entre $r = R_{min}$ et $r = +\infty$: c'est un état de diffusion.

Propriété.
Dans le cas d'une force newtonienne attractive, si $E_\mathrm{m} > 0$, le mouvement est un état de **diffusion**.

La trajectoire du satellite est alors une hyperbole dont le centre de la Terre est le foyer.





Orientation de $\vec{v}$
A priori $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$: elle n'est pas perpendiculaire à $\vec{e}_r$. Lorsque le rayon de la trajectoire est minimal, $\dot{r} = 0$ et donc :

$$\vec{v} = R_{min}\dot{\theta} \quad \text{et} \quad C = R_{min}^2\dot{\theta} = \pm R_{min}v[R_{min}]$$

Propriété. Vitesse à $r = R_{min}$
La vitesse est perpendiculaire à $\vec{e}_r$ et $C = R_{min}v[R_{min}]$.

▶ Deux cas à connaître de trajectoire :

▷ une comète qui arrive depuis une autre galaxie avec une vitesse v_0.
Quand elle est très loin de la terre : $r = +\infty$ donc :

$$E_m = \underbrace{E_p(r=+\infty)}_{\sim 1/r=0} + E_c = \frac{m}{2}v^2 > 0$$

.

▷ un satellite qu'on lance depuis la Terre avec une vitesse trop grande.

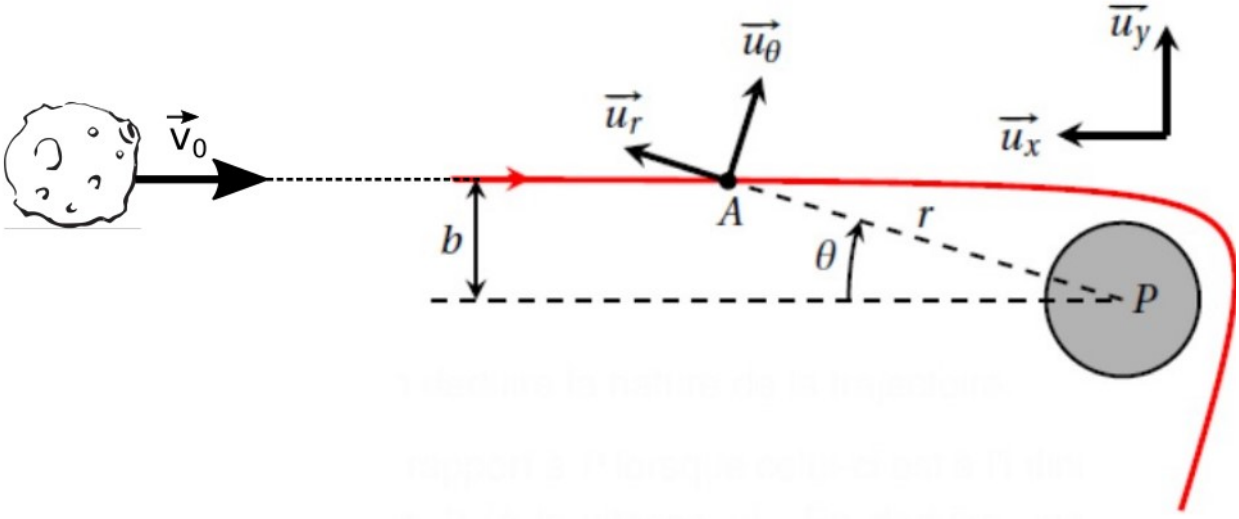
Définition. Vitesse de libération
La vitesse de libération est la vitesse minimale à conférer à un objet situé sur Terre pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre.

> ***Exemple 5 :*** *Calculons la vitesse de libération de ..... (mettre ici le nom de la personne à qui vous souhaiter faire visiter Jupiter).*

▶ Exercice classique : adieux les dinos !

Application 1 :

Un astéroïde A de masse m arrive de l'infini avec une vitesse $v_0 = 2\text{km}.s^{-1}$ (paramètre d'impact b) par rapport à la Terre de centre P.

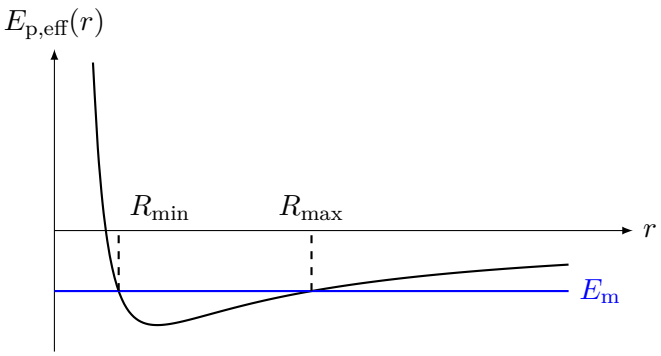


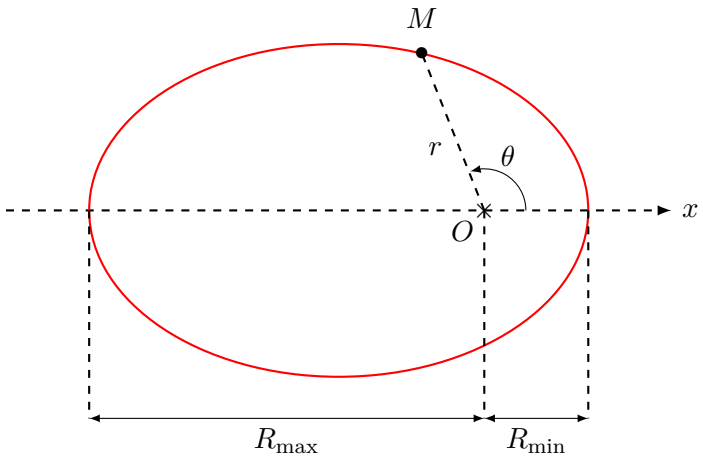
1. *Donner la nature de la trajectoire de l'astéroïde.*
2. *Justifier que la grandeur C, appelée constante des aires, est constantes. On donnera son expression en fonction de m, b, v_0*
3. *A l'aide de la conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique, donner deux expression liant $\widetilde{r}$ et $\widetilde{v}$ le rayon et la vitesse de l'astéroïde lorsqu'il passe au plus près de la Terre.*
4. *En déduire une expression de $\widetilde{r}$ et $\widetilde{v}$ en fonction de b, v_0 et r_{min}*
5. *A quelle condition l'astéroïde entre-t-il en contact avec la Terre ? Estimer une valeur minimale du paramètre d'impact de la comète qui causa la fin des dinosaures.*

3.2 Etat lié : $E_m < 0 \sim$ trajectoire d'un satellite

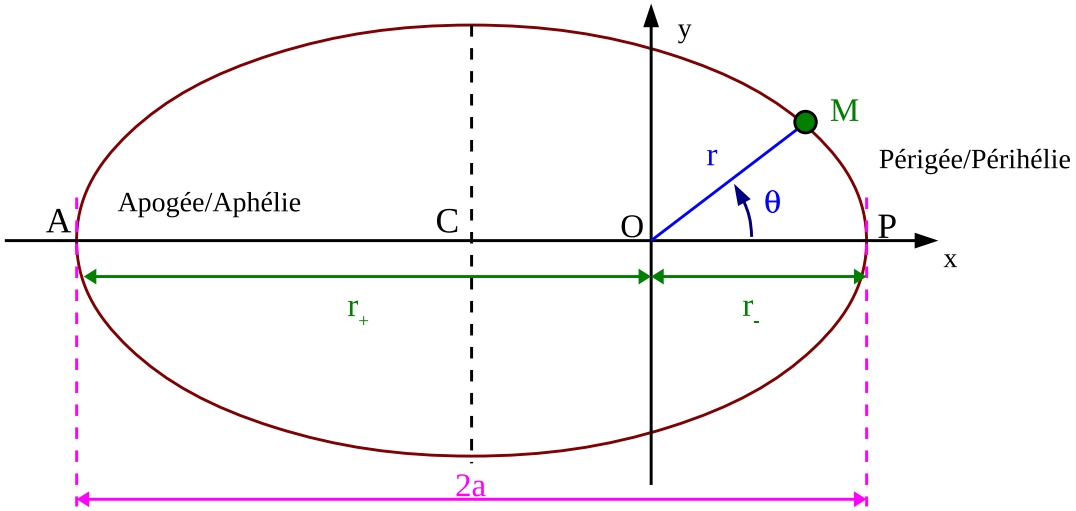
Propriété.
Dans le cas d'une force newtonienne attractive, si $E_\text{m} < 0$, le mouvement est un état **lié**.

Le mouvement reste confiné entre $r = R_\text{min}$ et $r = R_\text{max}$: la distance entre la Terre et le satellite varie entre ces deux valeurs. La trajectoire du satellite est alors une ellipse dont un des foyers est le centre de la Terre.





► Quelques mots sur les ellipses



Propriété. Vitesse à l'apogée et au périhélie
$\dot{r} = 0$ donc $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{e}_r$ et $v_A = \pm r_A \dot{\theta}$

Une ellipse est un cercle dont le rayon varie en fonction de l'angle qu'il fait avec une droite de référence : $r = r(\theta)$. L'expression générale d'une ellipse est :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Le nombre e est appelé l'excentricité. Pour une ellipse $0 < e < 1$. Plus e est petit, plus la trajectoire elliptique se rapproche d'une trajectoire circulaire pour laquelle $e = 0$.

Définition. Grand axe
On appelle grand axe, de longueur $2a$, la distance entre l'aphélie et le périgée. La longueur a est appelée demi grand axe.

Propriété. Energie mécanique d'une trajectroire elliptique
Dans un champ de force newtonienne, une particule ayant une trajectoire elliptique de demi grand-axe a possède une énergie mécanique :

$$E_m = -\frac{K}{2a}$$

- ▷ $K = \mathcal{G}mM$ pour l'interaction gravitationnelle
- ▷ $K = -\frac{q_1 q_1}{4\pi\varepsilon_0}$ pour l'interaction entre charges

Pour une trajectoire elliptique de demi grand-axe a de notre satellite on a :

$$-\mathcal{G}\frac{mM_T}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{M_0 m}{r}$$

Varie le long de sa trajectoire la vitesse v et son rayon r

Attention ! au signe "-" ! ! Les deux énergies, cinétiques et potentielles, sont des fonctions croissantes de r et v.

Aphélie et périgée
- ▷ au niveau de l'aphélie : $r = r_{max}$ et la vitesse est minimale
- ▷ au niveau du périgée : $r = r_{min}$ et la vitesse est maximale

▶ Période de révolution et troisième loi de Kepler

Propriété. Troisème loi de Kepler
Pour un point matériel en orbite elliptique, le carré de la période T de révolution est proportionnelle au cube du demi grand axe a via :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$$

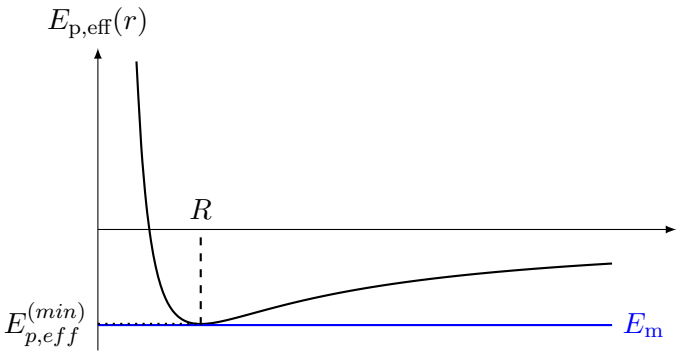
avec M la masse de l'astre autour duquel orbite le système.

▶ Exercice classique

Application 2 : La trajectoire de la Terre autour du soleil est une ellipse. Le périhélie P est à la distance $r_p = 0,983$ua du centre du soleil, où l'unité astronomique 1ua $= 1,496.108$ km. La période de révolution (année sidérale) vaut environ 365,25 jours solaires.

1. *Calculer le demi grand-axe a de l'orbite terrestre.*
2. *Calculer la position de l'aphélie A ainsi que la vitesse orbitalaire de la Terre en P et A dans le référentiel héliocentrique.*
3. *Calculer également l'excentricité e de la trajectoire de la Terre, définie par $e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$*
4. *Conclure quant à la nature de la trajectoire de la Terre autour du soleil.*

3.3 Trajectoire circulaire



Un cas particulier de trajectoire elliptique est la trajectoire circulaire où le rayon ne varie pas $r = R$.

Pour que cela soit possible, l'énergie mécanique du système doit être minimale : le système est alors à sa position d'équilibre et le rayon ne varie pas. On a bien une trajectoire circulaire.

Propriété. Energie et trajectoire circulaire
La trajectoire circulaire d'une particule dans un champ de force newtonien correspond à la trajectoire d'énergie mécanique minimale.

▶ Approche par la trajectoire

Cette partie est typiquement un raisonnement qu'on vous demandera de refaire en exercice. Il s'agit donc de bien comprendre !

Un satellite possède une orbite circulaire de rayon 600km (station ISS). Montrons que sa vitesse est constante et cherchons sa valeur.

Pour une trajectoire circulaire le rayon est constant $r = R$. On a alors, dans un repère polaire de centre O, centre de la Terre :
▷ position : $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$
▷ vitesse : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
▷ accélération : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

Astuce pratique :
on garde l'habitude pour les trajectoire circulaire d'écrire l'accélération "à la Frénet" !!

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$$

Le PFD nous donne :

$$m\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{R^2}\vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{v^2}{R} = \mathcal{G}\dfrac{mM_T}{R^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

On obtient alors que :
▷ la vitesse est constante : cela est due au fait que la force soit centrale.
Attention ! Cela est vraie unniquement parce que la trajectoire est circulaire !!
▷ on a une vitesse v qui décroit avec le rayon de l'orbite :

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R}}$$

On remarque également que la masse de la particule ne joue pas : si on se place sur la même orbite que l'ISS, on aura la même vitesse qu'elle. C'est pratique !

| ***Application 3 :*** *Retrouver la troisième loi de Kepler pour une trajectoire circulaire.*

▶ Retour à l'énergie mécanique

En réinjectant les résultats précédents dans l'énergie mécanique on a :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{R}$$

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{\mathcal{G}M_0 m}{2R} - \frac{\mathcal{G}M_0 m}{R}$$

$$E_{\mathrm{m}} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2R}$$

On remarque alors que :
▷ l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont constantes puisque la vitesse et le rayon sont constants
▷ l'énergie mécanique est égale à l'opposée de l'énergie cinétique $E_{\mathrm{m}} = -E_c$
▷ $E_p = -2E_c$
Ce résultat particulier s'appelle le **théorème du Viriel**.

Propriété. Energie mécanique d'une trajectoire elliptique
Dans un champ de force newtonienne, une particule ayant une trajectoire circulaire de rayon R possède une énergie mécanique :

$$E_m = -\frac{K}{2R}$$

▷ $K = \mathcal{G}mM$ pour l'interaction gravitationnelle
▷ $K = -\dfrac{q_1 q_1}{4\pi\varepsilon_0}$ pour l'interaction entre charges

3.4 Mise en orbite d'un satellite

On considère un satellite de masse m à la surface de la Terre. Grâce à une fusée, on peut lui communiquer une vitesse v_0 orthogonale au rayon terrestre. On se demande quelle va être sa trajectoire ?

La trajectoire du satellite sera une conique dont l'un des foyers est le centre de la Terre. On en distingue 4, par ordre de vitesse initiale croissant :
▷ une ellipse avec $R_T = r_A$, rayon de l'apogée
▷ un cercle avec $r = R_T$
▷ une ellipse avec $R_T = r_P$, rayon du périgée

▷ une hyperbole : le satellite ne revient jamais sur Terre

Définition. Première vitesse cosmique
La **première vitesse cosmique** v_c est la vitesse minimale à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite circulaire autour de la Terre.

Définition. Deuxième vitesse cosmique,
Également nommée **vitesse de libération**, elle correspond à la vitesse minimale à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir l'éloigner définitivement de la Terre.

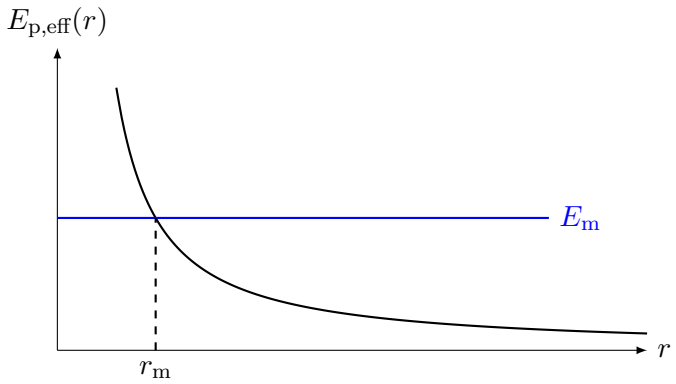
Résumons en un schéma :

Exemple 6 : Calculons les deux vitesses cosmique.

3.5 Force répulsive ($K < 0$)

Ce cas de figure n'est pas possible avec l'attraction gravitationnelle qui est forcément une force attractive. Néanmoins, entre deux particules chargées portant une charge de même signe, la force est répulsive. A ce moment là :

$$E_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} > 0$$



Propriété.
Dans le cas d'une force newtonienne répulsive, quelle que soit la valeur de l'énergie mécanique, le mouvement est un état **diffusion**.

4 Quelques applications à la gravitation

4.1 Satellite géostationaires

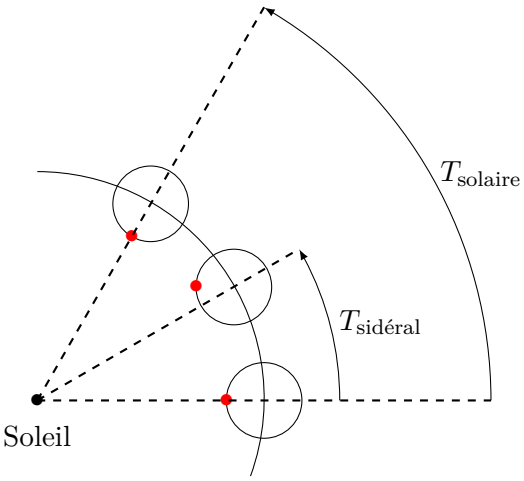
Définition. **Un satellite géostationnaire** est un satellite qui reste constamment au dessus d'un même point de la surface terrestre. Il apparaît donc immobile pour un observateur terrestre.

Pour cela, il doit respecter trois conditions :
- ▷ être dans le plan de l'équateur
- ▷ avoir une trajectoire circulaire
- ▷ avoir une période de révolution synchrone avec celle de la Terre : $T \simeq 24\text{h}$

Jour solaire et jour sidéral

- ▷ $T_{\text{sidéral}}$ correspond au temps mis par la Terre pour faire un tout sur elle-même soit 23h 56 min.
- ▷ T_{solaire} correspond au temps entre deux passage du soleil au zénith soit 24h 00 min.

Une révolution complète de la Terre autour du Soleil représente 365,25 jours solaires par an et 366,25 jours sidéraux.



Dans la majorité des cas, on ne fait pas la distinction entre $T_{\text{sidéral}}$ et T_{solaire} et on prend $T_{\text{sidéral}} = T_{\text{solaire}} = T = 24\text{h}$.

Exemple 7 : Donnons l'altitude z d'un satellite géostationnaire.

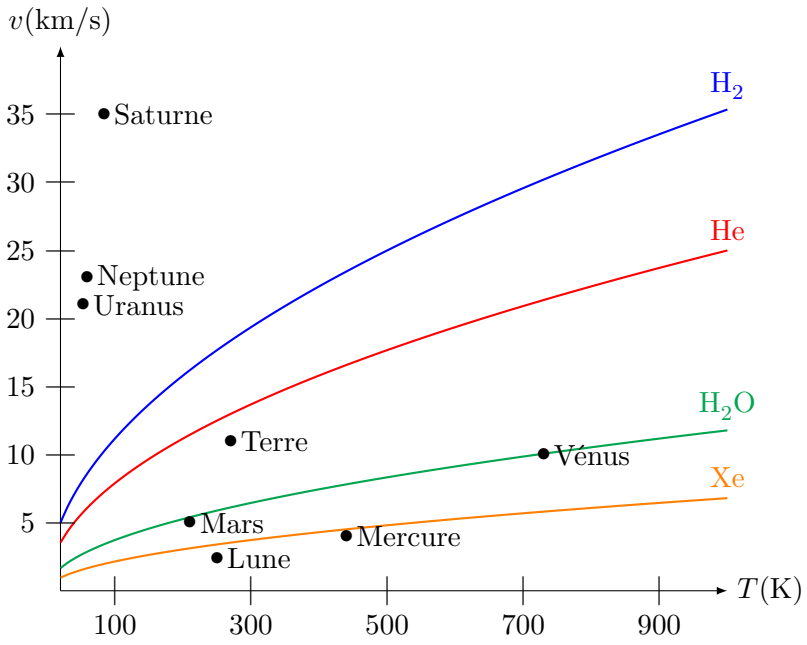
4.2 Atmosphère des planètes

Une molécule m est en mouvement dans l'atomsphère terrestre à cause de l'agitation thermique . Sa vitesse est alors :

$$v \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

Si v est supérieure à la vitesse de libération, la particule échappera à l'attraction terrestre : la planète ne pourra pas alors avoir dans son atmosphère cette molécule.

On représente ci-dessous les vitesses des molécules de 4 gaz classique en fonction de la température. On peu alors placer sur le diagramme, suivant la température de l'atmosphère de la planète, la vitesse de libération de cette dernière.



On remarque alors que sur la Terre :

- ▷ les vitesses du xénon et de l'eau sont inférieures à la vitesse de libération : ces molécules peuvent être présente dans notre atmosphère
- ▷ les vitesses de l'hélium et du dihydrogène sont supérieures à la vitesse de libération : ces molécules ne peuvent pas être présente dans notre atmosphère

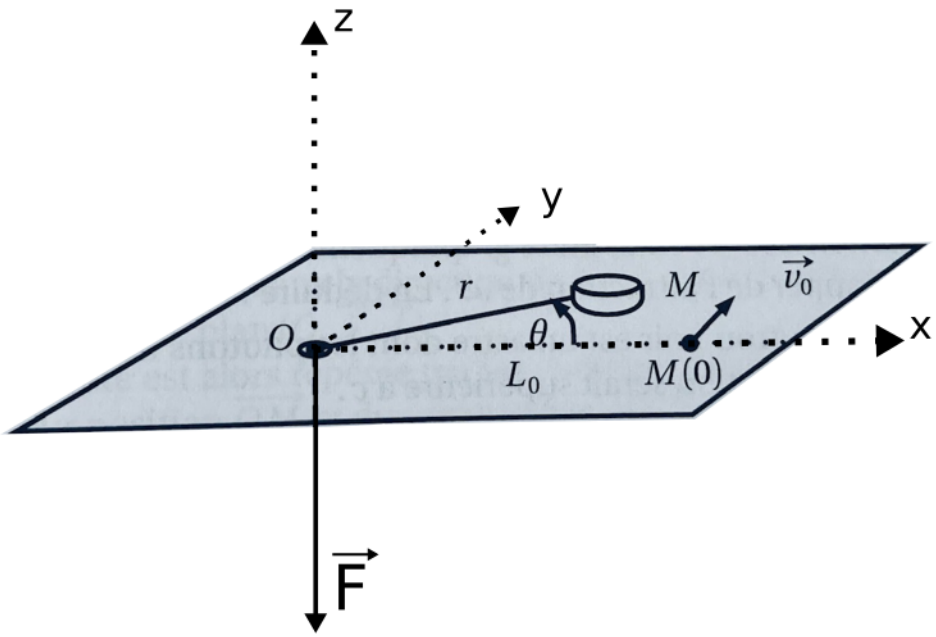
μDm

Mouvement à force centrale

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Palet sur coussin d'air

Un palet auto-porteur M de masse m peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal $(Oxyz)$. Un fil lui est attaché et on fait passer le fil par un trou percé dans le plan au niveau de l'origine O. On peut alors agir sur le mobile en tirant sur le fil. La position du mobile est repérée par les coordonnées polaires r et θ.



On lance le palet depuis la position angulaire $\theta = 0$ et à une distance L_0 du point O, avec un vecteur vitesse initial $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_\theta - U_0\vec{e}_r$. Tout au long du mouvement on tire sur le fil avec une force $\vec{F} = -F_0\vec{e}_z$ constante. On suppose que le fil transmets l'intégralité de la force.

1. Le mouvement est-il à force central ? Montrer que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. Comment appelle-t-on cette constante ?
2. A l'aide des conditions initiales, exprimer C.
3. Le mouvement est-il à conservatif ? Si oui, donner alors l'énergie potentielle associée.
4. Montrer que l'énergie mécanique du mobile peut s'écrire sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

avec une fonction $E_{p,eff}$ qu'on exprimera en fonction des données du problème.

5. Représenter sur votre feuille l'allure de $E_{p,eff}$.
Justifier alors que le mouvement de la masse est forcément un état lié.

On suppose pour la suite de l'étude que le mouvement de la masse est circulaire de rayon L_0.

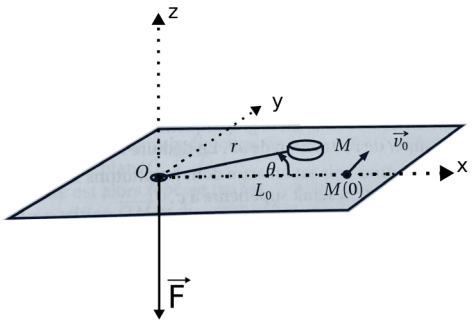
6. Placer L_0 sur le graph précédent.
7. Montrer que le mouvement est uniforme. Exprimer la vitesse v de la trajectoire en fonction de F_0, L_0 et m.
8. Donner la période de révolution T du mobile en fonction de L_0, m et F_0.

μDm

Mouvement à force centrale

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Palet sur coussin d'air



On prend un système de coordonnées polaires.

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
- $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$
- $\vec{a}$ =....

(*à exprimer si seulement on en a besoin via le PFD*)

1. La tension du fil est toujours orientée vers O : c'est une force centrale. Son moment par rapport à O est alors nul : $\mathcal{M}_M^O = 0$.

   A l'aide du théorème du moment cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}L_M^O}{\mathrm{d}t} = 0$ donc $L_M^O = cste$. On calcule :

   $$L_m^O = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) \cdot \vec{e}_z = \left(r\vec{e}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) \cdot \vec{e}_z$$

   Comme $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$ ($\vec{1} \wedge \vec{2} = \vec{3}$) on a $L_m^O = mr^2\dot{\theta}$. On a bien $r^2\dot{\theta}$ =constante C, c'est la constante des airs.

2. On évalue L_M^O à $t = 0$:

   $$L_M^O(0) = \overrightarrow{OM}(0) \wedge \vec{v}(0) \cdot \vec{e}_z = L_0\vec{e}_r \wedge m\left(v_0\vec{e}_\theta - U_0\vec{e}_r\right) \cdot \vec{e}_z = mL_0v_0$$

   Donc $C = L_0v_0$.

3. **Lien Force-énergie potentielle** : $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_p$ donc :

   $$F_0 = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} \Rightarrow E_p = F_0r \quad \text{, origine des potentiel à } r = 0$$

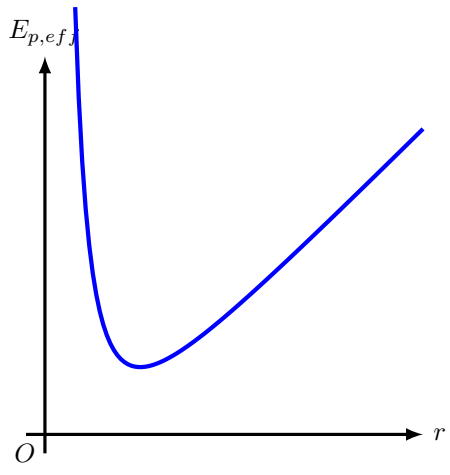
4. On exprime l'énergie mécanique : $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p$ soit :

   $$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + F_0r$$

   comme $r^2\dot{\theta} = L_0v_0$ (constante des aires C) : $\dot{\theta} = \dfrac{L_0v_0}{r^2}$ et donc :

   $$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{L_0^2v_0^2}{r^4} + F_0r = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

   avec $E_{p,eff} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{L_0^2v_0^2}{r^2} + F_0r$



5. On remarque alors que $E_{p,eff}[+\infty] = +\infty$: l'énergie mécanique ne permettra jamais à une particule d'avoir un état de diffusion.

6. La trajectoire circulaire correspond à un "état d'équilibre" pour $E_{p,eff}$: L_0 est donc la valeur de r qui correspond au minimum de $E_{p,eff}$.

7. Pour un trajectoire circulaire $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{L_0}\vec{e}_r + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$.

$$-m\frac{v^2}{L_0} = -F_0 \quad \text{et} \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le mouvement est uniforme v =cst et :

$$v = \sqrt{\frac{F_0 L_0}{m}}$$

8. Période de résolution $T = \dfrac{\text{périmètre}}{\text{vitesse}} = \dfrac{2\pi L_0}{v}$ soit :

$$T = \frac{2\pi L_0}{\sqrt{F_0 L_0}}\sqrt{m} = 2\pi\sqrt{\frac{mL_0}{F_0}}$$

BA-ba de la gravitation

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

On étudie un satellite S de masse m en orbite autour de la Terre. On désigne par $\mathcal{G}$ la constate de gravitation universelle et on appelle r la distance Terre-satellite.

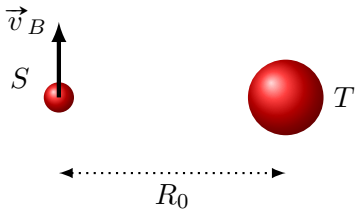
1. Rappeler l'expression de la force de gravitation universelle. Justifier que c'est une force centrale conservative et exprimer son énergie potentielle E_p.
2. Montrer que le mouvement du satellite est plan.
3. Exprimer l'énergie potentielle E_m du satellite en fonction de m, M, $\mathcal{G}$, r, $\dot{r}$, θ et $\dot{\theta}$.
4. Justifier que la grandeur $r^2\dot{\theta}$ est constante, notée C.
5. Montrer alors que l'énergie mécanique du satellite s'écrit comme la somme :

$$E_m = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{p,eff}[r]$$

où $E_{p,eff}[r]$ est une énergie potentielle effective qu'on exprimera en fonction de $\mathcal{G}$, M, m, C et r.

6. Représenter schématiquement le graphe de $E_{p,eff}$ et discuter les trois mouvements possibles du satellite en fonction de la valeur de son énergie mécanique initiale.

Le satellite se trouve en B à une distance R_0 de l'étoile et possède une vitesse v_B perpendiculaire au rayon.



7. Évaluer la constante des aires C.
8. **Mouvement circulaire** : on suppose dans cette question que le mouvement du satellite est circulaire de rayon R_0.
   (a) Montrer que le mouvement est uniforme et donner une expression de sa vitesse v_0.
   (b) Retrouver la troisième loi de Kepler.
9. **Mouvement elliptique** : on suppose qu'elle possède une trajectoire elliptique de demi grand-axe a.
   (a) Montrer que le demi grand-axe a est :

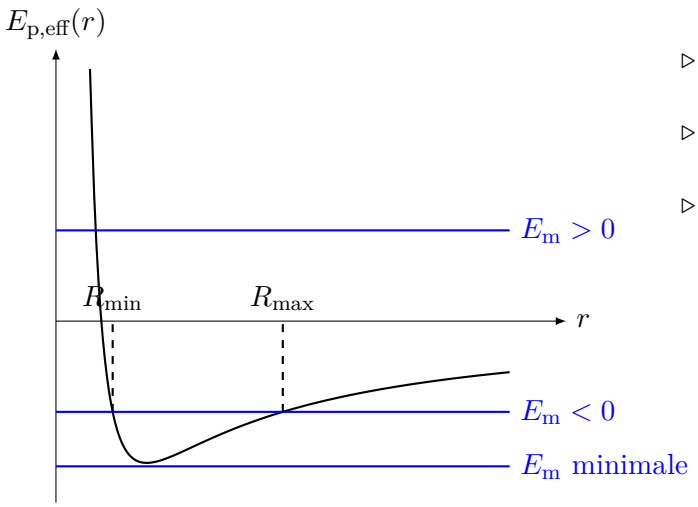
$$a = \frac{\mathcal{G}MR_0}{2\mathcal{G}M - R_0 v_B^2}$$

   (b) Justifier que le satellite se trouve soit à l'apogée, soit au périhélie. Exprimer l'autre rayon particulier en fonction de a et R_0.
   (c) En comparant a et R_0, montrer que le satellite est à l'apogée en B si : $v_B < v_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}\mathcal{M}}{R_0}}$
10. **Mouvement hyperbolique** : montrer que la trajectoire du satellite est un état de diffusion si : $v_B > v_{\text{lim}} = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{G}M}{R_0}}$
11. Sur votre feuille en, représenter les différentes trajectoires du satellite dans les cas : $v_0 > v_{\text{lim}}$; $v_{\text{lim}} > v_B > v_0$; $v_B = v_0$;$v_B < v_0$.

BA-ba de la gravitation

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

1. $\vec{F}_{\mathcal{G}} = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r}\vec{e}_r$. Cette force pointe toujours vers le centre de la Terre, c'est une force centrale.
   Lien force-énergie potentielle : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p$ soit $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = \mathcal{G}\dfrac{mM}{r^2}$ donc $E_p = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r}$.
2. La force d'interaction gravitationnelle est une force centrale de centre O donc son moment de force est nulle. Par théorème du moment cinétique $\vec{L}_M^O$ est constant donc le mouvement est plan.
3. Par définition $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p$. Avec $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ on trouve :
$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$
4. La force d'interaction gravitationnelle étant centrale, $\vec{L}_M^O$ est constant.
$$\vec{L}_M^O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$
   Donc $r^2\dot{\theta}$ est une constante, appelée constante des aires.
5. On remplace $\dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2}$ donc :
$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{C^2}{r^4}\right) - \mathcal{G}\frac{mM}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}}_{E_{p,eff}}$$
6.



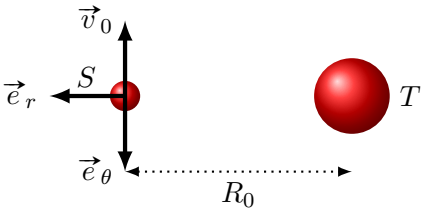
Trois cas :

- ▷ $E_{\text{m}} > 0$: mouvement de diffusion (trajectoire d'une comète), hyperbole
- ▷ $E_{\text{m}} < 0$: mouvement de diffusion (trajectoire d'une planète ou d'un satellite),ellipse
- ▷ E_{m} minimale : mouvement circulaire (cas particulier d'une ellipse), rayon constant

7.

Attention ! Pensez à bien représenter les vecteurs de la base !!

On évalue $\vec{L}_M^O$ en $t = 0$: $\vec{L}_M^O(0) = R_0\vec{e}_r \wedge m(-v_B\vec{e}_\theta) = -mR_0v_B\vec{e}_z$.
On trouve alors $C = -R_0v_B$.



8. **Mouvement circulaire**
   (a) On applique le **PFD** !

$$\overrightarrow{OM} = R_0\vec{e}_r \; ; \; \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ avec } v(t) = \pm R\dot{\theta} \; ; \; \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R_0\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \pm\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R_0}\vec{e}_r$$

   et $\vec{F}_\mathcal{G} = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{R_0^2}\vec{e}_r$. Donc :

$$m\vec{a} = \vec{F}_\mathcal{G} \Rightarrow \begin{cases} -m\dfrac{v^2}{R_0} = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{R_0^2} \\ \pm\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

   On trouve alors une vitesse v constante et $v = \sqrt{\mathcal{G}\dfrac{M}{R_0}}$.

   (b) On calcule la période de révolution $T = \dfrac{2\pi R_0}{v} = 2\pi\dfrac{R_0}{\sqrt{\mathcal{G}M}}\sqrt{R_0}$. On trouve bien :

$$\frac{T^2}{R_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$$

9. **Mouvement elliptique** : le PFD devient inefficace (*ou alors très compliqué à résoudre)* ! Qu'est-ce qui nous reste ?

Méthode en DS. Outils de base de la gravitation

- ▷ **TMC** → la constante des aires : $r^2\dot{\theta}$ est constante, notamment égale en deux points différents de la trajectoire.
- ▷ **PFD** → troisième loi de Kepler $\Rightarrow \dfrac{T^2}{a^3}\dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$ pour tout ce qui concerne les aspects temporels (*on chercher ou on nous donne la période/demi-période de révolution*)
- ▷ **TEM** → l'énergie mécanique des trajectoires :
  - ▷ $E_m > 0$ pour une trajectoire hyperbolique
  - ▷ $E_m = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{2a}$ pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe a, avec $a = \dfrac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$
  - ▷ $E_m = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{2R}$ pour une trajectoire circulaire de rayon R

  Ces énergies de trajectoire sont à comparer avec l'énergie mécanique en un point précis

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

  qui donne un lien entre r et v.

   (a) Pour une trajectoire elliptique de demi grand-axe a :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{r} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2a}$$

   On évalue en $t = 0$: $r = R_0$ et $v = v_0$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{R_0} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2a}$$

On peut alors trouver a :

$$a = \frac{\mathcal{G}MR_0}{2\mathcal{G}M - R_0 v_B^2}$$

(b) Au niveau de l'apogée et du périhélie, le rayon est maximale ou minimale. Donc $\dot{r} = 0$ et par conséquent :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ la vitesse est suivant } \vec{e}_\theta$$

En ces deux points (apogée en périhélie), la vitesse est perpendiculaire au rayon (suivant $\vec{e}_\theta$). Comme c'est le cas en $t = 0$, on est soit à l'apogée soit au périhélie $R_0 = r_{min}$ ou $R_0 = r_{max}$. Appelons r l'autre rayon :

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{R_0 + r}{2} \Rightarrow r = 2a - R_0 = \frac{2\mathcal{G}MR_0}{2\mathcal{G}M - R_0 v_B^2} - R_0 = \frac{2\mathcal{G}MR_0 - 2\mathcal{G}MR_0 + R_0^2 v_B^2}{2\mathcal{G}M - R_0 v_B^2}$$

On obtient : $r = \dfrac{R_0^2 v_B^2}{2\mathcal{G}M - R_0 v_B^2}$

(c) Le satellite est à l'apogée en B si $R_0 > r$ donc si :

$$\frac{R_0^2 v_B^2}{2\mathcal{G}M - R_0 v_B^2} > R_0 \Rightarrow R_0 v_B^2 > 2\mathcal{G}M - R_0 v_B^2 \Rightarrow v_B^2 < \frac{\mathcal{GM}}{R_0}$$

En comparant a et d, montrer que le satellite est à l'apogée en B si :$v_B < \sqrt{\dfrac{\mathcal{GM}}{R_0}}$

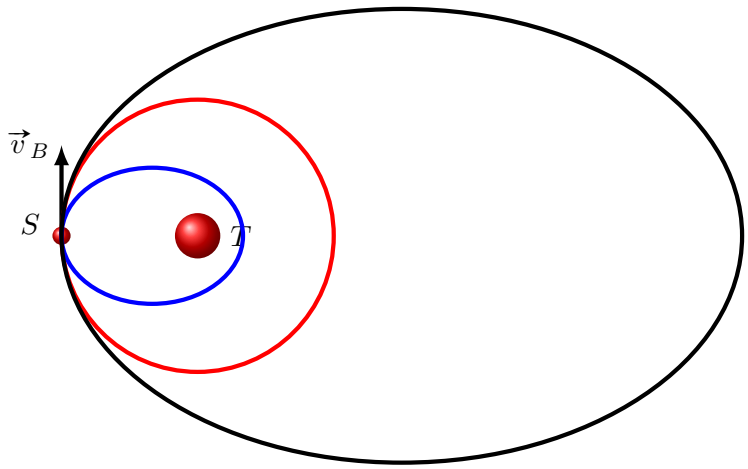
10. Pour une trajectoire hyperbolique :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{r} > 0$$

On évalue en $t = 0$: $r = R_0$ et $v = v_0$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{R_0} > 0 \Rightarrow v_B^2 > \frac{2\mathcal{G}M}{R_0}$$

11. ▷ $v_0 > v_{\text{lim}}$: trajectoire hyperbolique, le satellite échappe à l'attraction de la Terre et part vers l'infini
▷ $v_{\text{lim}} > v_B > v_0$: trajectoire elliptique où le périhélie (*i.e.* point le plus proche) est en B, $r_{min} = R_0$
▷ $v_B = v_0$: trajectoire circulaire de rayon R_0
▷ $v_B < v_0$: trajectoire elliptique où l'apogée (*i.e.* point le plus loin) est en B, $r_{max} = R_0$



TD18

Mouvement dans un champ à force centrale

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Pour tout le TD on pourra utiliser ces données :

- Constante universelle de gravitation $\mathcal{G} \approx 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$;
- Rayon de la Terre $R_\mathrm{T} = 6.4 \times 10^3\,\mathrm{km}$;
- Masse de la Terre : $M_T = 6.10^{24} kg$
- Rayon du Soleil : $R_S = 7.10^5 \mathrm{km}$
- Masse du Soleil : $M_S = 3.10^{30} \mathrm{kg}$

Exercice 1 - Etude d'une force centrale :

Une particule de masse m subit une force $\vec{f} = -k\dfrac{m}{r^5}\vec{u}$ où k est une constante et $\vec{u}$ un vecteur constamment dirigé d'un point fixe O vers M, position de la masse m. Initialement la masse m est en A séparé de O d'une distance R et sa vitesse est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$.

1. Est-ce une force centrale ? Une force centrale conservative ? Donner son énergie potentielle associée.
2. Montrer que le mouvement est plan.
3. Montrer que si la trajectoire est circulaire, le mouvement est uniforme.
4. Donner la valeur qu'il faut donner à la vitesse initiale pour que la trajectoire soit circulaire en fonction du rayon R de la trajectoire et de la constante k.

Exercice 2 - Mise en orbite rasante :

Un satellite (masse m), lancé initialement d'un point B du sol terrestre de latitude λ, décrit une orbite circulaire rasante de rayon $r \simeq R_T$ (en fait $r = R_T + z$, avec $z \ll R_T$).

1. On note Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.
   Estimer Ω
2. En reprenant la définition de la latitude, donner la distance r à l'axe de rotation de la Terre d'un point M de la surface à la latitude λ
3. Quelle est l'énergie mécanique initiale E_B du satellite sur sa base de lancement dans le référentiel géocentrique ?
4. Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite sur sa trajectoire circulaire.
5. Quel est l'intérêt d'une base de lancement située au voisinage de l'équateur ?

Réponses : $\Omega = 2\pi/T_0$ avec $T_0 = 24h$; $r = R\cos\lambda$; $E_B = -\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R} + \dfrac{1}{2}mR^2\Omega^2\cos^2\lambda$; $E_m = -\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{2R}$; l'énergie à fournir à la fusée est plus faible

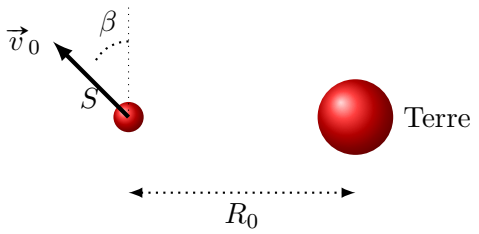
Exercice 3 - Trou noir :

En 1916, Karl Schwarzschild montre que certains corps très massifs, nommés trous noirs, sont solutions des équations de la relativité générale d'Einstein. Ces corps sont si massifs qu'aucun objet ne peut s'échapper de leur attraction. Ainsi, un trou noir est un astre pour lequel la vitesse de libération est supérieure à c. On se propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans le cadre de la physique newtonienne. Pour cela, on considère un astre de centre O et de rayon R. On se place dans le référentiel astrocentrique supposé galiléen.

1. En déduire le rayon maximal de l'astre en fonction de sa masse pour pouvoir être un trou noir. Ce rayon est nommé rayon de Schwarzschild et noté R_s.
2. Faire les applications numériques avec la Terre et le Soleil ($M = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$). Commentaires ?

Exercice 4 - Angle de déviation :

Un satellite se trouve à une distance R_0 du centre de la Terre. On confère une vitesse v_0 et on s'intéresse aux différentes trajectoire possible en fonction de l'angle β que fait $\vec{v}_0$ avec le rayon ST.



1. **Vitesse orthogonale** $\beta = 0$: donner la vitesse v_0 à fournir au satellite pour obtenir
   - ▷ une trajectoire circulaire
   - ▷ une trajectoire elliptique de demi-grand axe $a = 4R_0$ avec S initialement au périhélie
   - ▷ une trajectoire hyperbolique
2. **Vitesse orthogonale** $\beta \neq 0$
   (a) Exprimer la constante des aires C du satellite.
   (b) Donner le demi-grand axe a en fonction de v_b, $\mathcal{G}$, R_0 et M.
   (c) Montrer que les rayons à l'apogée r_A et au périhélie r_P sont solution de :

$$r^2 - 2ar + \frac{aC^2}{\mathcal{G}M} = 0$$

   (d) En déduire les expressions r_A et r_P, rayons à l'apogée et au périhélie, en fonction de v_b, β, $\mathcal{G}$, R_0 et M

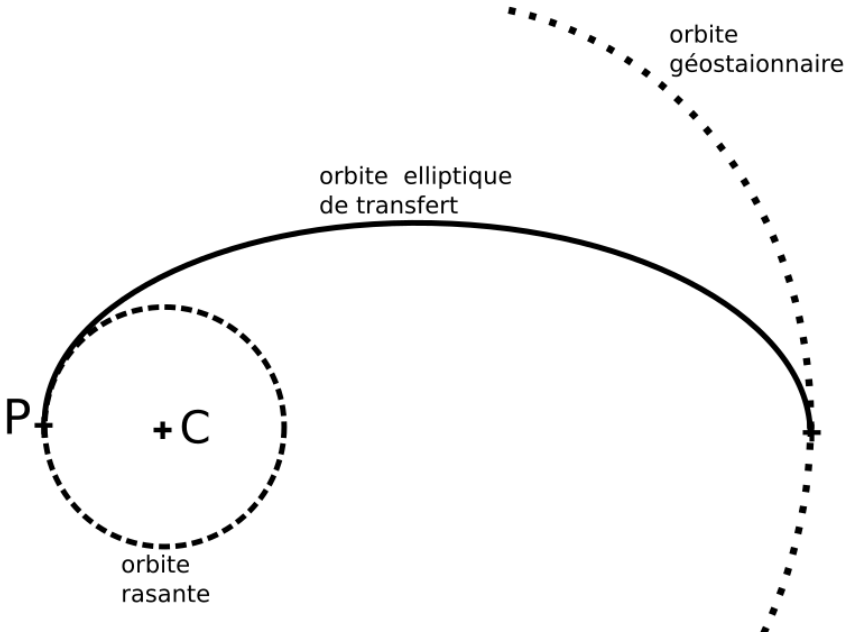
Exercice 5 - Comète de Haley :

La trajectoire de la Terre autour du soleil est une ellipse faiblement aplatie. Le périhélie P est à la distance $r_p = 0,983$ua du centre du soleil, où l'unité astronomique 1ua $= 1,496.108$ km. La période de révolution (année sidérale) vaut environ 365,25 jours solaires.

1. Trajectoire de la Terre
   (a) Calculer le demi grand-axe a de l'orbite terrestre.
   (b) Calculer la position de l'aphélie A ainsi que la vitesse orbitalaire de la Terre en P et A dans le référentiel héliocentrique.
   (c) Calculer également l'excentricité e de la trajectoire de la Terre, définie par $e = \dfrac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$
   (d) Conclure quant à la nature de la trajectoire de la Terre autour du soleil.
2. Trajectoire de la comète Haley
   La comète de Haley possède une trajectoire beaucoup plus elliptique que celle de la Terre. Elle passe au voisinage du soleil environ tous les 76 ans et son périhélie est situé à une distance $r_p = 0,59$ua du soleil. Calculer la position de son aphélie, les vitesses v_P et v_A ainsi que l'excentricité de sa trajectoire.

Exercice 6 - Orbite de transfert :

La Terre est supposée à symétrie sphérique, de centre C, de rayon r_0. On note g_0 l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On donne $r_0 = 6400$ km, $g_0 = 9,8$ m.s^{-2}.



1. Un satellite, de masse m, décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon r_0. Donner les expressions de la vitesse v_0 et de la période T_0 du satellite en orbite circulaire rasante ? Calculer numériquement v_0 et T_0.
2. Un satellite géostationnaire décrit une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial, et semble fixe pour un observateur terrestre.
   Déterminer le rayon r_1 de l'orbite d'un satellite géostationnaire. Calculer la vitesse v_1 de ce satellite.
3. On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $r_0 = CP$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_1 = CA$ (cf. Figure). Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors une demi-ellipse, dite de transfert, de périgée P et d'apogée A. Déterminer littéralement puis numériquement les vitesses v_0' et v_1' ; du satellite en P et A sur sa trajectoire elliptique. Calculer la durée du transfert de P à A.

$$T_{transfert} = \frac{T'}{2} = \pi\sqrt{\frac{(r_0+r_1)^3}{8g_0r_0^2}} = 5h\ 14min$$

$$h,\ r_1 = 42300\ km\ et\ v_1 = 3,08\ km.s^{-1}\ ;\ v_0' = \sqrt{\frac{2g_0r_0r_1}{r_0+r_1}} = 10,44\ km.s^{-1}\ ;\ v_1' = \sqrt{\frac{2g_0r_0^3}{r_1(r_0+r_1)}} = 1,58\ km.s^{-1}\ ;$$

$$Réponses\ :\ v_0 = \sqrt{g_0r_0} = 7,92\ km.s^{-1}\ ;\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = 1h\ 25min\ ;\ r_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1^2g_0r_0^2}{4\pi^2}}\ ;\ v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}\ avec\ T_1 = 24$$

Exercice 7 - Freinage de satellite :

Le référentiel géocentrique est supposé galiléen et la Terre sphérique, de masse M_T et de rayon $R_T \simeq 6400$ km. Un satellite artificiel de masse m décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r = R_T + z$ où z est l'altitude du satellite. La norme du champ de pesanteur à la surface de la Terre est $g_0 \simeq 10$m.s^{-2}.

1. Déterminer en fonction de m, R_T, z et g_0 :
   - ▷ la norme v de la vitesse du satellite
   - ▷ son énergie mécanique E_m
   - ▷ la norme de son moment cinétique calculé par rapport centre O de la Terre
   - ▷ sa période de révolution T.
2. Calculer l'altitude z_0 d'un satellite géostationnaire, c'est-à-dire restant constamment à la verticale d'un même point de la Terre.

Le satellite à l'altitude z est soumis dans les couches supérieures de l'atmosphère à une force de frottement $\vec{F} = -km\frac{v}{z}\vec{v}$. Le module de cette force est très inférieur à celui de la force d'attraction terrestre, si bien qu'on peut considérer la trajectoire comme toujours circulaire mais de rayon variable.

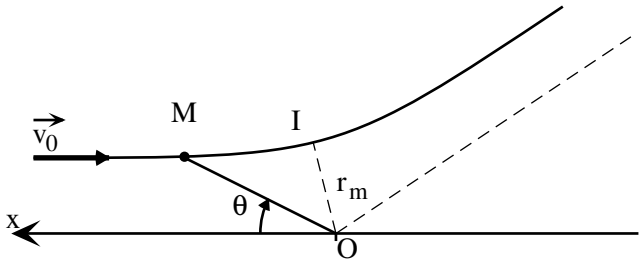
1. Justifier qualitativement l'expression de la force de frottement, notamment sa dépendance en z.
2. Calculer le travail total des forces de frottement pour une révolution à une altitude z. On pourra utiliser l'expression de la vitesse obtenue précédemment.
3. Justifier alors que l'énergie mécanique du satellite diminue au cours de la trajectoire.
4. Exprimer l'énergie mécanique E_m en fonction de z seulement et en déduire le sens de variation de z.
5. Commenter alors sens de variation de v du aux frottements. Etrange non ?

Exercice 8 - Expérience de rutherford :

Un noyau d'hélium ou particule α, de masse m_1 et de charge $q_1 = 2e$, subit la force de répulsion électrostatique d'un noyau d'or de masse $m_2 \gg m_1$ et de charge $q_2 = Ze$ centrée au point O. La distance, entre le support de la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ (loin du point O) et la droite passant par O et parallèle à $\overrightarrow{v_0}$, est appelée paramètre d'impact et notée b.

1. Exprimer la distance minimale d'approche $r_m = OI$ en fonction de Z, e, m_1, v_0, b.

2. Quelle configuration initiale correspond à une distance minimale d'approche la plus petite possible ? En déduire la taille maximale du noyau de la particule d'or.



$$\text{Réponses : } r = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2}\right)^2}$$

TD18

Mouvement dans un champ à force centrale

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Exercice 1 - Etude d'une force centrale :

1. La force pointe toujours vers le point O : elle est donc centrale. Elle ne dépend que de r : elle est donc conservative avec :
$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = k\frac{m}{r^5} \Rightarrow E_p = -k\frac{m}{4r^4}$$
2. Par application du **TMC**, le moent cinétique de M par rapport à O est constant : le mouvement est donc plan.
3. **Mouvement circulaire $\Rightarrow$ accélération à la Frenet**

   Vecteur cinématiques :
   - ▷ position $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$
   - ▷ vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec $v = R\dot{\theta}$ (on prend un mouvement dans le sens direct)
   - ▷ accélération $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$

   Bilan des forces :
   - ▷ $\vec{f} = -k\frac{m}{r^5}\vec{e}_r$

   PFD : $m\vec{a} = \vec{f}$
$$\begin{cases} -m\frac{v^2}{R} = -k\frac{m}{R^5} \\ m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$
   La vitesse est constante, le mouvement est donc uniforme.
4. On a une vitesse : $v_0 = \frac{\sqrt{k}}{R^2}$. Pour obtenir une trajectoire circulaire, la vitesse initiale doit donc être v_0 et orientée perpendiculairement au rayon.

Exercice 2 - Mise en orbite rasante :

1. La vitesse de rotation de la Terre est constante : $\Omega = \frac{\text{angle}}{\text{durée}} = \frac{2\pi}{24h}$.
2. On appelle H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation de la Terre. On a dans le triangle BHT, avec T le centre de la Terre :
$$\cos\lambda = \frac{r}{R} \Rightarrow r = R\cos\lambda$$
3. Initialement l'énergie mécanique est $E_B = E_c + E_p$ avec :
   - ▷ $E_c = \frac{1}{2}mv_B^2$ avec v_B la vitesse du point B due à la rotation de la Terre.
     $\overrightarrow{TB} = h\vec{e}_z + R\cos\lambda\vec{e}_r$ donc $\vec{v}_B = R\cos\lambda\Omega\vec{e}_\theta$
   - ▷ $E_p = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{R}$

   Soit $E_B = \frac{1}{2}mR^2\cos^2\lambda\Omega^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R}$
4. Pour être sur une trajectoire circulaire, l'énergie mécanique du satellite doit être $E_m = -\mathcal{G}\frac{mM}{2R}$.
5. L'intérêt d'être proche de l'équateur est de diminuer la latitude λ et donc d'augmenter la valeur de l'énergie mécanique du satellite "au repos". La différence entre l'énergie de la trajectoire E_m et la valeur au repos E_B représente la quantité de carburant à brûler pour mettre le satellite en orbite.
   Plus E_B est grand, moins il faut brûler de carburant.

Exercice 3 - Trou noir :

1. Pour être un trou noir, la vitesse de libération v_l doit être supérieure à la vitesse de la lumière c.
   Vitesse de libération : à la surface de l'astre, l'énergie mécanique doit être positive pour mettre la particule sur une trajectoire hyperbolique
   $$\frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{R} > 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{2\mathcal{G}\frac{M}{R}}$$
   On veut alors $v_l > c$ soit $2\mathcal{G}\frac{M}{R} = c^2$ donc $R_\text{s} = \frac{2\mathcal{G}\mathcal{M}}{c^2}$.
2. Pour la Terre $R_\text{s} = 9$mm et le soleil $R_\text{s} = 3$km. Cela veut dire que, si toute la masse de la Terre (ou du Soleil) était compacté dans une sphère de 9mm de rayon, elle se comporterait comme un trou noir à sa surface.

Exercice 4 - Angle de déviation :

1. **Vitesse orthogonale** $\beta = 0$
   Correction rapide, mais il faut savoir le redémontrer proprement
   - ▷ on veut une énergie mécanique $E_m = -\mathcal{G}\frac{mM}{2R_0}$ soit $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M}{R_0}}$
   - ▷ on veut une énergie mécanique $E_m = -\mathcal{G}\frac{mM}{8R_0}$ soit $v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{7M}{4R_0}}$
   - ▷ $v_0 > \sqrt{\mathcal{G}\frac{2M}{R_0}}$
2. **Vitesse orthogonale** $\beta \neq 0$
   (a) On évalue $\vec{L}^O_M$ à $t = 0$
   $$\vec{L}^O_M = R_0\vec{e}_r \wedge mv_0(\sin\beta\vec{e}_r - v_0\cos\beta\vec{e}_\theta) = -mR_0v_0\cos\beta\vec{e}_z$$
   donc $C = -R_0v_0\cos\beta$.
   (b) Energie mécanique de la trajectoire :
   $$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{R} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2a} \Rightarrow a = \frac{2\mathcal{G}M - R_0v_0^2}{\mathcal{G}M}$$
   (c) Attention ! **Point important pour cette question**
   L'expression de a précédente reste vraie et on sait que $r_A + r_P = 2a$ **MAIS** ni r_A ni r_P ne sont égaux à R_0. De plus, l'énergie mécanique fait apparaître v_A et r_A, soit deux inconnues : c'est cuit.
   On passe donc par l'énergie potentielle effective :
   $$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2a}$$
   Or en $r = r_A$ ou $r = r_P$, $\dot{r} = 0$ car on est au maximum ou au minimum. Donc :
   $$\frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2a} \text{ soit } r^2 - 2ar + \frac{aC^2}{\mathcal{G}M} = 0$$
   (d) On résout : $r = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{aC^2}{\mathcal{G}M}}$ et on remplace C par sa valeur. r_A est la solution la plus grande et r_P la plus petite.

> ***Remarque :*** *On aurait pu utiliser le fait que, en $r = r_A$, $v_A = r_A\dot{\theta}$ car $\dot{r} = 0$ (on est au maximum).*
> *Donc $C = r^2\dot{\theta} = r_Av_A$ et on peut remplacer v_A dans l'expression "classique" de l'énergie mécanique.*

Exercice 5 - Comète de Haley :

Cf cours

Exercice 6 - Orbite de transfert :

Attention ! Important : accélération de la pesanteur et $\mathcal{G}$.

Au niveau de la surface terrestre, $F = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r_0^2} = -mg_0$ donc $g_0 = \mathcal{G}M/r_0^2$. Pour tout l'exercice, on utilisera $\mathcal{G}M = g_0 r_0^2$.

1. *Correction rapide, on a déjà fait ça 173 fois*
   Accélération $\vec{a} = -mv_0^2/r_0\,\vec{e}_r$, **PFD** on a $-mv_0^2/r_0 = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\mathcal{G}M/r_0} = \sqrt{g_0 r_0}$.

2. Aspect temporel $\Rightarrow$ Loi de Kepler $\dfrac{r_1^3}{T^2} = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{4\pi^2}$ avec $T = 34\text{h}$.
   Donc $r_1 = \left(T^2\dfrac{\mathcal{G}M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. On peut ensuite trouver v_1 comme avant : $v_1 = \sqrt{\mathcal{G}M/r_1}$.

3. Pendant son transfert, le satellite est sur une trajectoire elliptique de demi grand-axe $2a = r_1 + r_0$ donc d'énergie mécanique $E_m = -\mathcal{G}\dfrac{mM}{r_1 + r_0}$.

$$\text{en P}\quad r = r_0 \text{ et donc } \frac{1}{2}mv_0'^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{r_0} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r_1 + r_0} \;\Rightarrow\; v_0' = \sqrt{\frac{2g_0 r_0 r_1}{r_0 + r_1}}$$

$$\text{en A}\quad r = r_1 \text{ et donc } \frac{1}{2}mv_1'^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{r_1} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r_1 + r_0} \;\Rightarrow\; v_1' = \sqrt{\frac{2g_0 r_0^3}{r_1(r_0 + r_1)}}$$

Exercice 7 - Freinage de satellite :

1. Déterminer en fonction de m, R_T, z et g_0 :
   - ▷ *Cf avant, on a fait ça 174 fois* $v = \sqrt{\mathcal{G}M/(R_T + z)}$.
   - ▷ $E_m = -\mathcal{G}Mm/2(R_T + z)$
   - ▷ $\vec{L}_M^O = (R_T + z)\vec{e}_r \wedge mv\vec{e}_\theta = m(R_T + z)v\vec{e}_z$ donc $L_M^O = m\sqrt{\mathcal{G}M(R_T + z)}$.
   - ▷ $T = 2\pi(R_T + z)/v = 2\pi\sqrt{(R_T + z)^3/\mathcal{G}M}$

2. Pour un satellite géostationnaire, $T = 24\text{h}$ et donc $z_0 = \left(\dfrac{T^2}{4\pi^2}\mathcal{G}M\right)^{1/3} - R_T$

3. La force de frottement diminue avec l'altitude z : plus on s'éloigne de la Terre, plus l'air se raréfie et donc les forces de frottement diminue.

4. Sur une trajectoire circulaire : $\vec{v} = v\vec{e}_\theta = (R_T + z)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et donc $\mathrm{d}\vec{l} = (R_T + z)\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta$. On a alors :

$$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -km\frac{v^2}{z}\vec{e}_\theta\cdot(R_T + z)\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta = -km\frac{v^2}{z}(R_T + z)\mathrm{d}\theta$$

   Finalement

$$W_{\text{tour}} = \int_0^{2\pi}\delta W = \int_0^{2\pi} -km\frac{v^2}{z}(R_T + z)\mathrm{d}\theta = -km\frac{v^2}{z}(R_T + z)\times 2\pi = -2\pi km\frac{\mathcal{G}M}{z}$$

5. On remarque que $W < 0$: le travail des forces de frottement est négatif et fait diminuer l'énergie mécanique du satellite.

6. Si on détail E_m :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM}{R_T + z} = \mathcal{G}\frac{mM}{2(R_T + z)} - \mathcal{G}\frac{mM}{R_T + z} = -\mathcal{G}\frac{mM}{2(R_T + z)} -$$

   On remarque alors que E_m est une fonction croissante de z. Par conséquent, au fur et à mesure que les frottements travaille, E_m diminue et donc z également. Le satellite se rapproche de plus en plus de la Terre.

7. Bizarrement, comme $v = \sqrt{\mathcal{G}M/(R_T + z)}$, au fur et à mesure que z diminue, v augmente. Le satellite accélère alors qu'il est freiné !

Exercice 8 - Expérience de rutherford :

C'est un exercice très proche de celui de la fin des dinosaures mais avec la force électrostatique

$$-\mathcal{G}m_1m_2 \to \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}$$

1. ▷ Conservation de l'énergie mécanique entre l'infini et $r = r_{min}$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv[r_m]^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_m}$$

▷ Constante des airs $C = v_0 b = r_m v[r_m]$.

On a alors $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2b^2}{r_m^2} + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_m}$. On résout et on trouve

$$r_m = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 mv_0^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 mv_0^2}\right)^2}$$

2. Pour avoir la distance minimale $b = 0$: la particule α fonce tout droit sur le noyau et fait demi-tour à $r_m = \frac{2Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 mv_0^2}$.

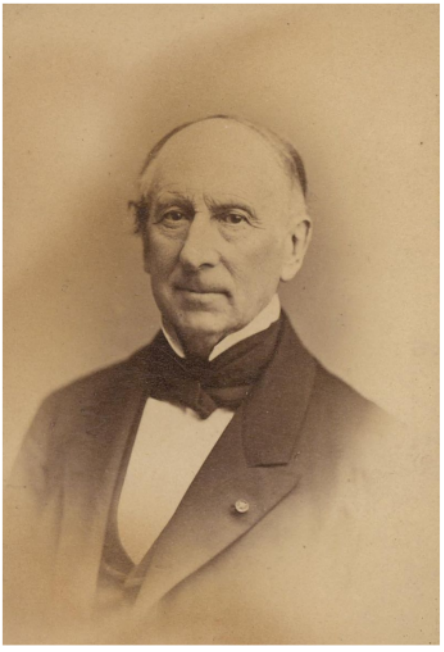
Chap XIX

Mouvement des solides : translation et rotation

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

1 Description du mouvement d'un solide **3**
1.1 Définition . . . 3
1.2 Translation . . . 3
1.3 Rotation autour d'un axe fixe . . . 4
1.4 Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe . . . 4
2 Moment des forces sur un solide et équilibre **6**
2.1 Point d'application et moment d'une force . . . 6
2.2 Liaison pivot . . . 7
2.3 Couple de force . . . 8
2.4 Condition d'équilibre d'un solide . . . 8
3 Théorème du moment cinétique et rotation d'un solide **10**
3.1 TMC pour un solide en rotation . . . 10
3.2 Approche énergétique d'un solide en rotation . . . 12
3.3 Puissance d'un moment et puissance d'un couple . . . 12
3.4 Application :pendule de torsion et barre reliée à un ressort . . . 13



Savoirs ♡

- ♡ **Mouvement d'un solide**
  - définition de la rotation et translation d'un solide
  - vitesse d'un point d'un solide en rotation
  - expression du moment cinétique et moment d'inertie
- ♡ **Moment des forces sur un solide**
  - moment d'une force et point d'application
  - liaison pivot et action (force + moment)
  - couple de forces
- ♡ **Équilibre et TMC pour un solide**
  - équilibre de translation : somme des forces nulle
  - équilibre de rotation : somme des moments nulle
  - énoncé du TMC pour un solide
- ♡ **Approche énergétique**
  - puissance d'un moment/d'un couple
  - énergie cinétique d'un solide en rotation
  - énoncé du TEC pour un solide

Savoir Faire

Calculer le moment d'une force sur un solide **Attention !** *point d'application !!!*

Utiliser les conditions d'équilibre de translation et de rotation

Applications le TMC à un solide
- *Identifier l'axe de rotation*
- *Lister les moments de forces et les couples*
- *Application du TMC*

Approche par l'énergie du mouvement d'un solide

Ce chapitre est une introduction à une autre branche de la mécanique : la mécanique du solide. Nous avons étudié précédemment la mécanique du point.
Un point matériel est un système dont on peut négliger les dimensions ou un système dont on néglige la rotation.

1 Description du mouvement d'un solide

1.1 Définition

Définition. Solide indéformable
On appelle solide tout système matériel (S) pour lequel la distance entre deux points N et P quelconques de (S) est constante dans le temps.
On parle de solide **indéformable**.

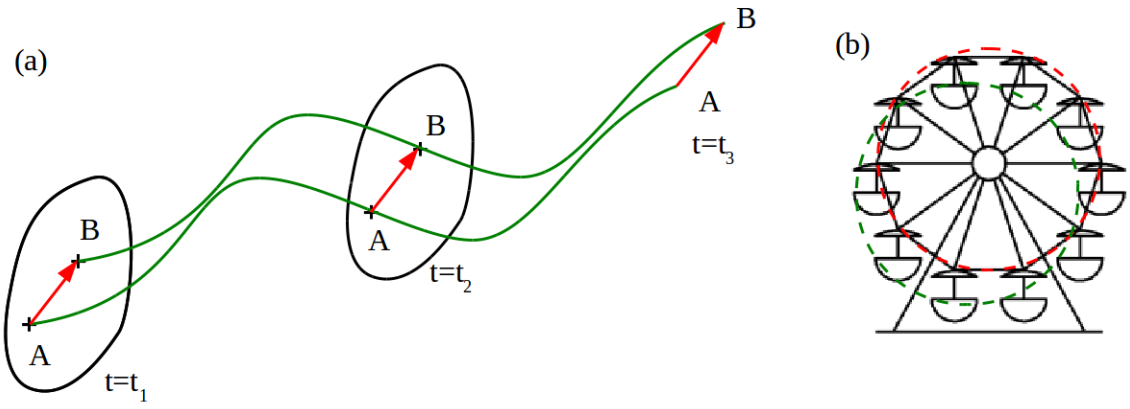
Différence entre un solide et un point matériel
A la différence d'un point matériel, un solide peut tourner sur lui-même : pour décrire un solide dans l'espace il faut 6 paramètres :
▷ trois pour repérer la position de son centre d'inertie
▷ trois pour repérer son orientation, c'est-à-dire sa rotation.

Lien entre solide et point matériel
Un solide est décrit comme un ensemble de points matériels. Étudier le mouvement d'un solide revient à étudier le mouvement de chacun des points qui le composent. Comme nous le verrons, de nombreux outils permettent de simplifier grandement la description.

$$\text{Solide (S)} \iff \{M_1, M_2, ..., M_i, ...\}$$

1.2 Translation

Un solide est en mouvement de translation dans un référentiel $\mathcal{R}$ si, pour deux points A et B quelconques de ce solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est constant dans le temps.



Définition. Translation d'un solide
Un solide (S) est en translation si
▷ les vecteurs vitesses de tous les points M_i du solide sont identiques
▷ les trajectoire de tous les points du solide sont superposables

Deux trajectoires classiques :
▷ Si la "trajectoire commune" est une droite, on parle de **translation rectiligne**.
▷ Si la "trajectoire commune" est un cercle (ou portion de cercle), c'est une **translation circulaire**

▶ Etude de la translation

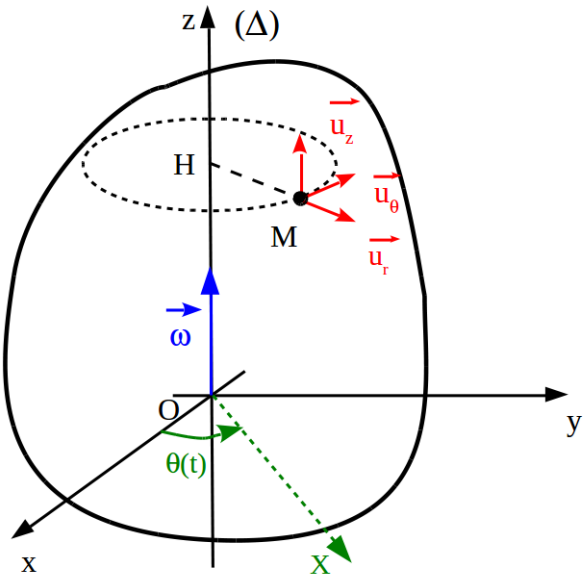
Si un solide est en translation, son étude se faut par la simple étude du mouvement de son centre d'inertie auquel s'applique toutes les forces.

Méthode en DS. Etude de la translation d'un solide
On étudie avec la mécanique du point le mouvement de G, centre d'inertie du solide, sur lequel s'applique toutes les forces extérieures.

1.3 Rotation autour d'un axe fixe

Définition. Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) dans un référentiel $\mathcal{R}$ si la trajectoire d'un point quelconque M_i du solide est un cercle, ou portion de cercle.
- ▷ de centre H_i avec H_i sur l'axe de rotation (Δ)
- ▷ orthogonal à l'axe (Δ) de rotation



Etude du mouvement d'un point M_i
On choisit l'axe (Δ) comme axe (Oz) des coordonnées cylindriques. Pour chaque point M_i, on définit une base polaire de centre H_i.
- ▷ Position $\overrightarrow{H_iM_i} = r_i\vec{e}_r$ avec r_i la distance au centre de rotation
- ▷ Vitesse : $\vec{v}_i = r_i\dot{\theta}_i\vec{e}_\theta$

Attention ! Chaque point M_i est à une distance différentes de l'axe de rotation : $r_i \neq r_j$ **MAIS** chaque point i possède la même vitesse angulaire $\theta_i = \theta_j$.

Propriété. Vitesse de rotation d'un solide
Pour un solide en rotation, tous les points M_i du solide possèdent la même vitesse de rotation $\dot{\theta}$, noté également ω.

Astuce : si un point M_i est sur l'axe de rotation, sa vitesse est nulle.

1.4 Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe

Un solide (S) indéformable constitué de N points matériels M_i de masses m_i est en rotation autour d'un axe orienté (Δ) à la vitesse angulaire ω.

Propriété. Extensivité du moment cinétique
Le moment cinétique par rapport à un point ou un axe est une grandeur extensive : sa valeur pour un système de plusieurs points est égale à la somme des moment cinétiques de chacun points.

Moment cinétique d'un solide S
Le moment cinétique du solide par rapport à l'axe Δ, noté $L_S^{(\Delta)}$, est égal à la somme des moments d'inertie des points M_i par rapport à l'axe Δ :

$$L_S^{(\Delta)} = \sum_i L_{M_i}^{(\Delta)}$$

Moment cinétique d'un point du solide S

Pour un point M_i, on calcule le moment cinétique par rapport à H_i :

$$\vec{L}_{M_i}^{H_i} = r_i \vec{e}_r \wedge m r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m_i r_i^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

Par rapport à l'axe $(\Delta) = (H_i, \vec{e}_z)$, on trouve : $L_{M_i}^{(\Delta)} = m_i r_i^2 \dot{\theta}$.
Par conséquent :

$$L_S^{(\Delta)} = \sum_i L_{M_i}^{(\Delta)} = \sum m_i r_i^2 \dot{\theta} = \left(\sum m_i r_i^2\right) \times \dot{\theta}$$

Le moment d'inertie d'un solide se décompose alors en deux partie :
▷ $\sum_i m_i r_i^2$: qui ne dépend que de la forme du solide
▷ $\omega(t)$: la vitesse de rotation du solide

Propriété. Moment cinétique d'un solide
Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est égale à :

$$L_S^{(\Delta)} = J_\Delta \dot{\theta}(t)$$

avec
▷ $\dot{\theta}(t)$ la vitesse de rotation du solide par rapport à (Δ)
▷ J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ)

▶ Moment d'inertie

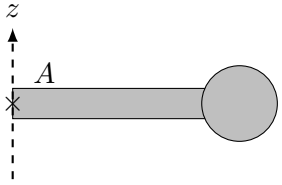
Le moment d'inertie par rapport à un axe est l'équivalent de la masse mais vis-à-vis de la rotation.

$$J_\Delta = \sum m_i r_i^2$$

On remarque que :
▷ plus le solide est lourd, plus J_Δ est important
▷ plus la masse du solide est située loin de l'axe de rotation, plus J_Δ est important

> ***Exemple 1 :*** *Obélix n'étant pas gros, Astérix et lui ont la même masse. Qui a le plus grand moment d'inertie par rapport à l'axe Δ vertical passant par la tête ?*
>
>

Le moment d'inertie d'un solide sera toujours donné (s'il est utile) sauf dans des cas comme ....

> ***Exemple 2 :***
>
> ***Calcul d'un moment d'inertie simple.***
> *On attache à l'extrémité d'une barre AB de longueur L une masse ponctuelle m_0. Donner le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $\Delta = (Az)$.*
> *Moment d'inertie de la barre : $J_\Delta = mL^2/3$*
>
> 
>

CORRECTION

Le moment d'inertie du système {barre+masse} est la somme de chacun des moment :

$$J_\Delta = mL^2/3 + m_0 \times L^2$$

2 Moment des forces sur un solide et équilibre

2.1 Point d'application et moment d'une force

A la différence d'un point matériel, un solide possède une taille : deux forces peuvent s'appliquer sur un solide en deux points différents.

Règle de base :
en mécanique du soldie, lors du détail de chaque force, il convient de bien définir le **point d'application** de chaque force.

▷ force de contact : point de contact
▷ gravité : centre de masse

Définition. Moment d'une force sur un solide
Une force $\vec{F}$ s'applique en un point A d'un solide. Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un point O fixe est :

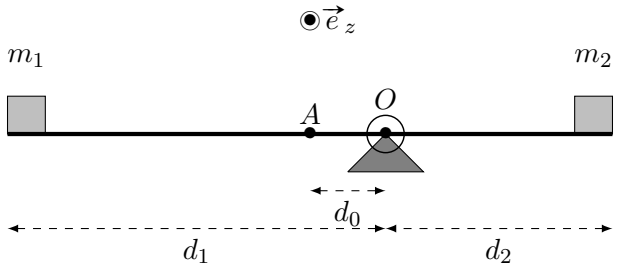
$$\vec{\mathcal{M}}_A^O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

Soit un axe (Δ) passant par O de vecteur directeur $\vec{u}_\Delta$, le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe (Δ) est :

$$\mathcal{M}_A^{(\Delta)}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A^O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Attention ! AU POINT D'APPLICATION !!!!

Exemple 3 : On considère une barre fixe indéformable de masse m et de centre A, posée sur une pointe au niveau du point O.
On néglige les frottements au niveau de O.



Listons les forces et calculons leur moments par rapport à $(\Delta) = (O, \vec{e}_z)$

Attention ! *Il convient de bien définir la base utilisée : si $\vec{e}_z$ pointe vers nous alors $\vec{e}_x$ pointe vers la droite et $\vec{e}_y$ pointe vers le haut !!*

Bilan des forces
▷ *Poids de la barre : $m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$, s'applique en A*
▷ *Réaction normale du support : $\vec{N} = N\vec{e}_y$, s'applique en O*
▷ *Poids de la masse 1 : $m_1\vec{g} = -m_1g\vec{e}_y$, s'applique en O_1, l'extrémité gauche*
▷ *Poids de la masse 2 : $m_1\vec{g} = -m_2g\vec{e}_y$, s'applique en O_2, extrémité droite*

Bilan des moments
▷ *Poids de la barre :*

$$\vec{\mathcal{M}}_A^O(m\vec{g}) = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g} = -d_0\vec{e}_x \wedge -mg\vec{e}_y = +d_0mg\vec{e}_z$$

$$\mathcal{M}_A^{(\Delta)}(m\vec{g}) = +dmg$$

▷ *Réaction normale du support :*

$$\vec{\mathcal{M}}_O^O(\vec{N}) = \vec{0}$$

▷ *Poids de la masse 1 :*

$$\vec{\mathcal{M}}_{O_1}^O(m_1\vec{g}) = \overrightarrow{OO_1} \wedge m_1\vec{g} = -d_1\vec{e}_x \wedge -m_1g\vec{e}_y = +d_1m_1g\vec{e}_z$$

$$\mathcal{M}_{O_1}^{(\Delta)}(m_1\vec{g}) = +d_1m_1g$$

▷ *Poids de la masse 2 :*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}^{O}_{O_2}(m_2\,\vec{g}) = \overrightarrow{OO_2} \wedge m_2\,\vec{g} = d_2\,\vec{e}_x \wedge -m_2 g\,\vec{e}_y = -d_2 m_2 g\,\vec{e}_z$$

$$\mathcal{M}^{(\Delta)}_{O_2}(m_2\,\vec{g}) = -d_2 m_2 g$$

On remarque que les moments du poids de la barre et de la masse m_1 sont du même signe : ils on tendance à faire tourner la barre dans le même sens : sens trigonométrique.
Le moment du poids de m_2 est négatif : il a tendance à faire tourner la barre dans le sens anti-trigonométrique ($\sim$ sens horaire.

2.2 Liaison pivot

▶ Definition

On remarque que toute la rotation se passera au niveau du point de liaison O. Dans la plupart des cas, à cause de la façon dont le solide est attaché, la rotation d'un solide ne peut se réaliser qu'autour d'un seul axe : c'est ce qu'on appelle **une liaison pivot**.

Définition. Liaison pivot
Une liaison pivot est un ensemble de contact entre deux solides assurant que le seul mouvement possible est la rotation autour d'un axe unique (Δ).

Exemple 4 : Une liaison pivot : les gonds d'une porte.

Propriété. Action au niveau d'une liaison pivot
Au niveau d'une liaison pivot s'applique :
▷ une force de réaction $\vec{N}$ qui assure l'équilibre en translation du solide
▷ un moment $\mathcal{M}^{(\Delta)}$ qui représente les frottement au niveau du contact

Attention ! On ne connaît pas *a priori* le sens de $\vec{R}$! !

▶ Liaison pivot parfaite et frottement

On retiendra trois modélisation pour les actions des liaisons pivots (inutile de les apprendre par cœur) :

▷ **Liaison pivot parfaite :**
Les forces au niveau de la liaison pivot entrainent un moment nulle par rapport à l'axe de rotation (Δ) :

$$\mathcal{M}^{(\Delta)}(\text{liaison}) = 0$$

Dans ce cas on néglige les frottements au niveau de la liaison (liaison graissée, ...)

▷ **Frottements fluides** :
Les forces au niveau de la liaison pivot crée un couple qui s'oppose à la rotation et proportionnelle à la vitesse de rotation

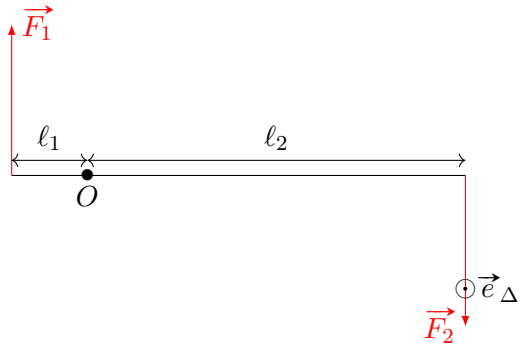
$$\mathcal{M}^{(\Delta)}(\text{liaison}) = -\lambda\dot{\theta}$$

▷ **Frottement solide :**
Les forces au niveau de la liaison pivot crée un couple constant qui s'oppose au à la rotation

$$\mathcal{M}^{(\Delta)}(\text{liaison}) = \pm C$$

2.3 Couple de force

Prenons une barre qui peut tourner suivant l'axe (Oz) au niveau du point O. On applique à ses deux extrémités deux forces, égales en norme mais orientées dans des directions opposées.



On remarque alors que la somme des forces est nulle $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$: les deux forces n'entraînent pas la translation de la barre.

Mais la somme des moment des forces par rapport à $(\Delta) = (O, \vec{e}_z)$ est non-nulle :

$$\mathcal{M}^{(\Delta)}(\vec{F}_1) = -l_1 F_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{(\Delta)}(\vec{F}_2) = -l_2 F_2$$

Même si $l_1 = l_2$, $\mathcal{M}^{(\Delta)}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}^{(\Delta)}(\vec{F}_2) \neq 0$: les deux forces entraînent la rotation de la barre.

Astuce pratique : on vérifie avec le sens de rotation si on a pas fait une erreur de signe. Moment négatif $\Rightarrow$ rotation horaire : OK !

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ crée **un couple**.

Attention ! La somme des moments d'une force n'est pas le moment de la somme des forces :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) \neq \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Définition. Couple de forces
Un couple de forces est un ensemble de forces de résultante nulle mais dont le moment résultant par rapport à un axe (Δ) est non nul.

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Gamma = \sum \mathcal{M}^{(\Delta)}(\vec{F}_i) \neq 0$$

> *Exemple 5 : On applique un couple quand on fait tourner un volant, on ouvre une bouteille, on tourne une visse, ...*

Dans la pratique : "un solide subit un couple $\Gamma \Rightarrow$ on ajoute Γ dans le bilan des moments et 0 dans les forces

Attention ! Le couple n'apparaît pas dans le bilan des forces, uniquement dans celui des moments !

2.4 Condition d'équilibre d'un solide

Comme nous l'avons vu, un solide possède deux types de mouvement indépendant : la translation et la rotation.

Définition. Equilibre d'un solide
Pour qu'un solide soit immobile, donc à l'équilibre, il ne doit avoir ni mouvement de translation ni mouvement de rotation.

Par la suite on ne s'intéressera qu'à des solides qui possède un axe de rotation évident, noté (Δ), le plus souvent à cause d'une liaison pivot..

Propriété. Condition d'équilibre d'un solide
Pour qu'un solide soit à l'équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen :
1. la somme des forces extérieures doit être nulle :

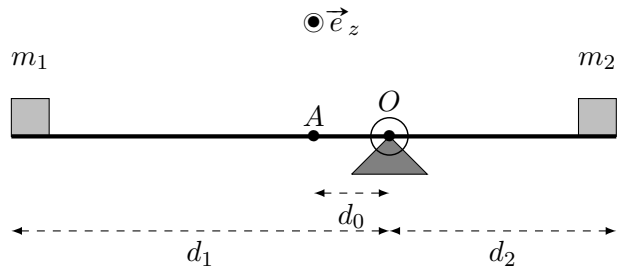
$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

2. la somme des moment par rapport à son axe de rotation (Δ) doit être nulle :

$$\sum \mathcal{M}^{(\Delta)} = 0$$

Astuce :
Comme pour la réaction du support, la première condition permet de trouver la force qui s'applique au niveau de la liaison pivot.

Exemple 6 :



On prend $d_1 = 2d_2 = 4d_0 = 1m$ et $m = 10kg$, $m_1 = 60kg$. On cherche pour quelle valeur de m_2 la barre est à l'équilibre.

Équilibre des forces :

$$m_1\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N} + m_2\vec{g} = \vec{0} \;\Rightarrow\; N = (m_1 + m_2 + m)g$$

Finalement on retrouve tout bêtement que le support en O porte le poids de la barre plus m_1 et m_2.

Astuce pratique C'est avec l'équilibre des forces qu'on trouve la réaction du support au niveau de la liaison.

Équilibre des moments :

$$d_0 mg + d_1 m_1 g - d_2 m_2 g = 0 \;\Rightarrow\; m_2 = \frac{d_0 m + d_1 m_1}{d_2}$$

Application 1 : *On reprend l'exemple précédent mais désormais c'est moi qui porte la barre en O. Quel force F et quel couple Γ dois-je appliquer pour maintenir la barre en équilibre ?*
$m = 10kg$, $m_1 = m_2 = 5kg$, $d_1 = 2d_2 = 4d_0 = 1m$.

3 Théorème du moment cinétique et rotation d'un solide

3.1 TMC pour un solide en rotation

Le TMC pour un solide en rotation autour d'un axe (Δ) fixe est très similaire à celui d'un point matériel.

Théorème. TMC pour un solide en rotation
Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Dans un référentiel galiléen :

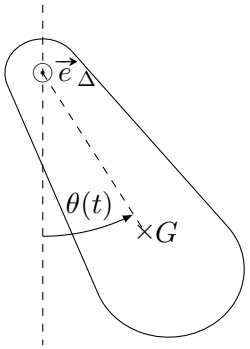
$$J_\Delta \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{M}^{(\Delta)}(\vec{F}) + \Gamma$$

- J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à (Δ)
- $\mathcal{M}^{(\Delta)}$ est le moment d'une force extérieure par rapport) (Δ)
- Γ est l'ensemble des couples appliqués au solide

▶ Pendule pesant

Exemple 7 :

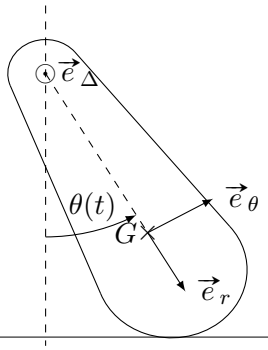
Considérons un pendule massif de masse totale M et de centre de gravité G. Il peut entrer en rotation autour de l'axe Δ passant par le point O. On note J_Δ son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ et ℓ la distance OG. On suppose que la liaison pivot est parfaite, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de frottements au niveau de O.



1. *Montrer que l'équation du mouvement s'écrit*
$$J_\Delta \ddot{\theta}(t) = -mg\ell \sin\theta(t) \ .$$
2. *Montrer que ce pendule est équivalent à un oscillateur pour des petites oscillations.*
3. *Montrer que la quantité*
$$\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta(t)$$
est constante au cours du mouvement. Il s'agit d'une ***intégrale première du mouvement****.*
4. *En déduire la vitesse du centre de passe G en fonction de l'angle θ.*
5. *On prend désormais en compte des frottement fluides au niveau de la liaison pivot. Il s'exerce alors un couple $\Gamma = -\lambda\dot{\theta}$.*
Donner l'équation du mouvement.
6. *En fonction de la valeur de λ, quels types de mouvement peut-on observer ?*

CORRECTION

1. On applique le TMC pour les solides par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$. On repère le mouvement du système par un système de coordonnées polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ pointant vers G.



▷ **Moment cinétique**

$$L^{\Delta} = J_{\Delta} \times \dot{\theta}$$

> ***Remarque :*** *Partie très simple, au pire, on vous demandera de trouver J_{Δ} en composant deux moments (cf Exemple 2)*

▷ **Moment des forces ET DES COUPLES**

Attention ! *à bien préciser les points d'applications*

▷ au niveau de la liaison pivot O
(a) force $\vec{N}$ de norme inconnue mais de moment nul par rapport à Δ
(b) liaison parfaite : pas de frottement donc couple nul $\Gamma = 0$

▷ poids $m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$, s'applique en G avec $\overrightarrow{OG} = l\vec{e}_r$.
Donc $\mathcal{M}^{\Delta} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} \cdot \vec{e}_z = -mgl\sin\theta$

▷ **TMC**, dans un referentiel terrestre galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J\dot{\theta}\right] = -mgl\sin\theta$

Attention ! on n'oublie pas de dériver L^{Δ} !!

Soit $J_{\Delta}\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$.

2. Pour des petites oscillations $\sin\theta \sim \theta$ et on a : $\ddot{\theta} + \dfrac{mgl}{J_{\Delta}}\theta = 0$.
On retrouve bien un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgl}{J_{\Delta}}}$.

3.

Méthode en DS. Intégrale première du mouvement
Deux méthodes :
▷ **approche énergétique** : on exprime l'énergie mécanique E_m pour un système conservatif en explicitant proprement E_c et E_p.
▷ **approche via équation du mouvement** : on multiplie l'équation par $\dot{x}/\dot{\theta}$ et on intègre en 0 et t.

On a alors : $J_{\Delta}\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mgl\sin\theta\dot{\theta}$ ce qui s'intègre en :

$$J_{\Delta}\left(\frac{\dot{\theta}^2(t)}{2} - \frac{\dot{\theta}^2(0)}{2}\right) = mgl\left(\cos\theta(t) - \cos\theta(0)\right)$$

On a alors : $\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}(t)^2 - mg\ell\cos\theta(t) = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}(0)^2 - mg\ell\cos\theta(0) = \text{constante}$

4. On a alors :

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}(0)^2 + \frac{2mgl}{J_{\Delta}}\left(\cos\theta - \cos\theta(0)\right)$$

On obtient la vitesse de G avec $v = l|dot\theta|$.

5. Similaire à la question 1 sauf que la liaison applique un couple $\Gamma = -\lambda\dot{\theta}$ donc :

$$J_{\Delta}\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - \lambda\dot{\theta}$$

6. On écrit l'équation sous forme canonique aux petites oscillations pour faire apparaître un oscillateur amorti et donc expliciter ω_0 et Q :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{J_{\Delta}}\dot{\theta} + \frac{mgl}{J_{\Delta}}\theta = 0$$

On a alors $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgl}{J_{\Delta}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\lambda}{J_{\Delta}}$ soit $Q = \dfrac{1}{\lambda}\sqrt{mglJ_{\Delta}}$.
Suivant les valeurs de Q (comparé à $1/2$) on aura un régime pseudo-périodique, critique ou amorti.

3.2 Approche énergétique d'un solide en rotation

Pour toute cette partie nous allons travailler par analogie avec ce qu'on connaît de la mécanique du point.

Analogie de cette avec le principe fondamentale de la dynamique :

PFD	m	$\vec{v}$	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{a}$	$\vec{F}$
TMC	J_Δ	$\dot{\theta}$	$L^{(\Delta)} = J_\Delta\dot{\theta}$	$\ddot{\theta}$	$\mathcal{M}_\Delta$

On peut alors par analogie définir l'énergie cinétique d'un solide en rotation.

Définition. Energie cinétique d'un solide en rotation
Un solide (S) en rotation autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ possède une énergie cinétique de rotation :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

Cas d'une translation
Si le solide possède un mouvement de translation son énergie cinétique de translation est :

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2$$

avec M la masse du solide et v la vitesse de son centre de masse.
L'énergie totale d'un solide en rotation et translation est la somme des deux :

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

3.3 Puissance d'un moment et puissance d'un couple

La puissance d'une force $\vec{F}$ qui s'applique sur un point matériel M ayant une vitesse $\vec{v}$ est :

$$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Par analogie :

Propriété. Puissance d'un moment
Soit un solide en rotation autour d'un axe (Δ) fixe à la vitesse angluaire $\dot{\theta}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. La puissance du moment de la force $\vec{F}$ est :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}^{(\Delta)}\dot{\theta}$$

On a la même formule pour un couple Γ : $\mathcal{P} = \Gamma\dot{\theta}$.

▶ TEC pour un solide en rotation

On a alors un théorème très similaire au Théorème de l'Energie cinétique mais pour un solide en rotation

Théorème. TEC pour un solide en rotation
Soit un solide en rotation autour d'un axe (Δ) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum\mathcal{P}(\vec{F})$$

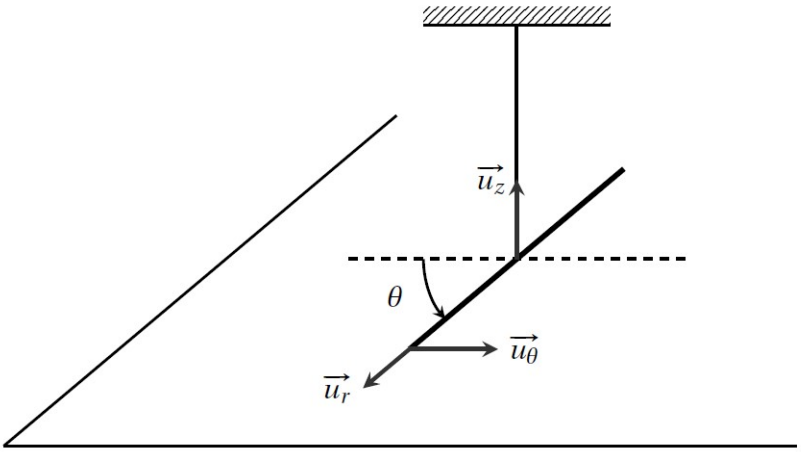
3.4 Application :pendule de torsion et barre reliée à un ressort

▶ Pendule de torsion

Un fil de torsion est un fil mécanique dont une extrémité est fixe et l'autre est libre de tourner sur elle même ($\sim$ s'entortiller). Lorsqu'on tourne le fil de torsion d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre, le fil de torsion exerce sur le solide attaché à son extrémité fixe un couple par rapport à l'axe du fil :

$$\Gamma = -C\theta$$

C est la constante de torsion du fil et θ l'angle du repère cylindrique où $\vec{u}_z$ coïncide avec la barre.



Un pendule de torsion est constitué d'une tige horizontale de longueur L attachée à un fil de torsion (Oz) vertical. On note J le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Oz).

> ***Exemple 8 :***
> 1. *Donner l'équation du mouvement du pendule dont θ est la solution. En déduire la période du mouvement en fonction de C et J*
> 2. *Déterminer une intégrale première du mouvement.*
>
> *Montrer alors qu'on peut associer au couple du fil de torsion une énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$.*
>
> *On attache au bout de la barre deux masses ponctuelles de masse m.*
> 3. *Donner le moment d'inertie J' du système {barre + masses}.*
> 4. *Donner alors la nouvelle période d'oscillation.*
> *Si je rapproche les masses du centre de la barre, comment varie la période ?*

CORRECTION

1. On applique le TMC par rapport à l'axe $\Delta = (O\vec{u}_z)$.
   - ▷ **Moment cinétique**
   $$L^\Delta = J_\Delta \times \dot{\theta}$$
   - ▷ **Moment des forces et des couples**
     - ▷ au niveau du fil de torsion en O
       (a) force $\vec{N}$ de norme inconnue mais de moment nul par rapport à Δ
       (b) fil de torsion donc couple $\Gamma = -C\theta$
     - ▷ poids $m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ s'applique en G donc de moment nul par rapport à Δ.
   - ▷ **TMC**, dans un referentiel terrestre galiléen : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J\dot{\theta}\right] = -C\theta$
     Soit $J_\Delta\ddot{\theta} = -C\theta$, l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{C/J_\Delta}$ soit une période :
     $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

2. On multiplie l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et on intègre pour trouver :

$$\frac{J_\Delta}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^2(0)\right) = \frac{C}{2}\left(\theta^2 - \theta^2(0)\right)$$

On peut alors identifier le terme de gauche à l'énergie cinétique de la barre en rotation et celui de droite à une énergie potentielle associée au couple du fil de torsion : $E_p = C\theta^2/2$.

3. Le nouveau moment d'inertie est la somme de celui de la barre plus ceux des deux masses ponctuelles soit :

$$J'_\Delta = J_\Delta + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = J_\Delta + \frac{mL^2}{2}$$

La nouvelle période des oscillations est alors :

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta + mL^2/2}{C}}$$

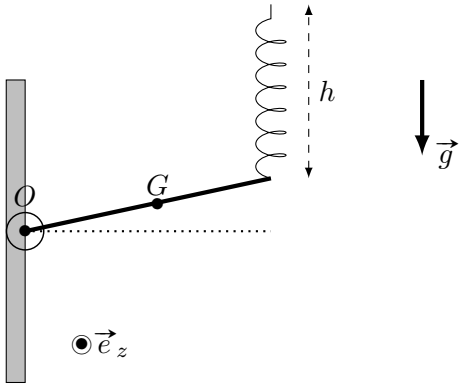
Au fur et à mesure que je rapproche les deux masses, la longueur L diminue dans l'expression de T'_0 donc T'_0 diminue et tend vers T_0.

► Barre reliée à un ressort

> ***Application 2 :*** *On considère un tige homogène de masse m et de longueur a, fixée à une de ses extrémités par une liaison pivot parfaite d'axe (Oz) orthogonal à la tige. Son autre extrémité A est reliée à un ressort verticale. L'autre extrémité du ressort est attachée à une poutre horizontale.*
> *On appelle k et l_0 la raideur et la longueur à vide du ressort et h la longueur du ressort lorsque la barre est à l'équilibre.*
>
> 1. *Représenter le système à l'équilibre sur un schéma et faire un bilan des forces.*
> 2. *Donner le lien entre h, k, l_0, g et m.*
> 3. *On s'intéresse désormais aux oscillations verticales de la barre autour de sa position d'équilibre horizontale. Montrer que la période des oscillations verticale de la barre autour de la position d'équilibre est :*
>
> $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$
>
> *On rappelle que pour $x << 1$: $\cos x \simeq 1$ et $\sin x \simeq x$ et on donne $J_\Delta = al^2/3$.*

CORRECTION *(succincte)*

Le plus dur est de faire un schéma **propre**!! après tout roule ...



Différents moments à l'équilibre :

▷ moment du poids : $-mg\frac{a}{2}\cos\theta_{eq}$

▷ moment du ressort : $k\,(h - l_0)\,a\cos\theta_{eq}$

$$\frac{mg}{2} = k(h - l_0)\ \text{, à l'équilibre}$$

Lorsque la barre oscille, le moment du ressort est $k\,(h - a\sin\theta - l_0)\,a\cos\theta_{eq}$ donc

$$J_\Delta\ddot{\theta} = -mg\frac{a}{2}\cos\theta + k\,(h - a\sin\theta - l_0)\,a\cos\theta$$

pour des petites oscillations, et avec le lien entre h, m et g :

$$\ddot{\theta} + \frac{ka^2}{J_\Delta}\theta = 0$$

on exprime $J_\Delta = ma^2/3$ et on trouve le résultat.

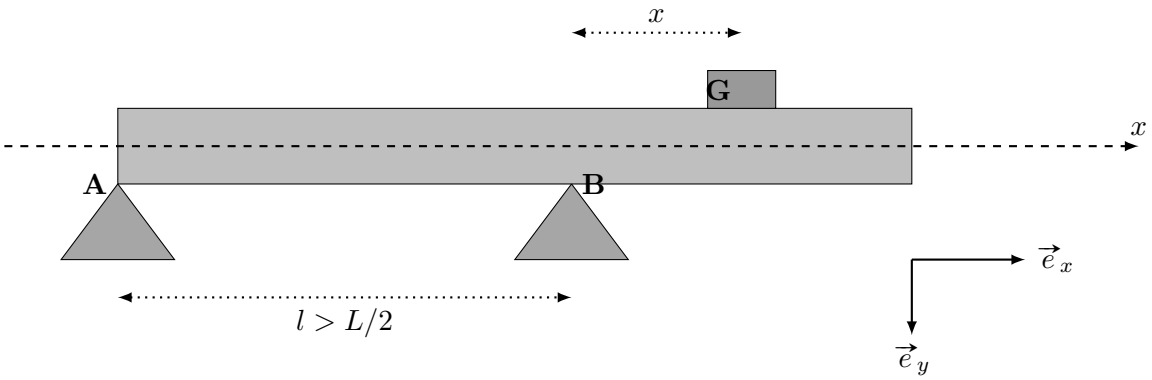
μDM

Mécanique du solide

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Equilibre sur une poutre

Une poutre homogène de masse $m_p = 40kg$ et de longueur L repose sur deux supports A et B séparés par l. Son moment d'inertie par rapport à l'axe $(B, \vec{e}_z)$ est noté $J_B = \frac{1}{9} m_p L^2$ et son centre d'inertie, noté G, est situé à une distance L/2 de A. Pendant tout l'exercice on négligera l'épaisseur de la poutre, si bien que A, G, B et C sont alignés.
Une gymnaste de masse ponctuelle $m_C = 50kg$ se déplace le long de cette poutre en partant de son extrémité A. Elle est repérée par le point C de coordonnées x.



La poutre est immobile

1. Faire un bilan des différentes forces qui s'exercent sur la poutre et les représenter sur un schéma clair.
2. Préciser sur le schéma le sens positif de mesure des angles.
3. Montrer que la réaction du support en A est :

$$R_A = \frac{g}{l}\left(m_p(l - \frac{L}{2}) - m_c x\right)$$

4. Exprimer la réaction du support en B en fonction de la réaction en A, m_p, m_C et g.
5. Donner la valeur de R_A au moment de la bascule de la poutre.
6. Déterminer l'expression de la distance x_{max} à laquelle peut s'éloigner la gymnaste tout en conservant la poutre horizontale, en fonction de m_p, m_C, L, l.
   Que se passe-t-il si $l < L/2$?

La poutre bascule

On suppose que la gymnaste se place juste à $x_{max} + \varepsilon$ (ε>0 et $\varepsilon << \ell$) et que la poutre se met à basculer autour de B sans vitesse initiale et sans glissement. Il existe alors au niveau du point B une réaction perpendicualire à la poutre $\vec{N}_B$ et une réaction tangente $\vec{T}_B$. On appelle f le coefficient de frottement solide (lois de Coulomb) entre la poutre et le contact en B.

On note θ, l'angle que forme la poutre avec l'horizontale. On prendra $\theta > 0$.

7. Faire un schéma clair de la nouvelle situation envisagée, en représentant les actions exercées (on indiquera bien les composantes normale $\vec{N}_B$ et tangentielle $\vec{T}_B$ de la réaction en B) et d'une autre couleur la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ associée au degré de liberté θ.
8. Soit S le système constitué de la poutre et de la gymnaste. Exprimer le moment d'inertie de S, noté J_S, par rapport à l'axe $(B, \vec{e}_z)$ en fonction de J_B, m_c, x_{max} et ε.
9. A l'aide du théorème du moment cinétique appliqué à l'ensemble {gymnaste+poutre}, montrer que l'équation du mouvement pour θ(t) est :

$$J_S\ddot{\theta} = \varepsilon \cos\theta m_c g$$

10. En déduire une expression de $\dot{\theta}^2$(t) en fonction de m_C, g, J_s, ε et θ.
Question bonus
11. (*) Le centre de gravité G' de l'ensemble {gymnaste+poutre} se situe à une abscisse

$$x_{G'} = \frac{m_c}{m_c + m_p}\varepsilon$$

Projeter le PFD sur les deux directions de la base polaire et en déduire les composantes normale et tangentielle de la réaction en B en fonction de θ, g, m_p, m_C, ε et J_s.
12. (*) A partir de quel angle le glissement commence-t-il ?

μDM

Mécanique du solide

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Equilibre sur une poutre

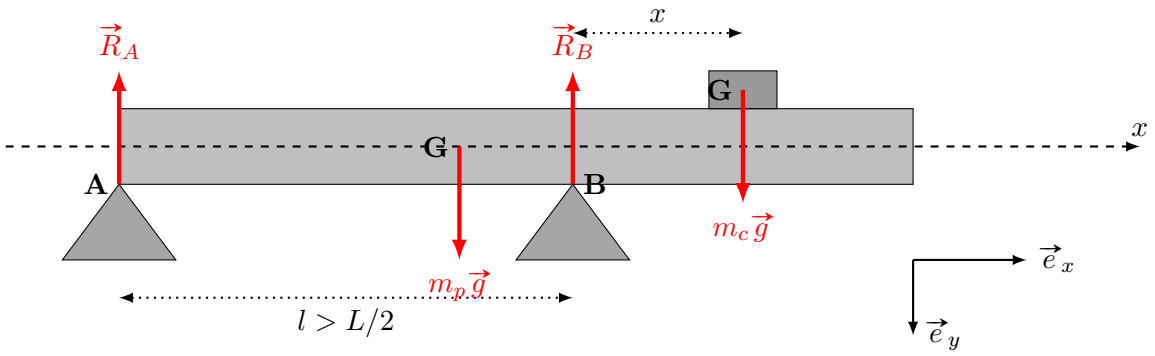
Avant toute chose ! !

On prend le temps de bien placer

▷ le point de l'axe de rotation : ici, si la poutre bascule, elle tournera autour du point B.

▷ les centres de masses : celui de la poutre G, situé au centre de la poutre, à $L/2$ du point A.

La poutre est immobile



1.

▷ **Point** A : réaction du support $\vec{R}_A = -R_A\vec{e}_y$

▷ **Point** B : réaction du support $\vec{R}_B = -R_B\vec{e}_y$

▷ **Point** G : poids de la poutre $m_p\vec{g} = -m_pg\vec{e}_y$

▷ **Point** C : poids du gymnaste $m_c\vec{g} = -m_cg\vec{e}_y$

2. On remarque ici que l'orientation des vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ de la base sont "à l'envers" : cela signifie que le sens de mesure des angles est inversé. Un angle est positif s'il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.
Cela a de l'importance quand on s'intéressera au signe des moments calculé.

3. On calcule le moment de chaque force par rapport au point B. (*par réflexe, on peut réaliser cette étape lors du bilan des forces !*)

> ***Remarque :*** *Pour ce genre de cas, il peut être utile d'utiliser le bras de levier : $\mathcal{M} = \pm$bras de levier $\times$ Force.*
> *Sinon, on calcule* ***rapidement*** *les moments : $\mathcal{M} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_z$ avec O le point de rotation et M le point d'application de la force.*

▷ **Point** A : réaction du support $\mathcal{M} = +R_Al$

▷ **Point** B : réaction du support $\mathcal{M} = 0$ car s'applique en B, l'axe de rotation.

▷ **Point** G : poids de la poutre $\mathcal{M} = -m_pg(l - L/2)$

▷ **Point** C : poids du gymnaste $\mathcal{M} = +m_cgx$

▷ **TMC pour un solide en rotation à l'équilibre**

$$0 = +R_Al - m_pg(l - L/2) + m_cgx \;\Rightarrow\; R_A = \frac{g}{l}\left(m_p(l - \frac{L}{2}) - m_cx\right)$$

4. Mouvement (ou équilibre d'un solide) $\iff$ $\begin{cases} \text{Rotation} \Rightarrow \text{TMC} \\ \text{Translation} \Rightarrow \text{PFD} \end{cases}$ On a utilisé le TMC, reste le

PFD : à l'équilibre, la somme des forces extérieures est nulle

$$-R_A - R_B + m_p g + m_c g = 0 \;\Rightarrow\; R_B = R_A - g(m_c + m_p)$$

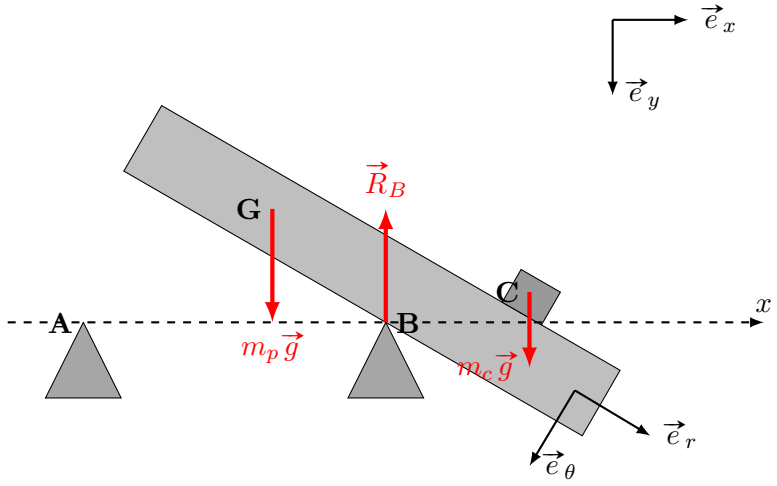
5. Lorsque le poutre bascule, elle décolle en A donc $R_A = 0$.
6. On a alors :

$$\frac{g}{l}\left(m_p(l - \frac{L}{2}) - m_c x\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{m_p}{m_c}\left(l - \frac{L}{2}\right)$$

On remarque que si $l < L/2$, $x_{max} < 0$: la gymnaste ne peut pas être à droite du point B sans que la poutre ne bascule.

La poutre bascule

7.



8. On compose les moments d'inertie :

$$J_S = J_B + J(\text{gymnaste}) = J_B + m_c(x_{\max} + \varepsilon)^2$$

9. *On applique la* ***méthode ! !***
   - ▷ **Cinématique :** $L_S = J_S\dot{\theta}$.
   - ▷ **Bilan des $\vec{F}$ et $\mathcal{M}$ et Γ**
     - ▷ poids de la poutre $m_p\vec{g} = m_p g\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$ en G

$$\mathcal{M} = \overrightarrow{BG} \wedge m_p\vec{g} \cdot \vec{e}_z = -(l - L/2)\,\vec{e}_r \wedge m_p g\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = -(l - L/2)m_p g\cos\theta$$

     - ▷ poids de la gymnaste $m_c\vec{g} = m_c g\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$ en C

$$\mathcal{M} = \overrightarrow{BC} \wedge m_p\vec{g} \cdot \vec{e}_z = (x_{\max} + \varepsilon)\,\vec{e}_r \wedge m_c g\,(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = (x_{\max} + \varepsilon)m_c g\cos\theta$$

     - ▷ réaction du support $\vec{R}_B$ en B, moment nul car s'applique sur l'axe
     - ▷ pas de couple extérieur

   - ▷ **TMC :** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_S\dot{\theta}\right] = -(l - L/2)m_p g\cos\theta + (x_{\max} + \varepsilon)m_c g\cos\theta$

$$J_S\ddot{\theta} = \varepsilon\cos\theta m_c g + g\cos\theta\,\underbrace{(-(l - L/2)m_p + x_{\max}m_c)}_{=0}$$

par définition de $x_{\max}$ la parenthèse s'annule et on a bien $J_S\ddot{\theta} = \varepsilon\cos\theta m_c g$.

10. *C'est la méthode de l'intégrale première du mouvement :* on multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre !

$$J_S\ddot{\theta}\dot{\theta} = \varepsilon m_c g\cos\theta\dot{\theta} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}J_S\dot{\theta}^2 - \varepsilon m_c g\sin\theta\right]$$

On évalue l'intégrale première du mouvement en $t = 0$: $\dot{\theta}(0) = 0$ (pas de vitesse) et $\theta(0) = 0$ (poutre horizontale) donc :

$$\frac{1}{2}J_S\dot{\theta}^2 - \varepsilon m_c g\sin\theta = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2\varepsilon m_c g}{J_S}\sin\theta}$$

Question bonus : (correction plus rapide)

11. (*) L'accélération du centre de gravité G' est : $\vec{a} = -\frac{m_c}{m_c+m_p}\varepsilon\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \frac{m_c}{m_c+m_p}\varepsilon\ddot{\theta}$.
Les différentes forces projetées donnent :

$$\begin{cases} -(m_c+m_p)\frac{m_c}{m_c+m_p}\varepsilon\dot{\theta}^2 = -T + g(m_p+m_c)\sin\theta \\ \\ (m_c+m_p)\frac{m_c}{m_c+m_p}\varepsilon\ddot{\theta} = -N + g(m_p+m_c)\cos\theta \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} T = +g(m_p+m_c)\sin\theta + m_c\varepsilon\dot{\theta}^2 \\ \\ N = g(m_p+m_c)\cos\theta - m_c\varepsilon\ddot{\theta} \end{cases}$$

12. (*) Le glissement commence lorsque $T > fN$ soit pour :

$$g(m_p+m_c)\sin\theta + m_c\varepsilon\dot{\theta}^2 > fg(m_p+m_c)\cos\theta + fm_c\varepsilon\ddot{\theta}$$

En remplaçant $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ avec les expression trouvées précédemment on trouve :

$$g(m_p+m_c)\sin\theta + m_c\varepsilon \times \frac{2\varepsilon m_c g}{J_S}\sin\theta > fg(m_p+m_c)\cos\theta - fm_c\varepsilon \times \frac{\varepsilon}{J_S}\cos\theta m_c g$$

Plus qu'à résoudre ....

$$\left(m_p + m_c + 2\frac{\varepsilon^2 m_c}{J_S}m_c\right)\sin\theta > f\left(m_p + m_c - \frac{\varepsilon^2 m_c}{J_S}m_c\right)\cos\theta$$

Donc $\tan\theta > \dfrac{m_p + m_c - \dfrac{\varepsilon^2 m_c}{J_S}m_c}{m_p + m_c + 2\dfrac{\varepsilon^2 m_c}{J_S}m_c}$

TD19

Mouvement des solides

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Équilibre d'un solide

Exercice 1 - Portage de poutre : équilibre d'un solide :

Deux personnes portent une poutre de longueur $2L$ et de masse m. Une personne se trouve tout à l'arrière de la poutre (point M), l'autre se situe à une distance d en avant du centre de gravité G de la poutre (point N). On suppose que les forces exercées par les deux personnes sont verticales.

▷ Si les personnes ont la même taille, la poutre est horizontale.

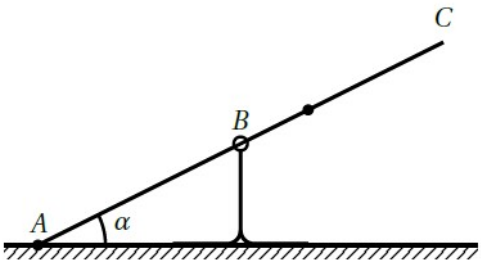
1. Faire un schéma. Les forces exercées par les deux personnes sont-elles les mêmes ?
2. Déterminer, dans ce cas, les normes des forces exercées en M et en N par les deux personnes.

▷ Les personnes montent alors un escalier, toujours en tenant la poutre.

1. Faire un schéma de la situation. Les forces exercées par les deux personnes sont-elles les mêmes ?
2. Déterminer à nouveau les normes des forces exercées en M et N par les deux personnes. Commentaires ?

Exercice 2 - Bascule d'une balançoire :

Un enfant de masse $m = 15\text{kg}$ est assis à l'extrémité A d'un trébuchet de longueur $AC = 2L = 2,5\text{m}$ qui repose sur le sol et fait un angle α avec l'horizontale. Son grand-frère, de masse $m_0 = 25\text{kg}$, part du point B et marche lentement vers l'extrémité C. Quand le trébuchet bascule-t-il ?



Rotation d'un solide

Exercice 3 - Chute d'un arbre :

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol noté I. On suppose que le point d'abscisse reste fixe et ne glisse pas. On repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = mL^2/3$.

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ, avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut

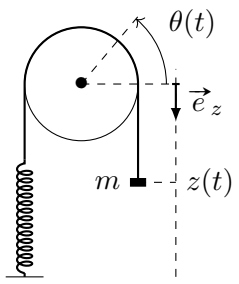
$$\dot{\theta} = \sqrt{3g(\cos\theta_0 - \cos\theta)/L}.$$

Astuce : on pensera à multiplier l'équation précédente par $\dot{\theta}$ pour intégrer plus facilement.

3. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ et on donne pour $\theta_0 = 5°$: $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5,1.$

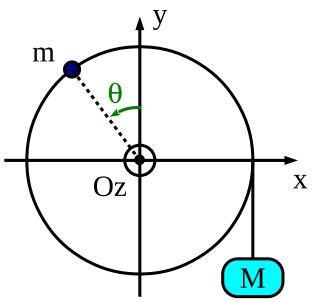
Exercice 4 - Oscillations d'un système complexe :

On considère le système ci-dessous, constitué par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, une poulie de rayon R pouvant tourner sans frottement autour d'un axe fixe Δ horizontal et d'un objet ponctuel de masse m. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation vaut $J = m_p R^2/2$ avec m_p la masse de la poulie. Le fil est supposé idéal et entraîne la poulie en rotation sans glisser sur celle-ci.



1. Refaire le schéma et indiquer le lieux d'application sur la poulie et le sens de la tensions du fil et de la force de rappel du ressort.
2. Exprimer les moments appliqués à la poulie par rapport au centre de celle-ci de la tension du fil et de la force de rappel du ressort. On exprimera l'expression de la tension en appliquant la seconde loi de Newton sur la masse m.
3. En déduire l'élongation du ressort à l'équilibre.
4. Justifier la relation entre les vitesses : $R\dot{\theta} = -\dot{z}$.
5. En appliquant le TMC à la poulie **et** le PFD à la masse ponctuelle m, trouver l'équation d'évolution de θ. En déduire la période d'oscillation.

Exercice 5 - Disque lesté :



Une poulie de rayon a est mobile sans frottement autour de son axe horizontal. On note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. La poulie est lestée d'une masse m à sa périphérie
Un fil inextensible sans masse est enroulé autour de la poulie et une masse M est accrochée à son extrémité.
On repère la masse m par l'angle θ par rapport à la verticale.

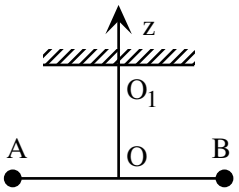
1. Donner le moment d'inertie J' de l'ensemble {poulie + masse m}.
2. Exprimer les moments des poids de m et M.
3. A l'aide du TMC des solides, établir une équation différentielle du second ordre en θ.
4. Donner une condition sur m et M pour qu'il y ait une position d'équilibre.

Exercice 6 - Pendule de torsion par la méthode énergétique :

On considère un bâton homogène (longueur l, masse m, moment d'inertie J_z) accroché à son centre d'inertie par une ficelle. Le bâton est donc horizontal et peut tourner autour de l'axe (Oz). La position du bâton est repérée par l'angle θ. La ficelle exerce sur le bâton un couple de torsion $\overrightarrow{\mathcal{M}}_0 = -C\theta\vec{e}_z$ où C est une constante.

1. Calculer la puissance du couple de torsion, ainsi que le travail W du couple entre deux angles θ_1 et θ_2.
2. Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle de torsion associée à ce couple. La déterminer.
3. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, trouver l'équation du mouvement du bâton.
4. Le couple de torsion est souvent nommé couple de rappel. Justifier.

Exercice 7 - Pendule de torsion avec frottements :



Une balance de torsion est constituée d'une tige AB, de centre O et de longueur L. Aux extrémités de cette tige, on dispose deux sphères en platine de masse m_1. Le fléau est suspendu à un fil de torsion, colinéaire à l'axe (Oz). L'ensemble constitue un pendule de torsion dont le moment d'inertie par rapport à Oz est noté J.

C désigne la constante de torsion. Lorsque la tige tourne d'un angle θ autour de l'axe Oz, le fil de torsion OO_1 exerce sur la tige un couple de rappel élastique de moment $-C\theta$ par rapport à Oz.

On tient compte du couple de frottement fluide de moment $-\alpha\omega$ par rapport à Oz, ω étant la vitesse angulaire du système en rotation et α un coefficient de frottement positif.

1. Montrer que l'on obtient des oscillations amorties lorsque α est inférieur à une valeur α_1 que l'on calculera. Donner l'expression de la pseudo-période T.
2. Soit μ la masse linéique de la barre : un portion de la barre de longueur dx possède une masse μdx. En sommant toutes les petites masses qui composent la barre entre $x = -L/2$ et $x = L/2$:
   (a) Montrer que le moment d'inertie de la barre par rapport à (Oz) est $J_b = \dfrac{\mu L^3}{12}$
   (b) En déduire le moment d'inertie totale du pendule de torsion :

$$J = \frac{mL^2}{12} + \frac{m_1 L^2}{2}$$

Exercice 8 - Mise en rotation d'un moteur :

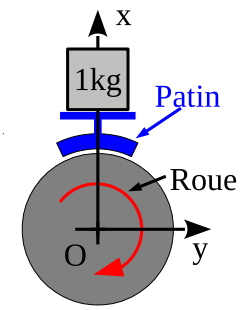
On étudie la phase de mise en rotation du rotor S (partie tournant) d'un moteur de robotique dans le référentiel terrestre. Le rotor S, de moment d'inertie $J = 10.7 \times 10^{-7}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ est soumis à un couple moteur C_m dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant i traversant le stator (partie fixe) du moteur :

$$C_\mathrm{m} = ki \qquad \text{avec} \qquad k = 22 \times 10^{-3}\,\mathrm{N \cdot m/mA}\ .$$

Le courant i est constant : $i = I_0 = 0.1\,\mathrm{A}$. On suppose que le centre de masse G du rotor est sur l'axe de rotation Δ.

1. On néglige tous les frottements.
   (a) En utilisant le TMC, écrire l'équation donnant la vitesse angulaire $\dot\theta$ de S.
   (b) La résoudre en supposant qu'au départ S est au repos.
   (c) Déterminer et calculer le temps T_0 mis pour atteindre la vitesse $\omega_0 = 1800\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
2. En réalité, le rotor S est soumis à un couple de frottement sec $C_\mathrm{s} = -400\,\mu\mathrm{N \cdot m}$ et à un couple de frottement fluide $C_\mathrm{f} = -\lambda\dot\theta$ avec $\lambda = 10^{-6}\,\mathrm{N \cdot m \cdot s}$, tous deux s'opposant au mouvement.
   (a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\dot\theta$.
   (b) Quelle est la vitesse angulaire maximale que pourra atteindre le moteur ?
   (c) Déterminer le temps T mis pour atteindre le régime permanent (à 5%). Conclure.

Exercice 9 - Freinage d'une roue :



Une roue de masse $m = 2$ kg et de rayon $R = 40$ cm tourne librement à $\omega_0 = 600$ tr/min autour d'un axe fixe. Son moment d'inertie est $J = \frac{1}{2}mR^2$. Un patin de frein de masse négligeable est appuyé sur le bord de la roue par une masse de $M = 1$ kg. Ce dernier applique sur la roue une force normale $N = Mg$.
On note $\mu = 0,5$ le coefficient de frottement dynamique entre la roue et le patin de frein.

1. Représenter sur un schéma les forces qui s'appliquent sur la roue. Faire un bilan des actions qui en découle.
2. Montrer que le travail des actions extérieures sur la roue entre deux positions θ_i et θ_f est :

$$W = -\mu RMg(\theta_f - \theta_i)$$

3. En déduire le nombre de tour que va faire la roue avant de s'arrêter.

TD19

Mouvement des solides

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Équilibre d'un solide

Exercice 1 - Portage de poutre : équilibre d'un solide :

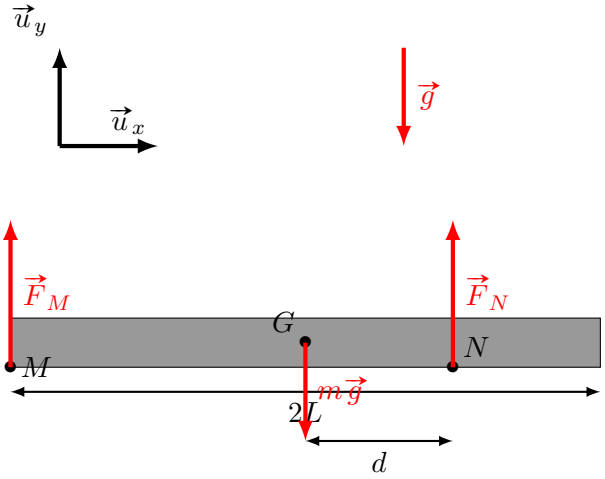
*On commence évidemment par un **SCHEMA** de la situation où on fait apparaître :*

- le centre de masse
- le point autour duquel se fait la rotation
- les éventuels point où des forces s'appliquent

*La suite, ce sera **toujours** le même déroulé !!*

A l'horizontale

- **Bilan des $\vec{F}$ et des $\mathcal{M}$**
  - en M : $\vec{F}_M = +F_M\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = -F_M L$
  - en N : $\vec{F}_N = +F_N\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = +F_N d$
  - en G : $m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = 0$ (car sur l'axe de rotation)
- **TMC** par rapport à G équilibre donc : $F_M L - F_N d = 0$
- **PFD** au centre de masse G équilibre donc : $F_M + F_N - mg = 0$



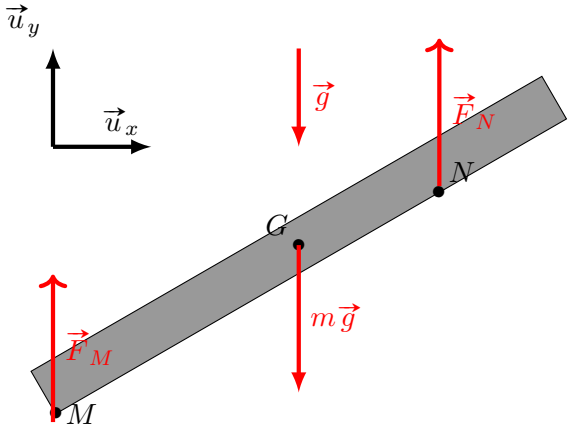
On trouve facilement que $F_M = \dfrac{2d}{L}F_N$ et donc :

$$\frac{d}{L}F_N + F_N - mg = 0 \;\Rightarrow\; F_N = \frac{mg}{1+d/L} \text{ et } F_M = \frac{d}{L}\frac{mg}{1+d/L}$$

Comme $d < L$ alors $F_N > F_M$: mieux vaut se mettre à l'extrémité.

Penché on appelle α l'angle entre la poutre et l'horizontale.

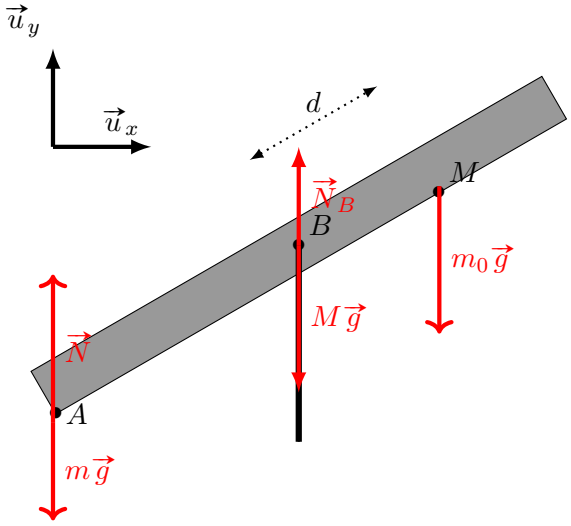
- **Bilan des $\vec{F}$ et des $\mathcal{M}$**
  - en M : $\vec{F}_M = +F_M\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = -F_M L\cos\alpha$
  - en N : $\vec{F}_N = +F_N\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = +F_N d\cos\alpha$
  - en G : $m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = 0$ (car sur l'axe de rotation)
- **TMC** par rapport à G équilibre donc : $LF_M\cos\alpha - F_N d\cos\alpha = 0$
- **PFD** au centre de masse G équilibre donc : $F_M + F_N - mg = 0$



Les cosinus se simplifient et donc on retrouve mes mêmes résultats qu'à la question précédente.

Exercice 2 - Bascule d'une balançoire : *Très similaire au cas précédent quand la poutre est incliné*

▷ **Bilan des $\vec{F}$ et des $\mathcal{M}$**
- ▷ en A :
  réaction du sol $\vec{N}_A = +N_A\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = -N_A L\cos\alpha$
  poids de l'enfant $m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = +mgL\cos\alpha$
- ▷ en M : poids du grand frère $m_0\vec{g} = -m_0 g\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = +m_0 gd\cos\alpha$
- ▷ en B :
  poids de la barre $M\vec{g} = -Mg\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = 0$ (car sur l'axe de rotation)
  réaction de la liaison $\vec{N}_B = +N_B\vec{u}_y$ et $\mathcal{M} = 0$ (car sur l'axe de rotation)



▷ **TMC** par rapport à G équilibre donc :

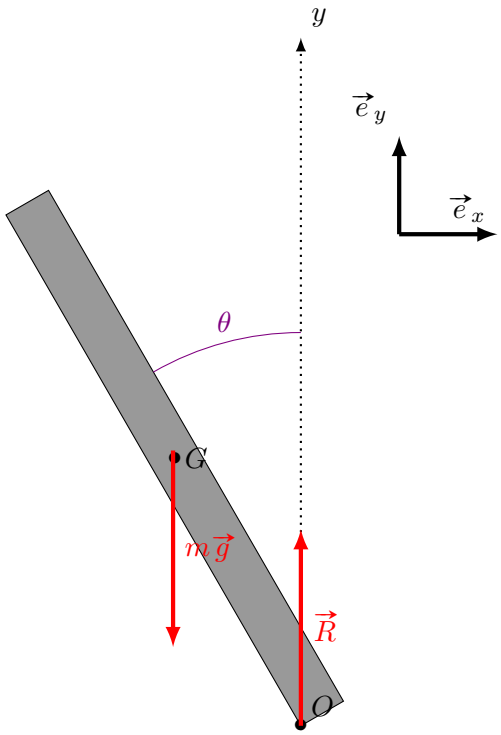
$$+mgL\cos\alpha - N_A L\cos\alpha - m_0 gd = 0 \;\Rightarrow\; N_A = \frac{m_0 d - mL}{L}g$$

Quand ça bascule, N_A s'annule et donc $d = \dfrac{m}{m_0}L$.

> ***Remarque :*** *Ici le PFD ne servirait qu'à trouver $\vec{N}_B$ ce qui n'a pas d'intérêt pour l'exercice*

Rotation d'un solide

Exercice 3 - Chute d'un arbre :



Bilan des $\vec{F}$ et des $\mathcal{M}$

▷ **en G :**
poids de l'arbre $m\vec{g} = mg\left(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y\right)$
$\mathcal{M} = mgL\sin\theta$

▷ **en O :**
:réaction du support $\vec{R}$ de moment nul car s'applique sur l'axe

Moment cinétique
$L_S = I\dot{\theta}$ avec $I = mL^2/3$.

1. **TMC** par rapport à l'axe $(O, \vec{e}_z)$.

$$I\ddot{\theta} = mgL\sin\theta$$

2. On cherche $\dot{\theta}$ en fonction de θ (*ou bien parce qu'on se sait pas faire autre chose*) $\Rightarrow$ intégrale première du mouvement

$$I\ddot{\theta}\dot{\theta} = mgL\dot{\theta}\sin\theta$$

Avec comme **CI**, $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$ on trouve :

$$\frac{I}{2}\dot{\theta}^2 = -mgL\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

On a bien, en remplaçant I : $\dot{\theta} = \sqrt{3g(\cos\theta_0 - \cos\theta)/L}$.

3. On écrit $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ et on applique une séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}}\mathrm{d}t$$

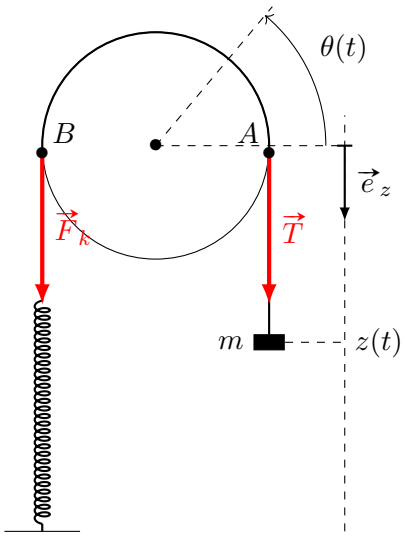
Et on intègre entre $t = 0$ et T, le temps de chute. L'angle θ varie alors de θ_0 à $\pi/2$.

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta_0 - \cos\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \int_0^T \mathrm{d}t \;\Rightarrow\; 5,1 = \sqrt{\frac{3g}{L}}T$$

On trouve alors $T = 5,1\sqrt{\dfrac{L}{3g}}$.

Exercice 4 - Oscillations d'un système complexe :

1.



2. *On remarque qu'ici, il n'est pas utile d'utiliser une base polaire : la base cartésienne est bien plus pratique !*
   - ▷ **en A**
     force de rappel du ressort $\vec{F}_k = -k(l - l_0)(-\vec{e}_z)$ donc $\mathcal{M} = +k(l - l_0)R$
     Attention ! l dépend de la rotation de la poulie !
   - ▷ **en B**
     tension du fil $\vec{F}_k = -T\vec{e}_z$) donc $\mathcal{M} = -TR$
     Attention ! T est inconnue, on la trouve à l'aide du PFD sur m

$$m\ddot{z} = mg - T \;\Rightarrow\; T = mg - m\ddot{z}$$

3. A l'équilibre, rien ne bouge donc $\ddot{z} = 0$ et $T = mg$. On a alors le TMC appliquée à la poulie qui donne :

$$k(l_{eq} - l_0)R - mgR = 0 \;\Rightarrow\; l_{eq} = l_0 + mg/k$$

4. Le fil autour de la poulie est de longueur fixe ; quand la masse descend (*i.e.* z augmente), la poulie tourne pour dérouler la longueur de fil nécessaire. On a donc $\dot{z} = -R\dot{\theta}$.
   De la même façon, la longueur du ressort dépend de la rotation de la poulie : $l = l_{eq} - R\theta$

5. Le TMC appliquée à la poulie donne :

$$J\ddot{\theta} = k(l_{eq} - R\theta - l_0)R - (mg + mR\ddot{\theta})R \;\Rightarrow\; \ddot{J} + \frac{kR^2}{J + mR^2}\theta = k(l_{eq} - l_0) - mgR = 0$$

La période est alors $2\pi\sqrt{\dfrac{J + mR^2}{kR^2}}$.

Exercice 5 - Disque lesté :

Similaire à l'exercice précédent : il faut refaire tranquillement les même étapes. La correction est plus succincte.

1. Quelle que soit la position de m, elle est toujours à une distance R du centre de la poulie. Donc
$$J' = J_{\text{poulie}} + J_{\text{masse}} = J + ma^2$$
2. ▷ Poids de m : $\mathcal{M} = mga\sin\theta$
▷ Poids de M : $\mathcal{M} = -Mga$
3. *On reprend le principe d'étude de l'exercice précédent :* ***TMC*** *sur la poulie et* ***PFD*** *sur la masse M*
$$\left(J + (M+m)a^2\right)\ddot{\theta} - mga\sin\theta = -Mga$$
Attention ! le terme $Ma^2\ddot{\theta}$ provient de la tension du fil, pas du moment d'inertie !!
4. Pour une position d'équilibre, on va chercher une solution particulière θ_{eq}
$$-mga\sin\theta_{eq} = -Mga \;\Rightarrow\; \sin\theta_{eq} = \frac{M}{m}$$
Pour qu'il y ait une position d'équilibre, il faut alors que $M < m$.

Exercice 6 - Pendule de torsion par la méthode énergétique :

Attention ! *Objectif : calculer le travail d'un couple !!!*

1. **Puissance/Travail d'un couple Γ :** $\mathcal{P} = \Gamma\dot{\theta}$
Ici $\mathcal{P} = -C\theta\dot{\theta}$ donc $\delta W = \mathcal{P}\mathrm{d}t = -C\theta\mathrm{d}\theta$.
$$W = \int \delta W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -C\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}C\left(\theta_2^2 - \theta_1^2\right)$$
2. On peut alors définir une énergie potentielle E_p de telle sorte à ce que $W = E_p(\theta_1) - E_p(\theta_2)$ soit donc $E_p(\theta) = \dfrac{C}{2}\theta^2$.
3. **TPC :** $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$ avec $E_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$. Donc :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right] = -C\theta\dot{\theta} \;\Rightarrow\; J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -C\theta\dot{\theta}$$
On trouve alors l'équation du mouvement $J\ddot{\theta} = -C\theta$.
4. Un couple de torsion se comporte vis-à-vis des angles comme une force de rappel élastique d'un ressort, d'où le nom.

Exercice 7 - Pendule de torsion avec frottements :

Attention ! *On n'oublie pas les oscillateurs amortis. De plus, on voit en Q2 la méthode de calcul d'un moment d'inertie via l'intégrale. Intéressant à regarder en deuxième lecture ....*

1. On doit trouver, via le TMC, l'équation différentielle :
$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$$
On se rappelle que dans le cas d'un oscillateur amorti $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = ...$, les 3 régimes sont
▷ apériodique $Q < 1/2$
▷ critique $Q = 1/2$
▷ pseudo-périodique $Q > 1/2$

2.(a) Par définition $J = \sum mr^2$. La barre est composée d'une infinité de petite masse donc $\sum \to \int$.

$$J_b = \int_{\text{barre}} r^2 \mathrm{d}m \text{ avec } \mathrm{d}m \text{ la masse d'un petit morceau de barre soit } \mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}r$$

Finalement $J_b = \int_{-L/2}^{+L/2} \mu r^2 \mathrm{d}r = \mu \left(\frac{(L/2)^3}{3} - \frac{(-L/2)^2}{3} \right) = \frac{\mu L^3}{12}$.

(b) Par composition des moments d'inertie $J = J_b + J_A + J_B = \mu \frac{L^3}{12} + m_1(L/2)^2 + m_1(L/2)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{m_1 L^2}{2}$

Exercice 8 - Mise en rotation d'un moteur :

Attention ! *La situation est un peu flou : c'est le but de l'exercice ! Même si je ne saisis pas très bien ce qu'il se passe :* ***je fais ce que je sais faire, i.e. le TMC ! ! !***

1.(a) ▷ **Bilan des $\mathcal{M}$**

▷ poids du rotor : moment nul car s'applique sur l'axe de rotation
▷ couple moteur $C_\mathrm{m} = ki$

▷ **Moment cinétique**
$L_S = J\dot{\theta}$
▷ **TMC** : $J\ddot{\theta} = ki$

(b) On intègre avec comme **CI** $\dot{\theta}(0) = 0$: $\dot{\theta}(t) = \frac{ki}{J}t$.

(c) On veut $\dot{\omega}(T_0) = \omega_0 \Rightarrow T_0 = \frac{J\omega_0}{ki}$.

2.(a) On ajoute $-\lambda\dot{\theta}$ dans le TMC : $J\ddot{\theta} = ki - \lambda\dot{\theta}$. On l'écrit sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\lambda}{J}}_{=1/\tau} \dot{\theta} = \frac{ki}{J}$$

(b) On résout (solution particulière+solution homogène+**CI**) $\Rightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{ki}{\lambda}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

La vitesse angulaire maximale est alors $\dot{\theta}_{max} = \frac{ki}{\lambda}$.

(c) Temps pour atteindre le régime permanent : $\mathcal{T} = 5\tau = 5\frac{J}{\lambda}$.

Exercice 9 - Freinage d'une roue :

Attention ! *On utilise ici le* ***TEC*** *: variation d'énergie cinétique de rotation = travail des moments. Il convient alors de calculer le travail d'un moment : c'est le but de l'exercice.*

1. On se rappelle les lois de Coulomb : si glissement $T = fN$ avec $N = Mg$. De pus $\vec{T}$ s'oppose au mouvement, donc ici à la rotation de la roue : $\vec{T} = -fMg\vec{e}_y$ et $\mathcal{M} = -fMgR$
Attention ! au sens positif de mesure des angles : ici le sens horaire ! !

2. Le travail est $\delta W = \mathcal{P}\mathrm{d}t$ avec $\mathcal{P} = \mathcal{M}\dot{\theta}$. On a alors pour l'action au niveau du pation :

$$\delta W = -fMgR\dot{\theta}\mathrm{d}t = -fMgR\mathrm{d}\theta \text{ donc } W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -fMgR\mathrm{d}\theta = -fMgR\,(\theta_2 - \theta_1)$$

3. On utilise la variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c = W$ entre le roue qui tourne $\dot{\theta} = \omega_0$ et la roue à l'arrêt $\dot{\theta} = 0$.

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 - 0 = -fMgR\,(\theta_2 - \theta_1)$$

avec $\theta_2 - \theta_1$ l'angle décrit par la rotation de la roue (*Exemple* $\theta_2 - \theta_1 = 4\pi$: la roue a fait deux tours complets).
Donc $N = (\theta_2 - \theta_1)/2\pi$ soit :

$$N = \frac{J\omega_0^2}{4\pi f M g R}$$

Chap XXV

Statique des fluides

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

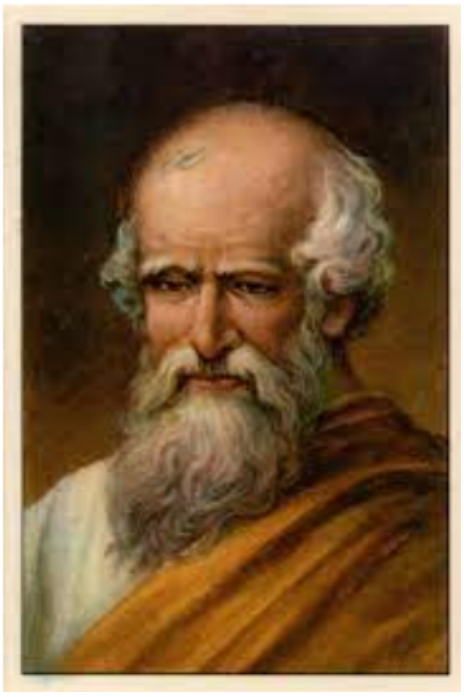
Table des matières

1 Forces de pression **3**
- 1.1 Force élémentaire de pression . . . 3
- 1.2 Résultante des forces de pression . . . 5

2 Equilibre d'un fluide sous l'effet de la pesanteur **6**
- 2.1 Notion de champ de pression . . . 6
- 2.2 Équilibre d'une particule fluide . . . 7
- 2.3 Équation fondamentale de la statique des fluides . . . 8

3 Champ de pression dans les fluides **9**
- 3.1 Cas des fluides incompressible : équation barométrique . . . 9
- 3.2 Cas des fluides compressibles (∼les gaz) . . . 12

4 Forces exercées sur une paroi plane et poussée d'Archimède **14**
- 4.1 Forces exercées sur un barrage . . . 14
- 4.2 Force exercée sur une paroi courbe et lois de symétrie . . . 15
- 4.3 Théorème d'Archimède. . . . 16



Savoirs ♡

- ♡ **Equation fondamentale de la statique**
  - dans le cas d'un axe verticale orienté vers le haut
  - écriture volumique des forces de pressions
  - écriture avec le gradient
- ♡ **Champ de pression dans le fluides**
  - champ de pression $P(z)$ dans un fluide incompressible (ρ constant)
  - surfaces isobarre
  - modélisation d'un fluide compressible avec le modèle des Gaz Parfaits
- ♡ **Force de pression sur une surface**
  - expression de la résultante des forces de pression avec les forces de pression élémentaires
  - surfaces élémentaires et coordonnées
  - propriétés de symétrie et conséquence sur la force de pression
  - poussée d'Archimède

Savoir Faire

Réaliser un bilan de force sur une particule de fluide pour obtenir l'équation de la statique des fluides

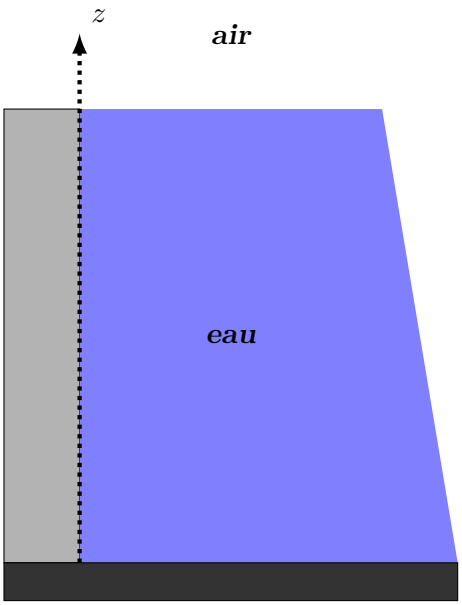
Obtenir le champ de pression *à partir de l'équation de la statique des fluides*
- *dans un fluide incompressible*
- *dans un fluide compressible*

Utiliser le champ de pression et les surfaces isobarres pour analyser un dispositif réel

Calcul de la résultante des forces de pression
- *définir la surface élémentaire en fonction des coordonnées*
- *obtenir l'expression la force de pression élémentaire*
- *réaliser l'intégrale surfacique sur le solide*

Utiliser la poussée d'Archimède pour étudier l'équilibre d'un solide immergé

Dans ce chapitre, nous allons aborder pour la première fois la mécanique des fluides qui étudie comment, sous une contrainte, un liquide ou un gaz réagit (pression, force appliquée, écoulement, ...). Nous ferons les premiers pas en mécanique des fluides, en se cantonnant à l'étude d'un fluide au repos (*i.e.* pas d'écoulement). Vous étudierez plus en détail l'année prochaine la dynamique des fluides en écoulement.

> ***Exemple 1 :*** *Considérons un barrage retenant un lac artificiel. On imagine bien que l'eau exerce sur le barrage une force (sinon on ne construirait pas des édifices aussi solides). Essayons d'estimer cette force.*
>
> 
>
>
> *On sait qu'un fluide, à la pression P, exerce sur une surface $\mathcal{S}$ une force*
>
> $$F \sim P \times \mathcal{S}$$
>
> ***Problèmes :***
> ▷ *il semble difficile d'imaginer que la pression dans l'eau est la même quelque soit la profondeur*
>
> ▷ *si la pression varie suivant l'altitude, comment calculer la force de pression ? $F \sim P \times \mathcal{S}$: on prend la pression à quel endroit ?*

Objectif du cours :
▷ étudier la variation de la pression au sein d'un fluide
▷ calculer la force de pression qu'il exerce sur une surface

1 Forces de pression

1.1 Force élémentaire de pression

▶ Analogie avec le calcul du travail des forces de pression

Pour calculer le travail des forces de pression **sur une transformation** $A \to B$ on a :
▷ "découper" le travail total W en une infinité de travail élémentaire : $W = \int_{A\to B} \delta W$
▷ exprimer le travail élémentaire : $\delta W = -P\mathrm{d}V$
▷ intégrer le travail élémentaire sur la transformation $A \to B$

Ici pour calculer la force de pression **sur une surface** $\mathcal{S}$, on va :
▷ "découper" la force total $\vec{F}$ en une infinité de force élémentaire : $\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F}$
▷ exprimer la force élémentaire $\mathrm{d}\vec{F}$
▷ intégrer les forces élémentaires sur la surface $\mathcal{S}$: $\vec{F} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\vec{F}$

▶ Force élémentaire de pression

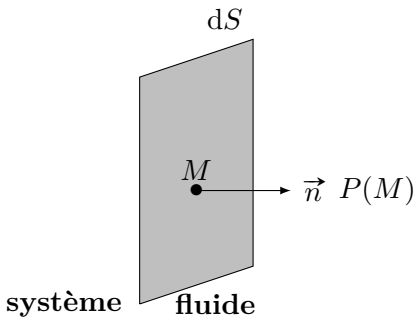
L'expression de la force de pression $\vec{F} = -PS\vec{n}$ étudiée précédemment reste vrai : on va juste l'appliquer à une surface infinitésimale.

Définition. Force élémentaire de pression
Soit $\mathrm{d}S$ une surface infinitésimale de centre M dans un fluide séparant le système étudié du fluide.

Il s'exerce de la part du fluide extérieur sur l'élément de surface une force élémentaire de pression :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -P(M)\mathrm{d}S\vec{n}$$

- ▷ $\vec{n}$ le vecteur normale à la surface , orienté du système → fluide
- ▷ $P(M)$ la pression du fluide au niveau du point M.



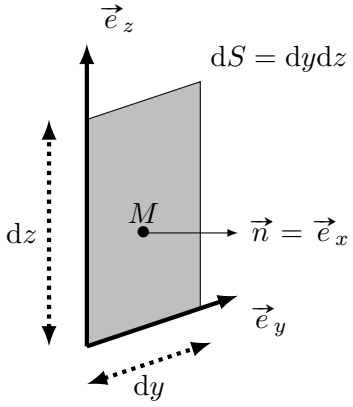
Notion de surface élémentaire

Qu'est-ce qu'une surface élémentaire ?

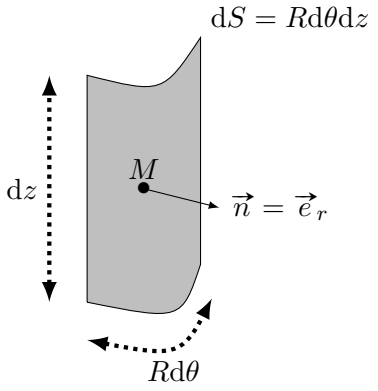
Une surface élémentaire peut être vu comme un "carreau de mosaïque" : chaque carreau est d'une seule couleur ($\sim P$ constante sur une surface $\mathrm{d}S$). En assemblant des carreaux de différentes couleurs ($\sim P$ varie d'une surface à une autre) on peut créer un dégrader de couleur ($\sim$ une pression qui varie au seins d'un fluide).

Propriété. Surface élémentaire et coordonnées
La surface élémentaire $\mathrm{d}S$:

- ▷ **Primordial :**
  coordonnées cartésienne, la surface est plane



- ▷ **Situationnel**
  coordonnées cylindrique, la est courbe de rayon R



Astuce : les forces élémentaires s'écrivent généralement :
- ▷ cartésien : $\mathrm{d}F = \pm P(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x$
- ▷ cylindrique : $\mathrm{d}F = -P(z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\vec{e}_r$

Attention ! dans le cas cylindrique on projettera **TOUJOURS** $\vec{e}_r$ dans une base cartésienne !! A chaque fois on retrouve les trois coordonnées.

1.2 Résultante des forces de pression

▶ Définition

La paroi d'un solide en contact avec le fluide est découpée artificiellement en une infinité de petites surfaces élémentaires.

En chaque surface s'applique une force élémentaire de pression $\mathrm{d}\vec{F}_P$. La force totale de pression $\vec{F}_P$, appelée **résultante des forces de pression** est donc la somme de toutes les forces de pression élémentaire :

$$\vec{F}_P = \sum_{\text{surface}} \mathrm{d}\vec{F}_P \quad \sim \quad \vec{F}_P = \int_{\text{surface}} \mathrm{d}\vec{F}_P$$

On intègre sur une surface : on intègre sur deux axes, on note cela par deux intégrales $\iint$.

Définition. Résultante des forces de pression
La résultante des forces de pression $\vec{F}_P$ sur un solide en contact avec un fluide extérieur est égale à l'intégrale sur la surface du solide en contact avec le fluide des forces élémentaires de pression :

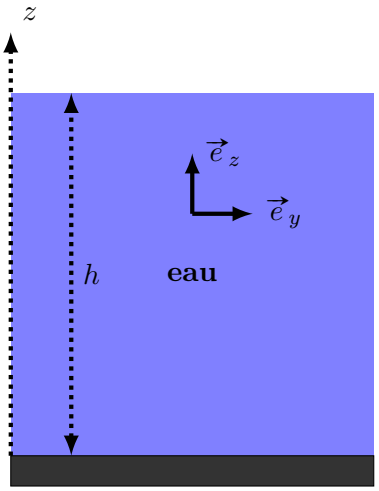
$$\vec{F}_P = \iint_{(S)} \mathrm{d}\vec{F}_P$$

Attention ! *Le calcul de la résultante des forces de pression est une opération délicate. Néanmoins il devient aisé si on comprend la méthode. Elle sera détaillé dans une prochaine partie.*

▶ Cas d'une pression constante et d'une surface plane

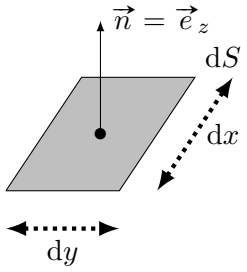
Attention ! Que les forces de pression !! Pas de poids !!

On peut montrer (*cf partie suivante*) que la pression dans un fluide à une profondeur h est $P(z=h) = P_0 + \rho g h$ avec ρ la masse volumique du fluide.



Calculons la résultante des forces de pression sur une surface $\mathcal{S}$ de côté L et l au fond de l'eau

▷ **Surface élémentaire et totale** :



La surface élémentaire est à "l'horizontale". On a alors $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\vec{n} = +\vec{e}_z$.

Surface totale : la surface est délimité de $x = 0 \to l$ et $y = 0 \to L$.

▷ **Force de pression élémentaire** : $\mathrm{d}F = -(P_0 + \rho g h)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e}_z$.
On vérifie bien que la force est orientée "dans le bon sens" : *a priori* l'eau pousse bien du haut vers le bas suivant -$\vec{e}_z$.

▷ **Résultante des forces de pression** :

$$\vec{F} = \iint_S \mathrm{d}\vec{F} = \int_{x=0}^{l}\int_{y=0}^{L} -(P_0+\rho g h)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\vec{e}_z$$

On peut sortir les constantes : $-(P_0+\rho g h)\,\vec{e}_z \times \int_{x=0}^{l}\int_{y=0}^{L}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et séparer les variables :

$$\int_{x=0}^{l}\int_{y=0}^{L}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{l}\mathrm{d}x\int_{y=0}^{L}\mathrm{d}y = l\times L$$

Finalement : $\vec{F} = -(P_0+\rho g h)\,lL$.

Comment peut-on trouver l'expression de la pression $P(z=h)$ précédente ?

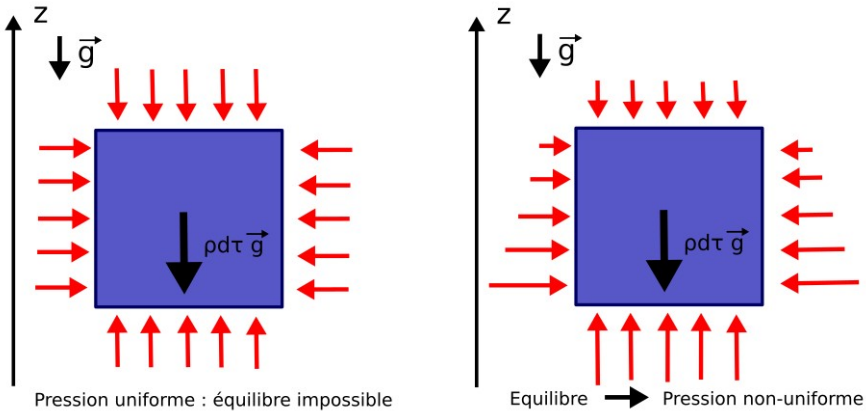
2 Equilibre d'un fluide sous l'effet de la pesanteur

2.1 Notion de champ de pression

► Problème de l'équilibre d'une particule de fluide

Au sein d'un fluide, le champ de pression n'est pas uniforme : on peut s'en convaincre facilement. On appelle particule de fluide, une "goutte d'eau infinitésimale" : l'eau contenu dans un cube de côté $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$.

Deux types forces s'appliquent sur la particule de fluide :
▷ les forces de pression élémentaires qui s'exercent sur les parois
▷ le poids, qui s'exerce au centre de la particule
Si la pression est constante, la somme des forces de pression élémentaire s'annule. Rien ne compense le poids de la particule, l'équilibre est impossible.



Pour permettre l'équilibre, on comrpend que les forces de pression doivent être plus importante sur la face horizontale inférieure pour compenser le poids de la particule de fluide. La pression du fluide est plus importante en profondeur.

Propriété. Équilibre d'un fluide dans un champ de pesanteur
En présence de la gravité, la pression dans un fluide au repos varie : la pression dépend du point M où on la mesure : $P(M)$.

► Notion de champ de pression

La pression dans un fluide dépend de l'endroit, noté M, où on la mesure : $P = P(M)$.

Ordre grandeur
▷ pression à la surface d'une piscine : $P = 1$ bar
▷ pression au fond une piscine de $3m$ de profondeur : $P = 1.3$ bar
▷ pression au sommet de l'Everest $P = 0.3$ bar

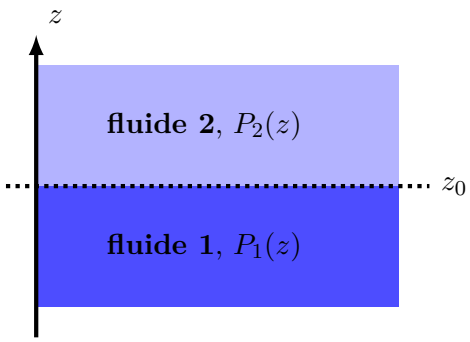
Définition. Champ de pression
On appelle champ de pression la fonction P qui à un point M de coordonnées (x, y, z) associe la pression en ce point.

Propriété. Continuité du champ de pression
Le champ de pression est une fonction continue de l'espace.

Contact entre deux fluides :

Au niveau d'une interface entre deux fluides, les pressions des deux fluides sont égales.
On a ici :

$$P_1(z_0) = P_2(z_0)$$



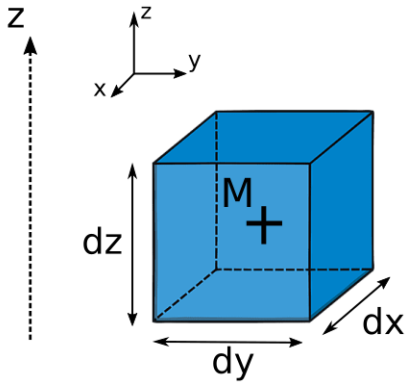
Notamment au niveau du contact avec l'atmosphère, $P(z_{\text{surface}}) = P_0 = 1\text{bar}$.

Propriété. Pression au niveau de la surface libre
Au niveau de l'interface avec l'atmosphère la pression d'un fluide est égale à la pression atmosphérique $P_0 = 1\text{bar}$.

2.2 Équilibre d'une particule fluide

On considère un fluide en équilibre mécanique dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On introduit un axe $(O, \vec{e}_z)$ confondu avec la verticale ascendante .

Le système étudié est une particule de fluide cubique de coordonnées (x, y, z) quelconque. Le système est donc le cube compris entre les plan
▷ x et $x + \mathrm{d}x$
▷ y et $x + \mathrm{d}y$
▷ z et $x + \mathrm{d}z$
On appelle $P(x, y, z)$ la pression dans le fluide.



Forces élémentaires de pression
▷ la force qui s'applique sur la paroi horizontale supérieure : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -P(x, y, z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(+\vec{e}_z)$
▷ la force qui s'applique sur la paroi horizontale inférieure : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -P(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(-\vec{e}_z)$
▷ la force qui s'applique sur la paroi verticale gauche : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -P(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z(-\vec{e}_y)$
▷ la force qui s'applique sur la paroi verticale droite : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -P(x, y + \mathrm{d}y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z(+\vec{e}_y)$
▷ la force qui s'applique sur la paroi verticale de devant : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -P(x + \mathrm{d}x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y(+\vec{e}_x)$
▷ la force qui s'applique sur la paroi verticale du fond : $\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -P(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y(-\vec{e}_x)$

Poids de la particule de fluide

$$\mathrm{d}m\,\vec{g} = \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(-g\vec{e}_z)$$

On applique le **PFD** à la particule de fluide. Comme le fluide est à l'équilibre, la somme des forces extérieures qui s'applique dessus est nulle. On a donc :

$$\begin{cases} P(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y - P(x+\mathrm{d}x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y = 0 \text{ (équilibre suivant } \vec{e}_x) \\ P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - P(x,y+\mathrm{d}y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0 \text{ (équilibre suivant } \vec{e}_y) \\ P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - P(x,y,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \rho g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \text{ (équilibre suivant } \vec{e}_z) \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent :

$$P(x,y,z) = P(x+\mathrm{d}x,y,z) \quad \text{et} \quad P(x,y,z) = P(x,y+\mathrm{d}y,z)$$

Le champ de pression ne dépend donc ni de x, ni de y : $P(M) = P(z)$.

L'équilibre verticale donne :

$$-P(z) + P(z+\mathrm{d}z) = \rho g\mathrm{d}z \quad \text{donc} \quad \frac{P(z+\mathrm{d}z)-P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

On reconnaît la dérivée de P en fonction de z. On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

2.3 Équation fondamentale de la statique des fluides

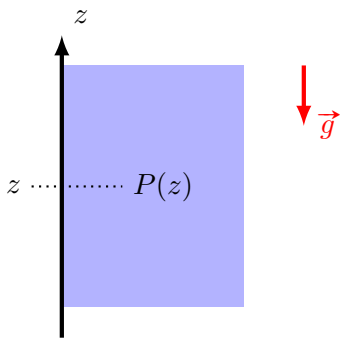
Théorème. Équation fondamentale de la statique des fluides

Le champ de pression d'un fluide dans un champ de pesanteur verticale vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g$$

avec z la coordonnée de l'axe vertical ascendant.

Attention ! La notion de verticalité est définie par rapport à la pesanteur !



Attention ! Ce théorème est un cas particulier où on a choisi une accélération de la pesanteur $\vec{g}$ suivant l'axe verticale.

▶ Force volumique de pression

Dans l'exemple précédent, en calculant la résultante des forces de pression selon $\vec{e}_z$ on obtient :

$$P(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - P(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{P(z+\mathrm{d}z)-P(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\underbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}V}$$

Soit : $-\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z\mathrm{d}V$.

On obtient alors une force volumique où on reconnaît le gradient de la pression : $-\overrightarrow{\text{grad}}\ P\mathrm{d}\tau$.

Attention ! la masse volumique ρ dépend *a priori* de la position : $\rho = \rho(z)$.

Propriété. Résultante des forces de pressions sur une particule fluide
La résultante des forces de pression sur une particule fluide est équivalente à une force volumique :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_P = -\overrightarrow{\text{grad}}\ P\mathrm{d} \times \mathrm{d}V$$

L'équation de la statique des fluide s'écrit alors :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\ P\mathrm{d}\tau + \rho\vec{g}\mathrm{d}\tau \ \text{ soit } \ \overrightarrow{\text{grad}}\ P = \rho\vec{g}$$

On remarque que le volume de la particule de fluide dtau se simplifie : lorsqu'il n'y a que des forces volumiques, on peut écrire le PFD que sur les densité volumique de force. Ici $\overrightarrow{\text{grad}}\ P$ et ρg.

Théorème. Équation fondamentale de la statique des fluides
Le champ de pression $P(M)$ d'un fluide à l'équilibre dans un champ pesanteur $\vec{g}$ vérifie :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ P = \rho\vec{g}$$

On obtient alors trois équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \rho g_x \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \rho g_y \\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g_z \end{cases}$$

Dans le cas où $g_z = -g$ et $g_x = g_y = 0$ on retrouve le premier théorème.

3 Champ de pression dans les fluides

L'équation fondamentale de la statique des fluides permet de déterminer en tout point M du fluide le champ de pression $P(M)$ permettant de compenser les autres forces appliquées au fluide.
On s'intéresse à l'évolution de la pression dans deux cas :
▷ dans un fluide incompressible, typiquement un liquide
▷ dan un fluide compressible, typiquement un gaz

3.1 Cas des fluides incompressible : équation barométrique

▶ Hypothèses

Dans cette partie, on fait l'hypothèse d'un fluide :
▷ **incompressible** : sa masse volumique ρ est indépendante de la pression

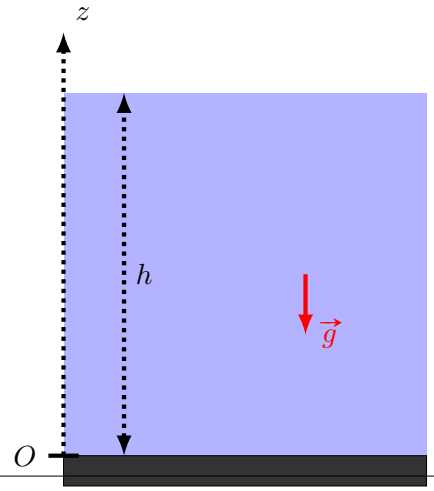
▷ **homogène** : sa masse volumique est uniforme sur l'ensemble du fluide.

, Dans cette partie donc $\boxed{\rho = C^{ste}}$.

▶ Champ de pression dans un fluide incompressible

*Importantissime I : tout le monde doit savoir faire ça **vite** et **bien** ! ! !*

On considère un liquide incompressible et homogène soumis au champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme. Le liquide est au niveau de sa surface en contact avec l'atmosphère qui est à une pression P_0. On choisit comme origine de l'axe verticale la surface de l'eau, en prenant comme origine le fond de l'eau.
On appelle H la profondeur de l'eau.



▷ **Équation de la statique :**
l'une ou l'autre des formulations fonctionne ici, à vous de maîtriser les deux !!

Équation projetée
L'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

Attention ! Ce n'est vraie que parce que l'axe (Oz) est vertical orienté vers le haut !!

Forme avec le gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ P = \rho\vec{g} \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z = -\rho g\vec{e}_z$$

On retrouve bien : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$.

▷ **Intégration :** Comme g et ρ sont constants, on peut intégrer l'équation précédente pour obtenir :

$$P(z) = -\rho g z + C$$

avec C une constante *a priori* inconnue.
Attention ! C'est parce qu'on travaille sur un fluie **incompressible** que ρ est constant et que donc on peut intégrer facilement. Pour un gaz, c'est une autre histoire !

▷ **Conditions aux limites** :
Par continuité de la pression au niveau d'une interface, la pression de l'eau au niveau de la surface est égale à la pression atmosphérique P_0. On a donc :

$$P(z = h) = P_0$$

On a donc $C = P_0 + \rho g H$ et donc $P(z) = P_0 + \rho g(h - z)$.

▷ **Sens de variation de la pression**
Plus on va en profondeur, plus z diminue : plus on descend en profondeur plus la pression augmente. A une profondeur H, $z = 0$, et la pression est de :

$$P(z = -h) = P_0 + \rho g H$$

▶ Ordres de grandeur :

Dans le cas de l'eau, il est important de se rappeler que $\rho = 1$ kg/l$= 10^3$ kg/m^3.

▷ Pour une variation de hauteur de $\Delta z = 10$ m la pression varie de : $\Delta P = \rho g \Delta z = 10^5$ Pa, soit une atmosphère.
Cela explique les dangers de la pression pour les plongeurs : à 10 m de profondeur, la pression est doublée par rapport à la surface !!

▷ Pour une variation de hauteur de $\Delta z = 1$ m la pression ne varie que de $\Delta P = 10^4$ Pa, soit 10% de la pression atmosphérique. On peut donc négliger cette variation à l'échelle des récipients usuels.

▶ Surfaces isobares

L'adjectif isobare est constitué du préfixe grec "iso" qui signifie "égale". Les surfaces isobares sont les surfaces où le fluide est à la même pression.

Propriété. Surfaces isobares
Dans le champ de pesanteur uniforme, les surfaces isobares au seins d'un même liquide sont des plans horizontaux $z = cste$.

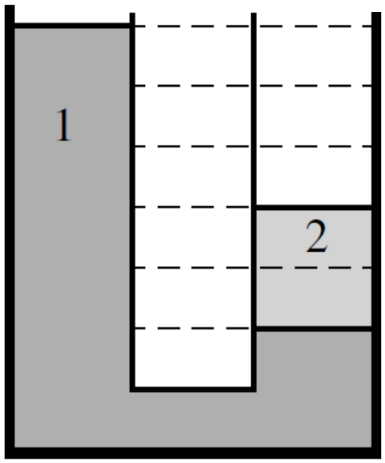
On appelle surface libre, la surface d'un liquide en contact avec l'atmosphère. La pression atmosphérique étant considérée comme uniforme P_0 et le champ de pression étant nécessairement continu, la surface libre des liquides au repos est nécessairement une isobare

Propriété.
La surface libre d'un liquide est une surface plane horizontale à la pression atmosphérique.

| *Exemple 2 :* ***Liquide de densité différentes***

On considère deux liquide 1 et 2, de masse volumique ρ_1 et ρ_2, en équilibre. Les deux liquides sont, a niveau de leur surface libre, en contact avec l'atmosphère à la pression P_0. Les deux tube ont la même section S.
On donne $\rho_1 = \rho_{eau}$, $d = 20cm$ et $g = 9.81$

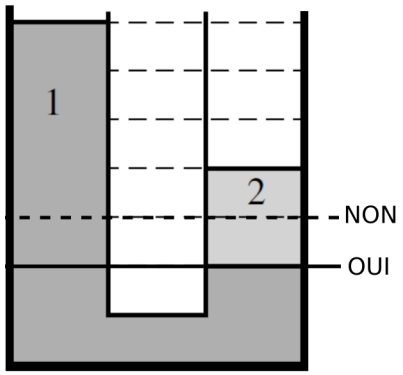
1. *Trouver une surface isobarre*
2. *Exprimer la pression P au niveau de cette surface dans le tube de gauche et dans le tube de droite.*
3. *En déduire la valeur de la densité du liquide 2.*



CORRECTION

1.

La surface situé au bas du liquide 2 est une surface isobare : à cette altitude, la pression du fluide est la même que ce soit dans la colonne de gauche ou de droite.
Attention ! il faut être dans le même fluide ! !
Typiquement, la surface en pointillé n'est pas une surface isobare.

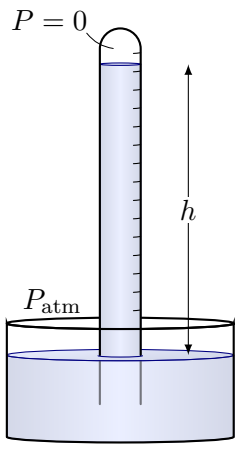


2. En appelant d la distance entre 2 graduation on trouve :

$$P_1 = P_0 + 5\rho_1 gd \text{ et } P_2 = P_0 + 2\rho_2 gd$$

3. Comme P_1 et P_2 sont situées sur la même surface isobare : $P_1 = P_2$ et donc $5\rho_1 gd = 2\rho_2 gd$ soit $\rho_2 = 5/2\rho_1$. Sa densité est $2,5$ fois plus élevée.

Exemple 3 : ***Baromètre de Toricelli***
Pour l'histoire ...
Un baromètre est un instrument qui sert à mesurer la pression atmosphérique. Le plus simple est inventé par Torricelli lorsqu'il fait des expériences pour prouver que la pression atmosphérique est responsable de la montée de l'eau dans un espace vide. Il a l'idée de faire des essais avec du mercure qui est 13,6 fois plus dense.



Il remplit un long tube de verre avec du mercu liquide (densité 13,6 fois celle de l'eau), le bouc avec le doigt et le retourne sur un bassin remp lui aussi, de mercure. Il observe que le tube ne vide que partiellement dans le bassin et qu'il y res toujours une colonne de mercure d'environ 76 cm hauteur, quel que soit l'enfoncement du tube da le bassin.
Il en déduit que la pression de l'air sur la surface bassin contrebalance le poids de la colonne de me cure. C'est ainsi que Torricelli invente le baromèt en 1643.

> *En considérant une surface isobare choisie avec pertinence, donner un lien entre la pression atmosphérique P_{atm} et la hauteur de mercure h.*

CORRECTION

▷ On choisit comme surface isobare la surface en contact avec l'atmosphère terrestre. La pression au niveau de cette surface est donc P_{atm}.
▷ On peut estimer la pression au sein du tube en plaçant l'origine de l'axe ascendant vertical au niveau de cette surface. On trouve alors $P(z) = \rho g(h - z)$.
Comme en $z = 0$, on se trouve sur la surface isobare $P = P_{atm}$ on a alors :

$$P[z = 0] = P_{atm} \Rightarrow \rho g h = P_{atm}$$

En mesurant h et connaissant ρ (du mercure) et g on peut estimer P_{atm}.

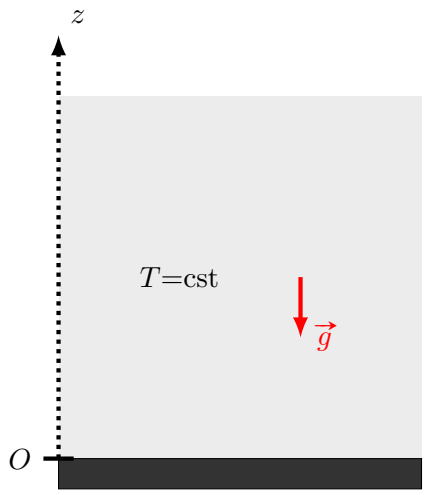
3.2 Cas des fluides compressibles (∼les gaz)

On s'intéresse ici au cas où le **fluide est compressible,** c'est-à-dire que la masse volumique dépend de la pression. Si on appuie sur un fluide compressible, *i.e.* on augmente sa pression, il se comprime, *i.e.* sa masse volumique augmente. C'est typiquement le cas des gaz.

▶ Champ de pression de l'atmosphère isotherme

*Importantissime II : tout le monde doit savoir faire ça **vite** et **bien** ! ! !*

On s'intéresse au cas où le fluide considéré est l'air de l'atmosphère. On fait l'hypothèse que l'air se comporte comme un gaz parfait et qu'il est en équilibre isotherme, c'est-à-dire que la température T est la même en tout point : T =constante.



On cherche à calculer le champ de pression dans l'atmosphère que l'on suppose à l'équilibre.

Problème : un gaz n'est pas un liquide ! !
▷ cas liquide : la masse volumique est constante $\rho = \rho_0$
▷ cas gazeux : la masse volumique de l'air n'est elle pas constante, elle varie avec la pression $\rho = \rho(P)$

▷ **Équation de la statique :**
On choisit un axe verticale orienté vers le haut. On a :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g$$

Attention ! Ne connaissant pas le lien entre $\rho(z)$ et l'altitude z, on ne peut pas intégrer cette équation ⇒ il faut trouver ρ !

▷ **Lien entre $\rho(z)$ et $P(z)$:**
on a un gaz, considéré comme un gaz parfait ⇒ équation des **Gaz Parfait** !

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ avec } PV = nRT = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{M}{RT}P$$

La masse molaire de l'air est $M = 29$ g.mol^{-1}. La température est T_0 la température de l'atmosphère qui est la même quelque soit l'altitude car notre système est isotherme.
L'équation fondamentale de la statique des fluides est alors :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{Mg}{RT_0}P(z)$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

▷ **Intégration :**
Attention ! La variable de la fonction P est l'altitude z, pas le temps t. Le facteur devant la dérivée d'ordre 0 n'est pas $1/\tau$, avec τ le temps caractéristique du système, mais $1/\lambda$ avec λ la longueur caractéristique du système.

Ici $\lambda = \dfrac{RT_0}{MG}$ et la solution générale est de la forme :

$$P(z) = C\exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right) = C\exp\left(-\frac{Mg}{RT_0}z\right)$$

avec C une constante d'intégration.

▷ **Conditions aux limites :**
au niveau du sol, $z = 0$, la pression est la pression atmosphérique $P_0 = 1$bar. On a donc $C = P_0$ et :

$$P(z) = P_0\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$$

▶ Ordres de grandeur pour l'atmosphère terrestre

On a montré que la pression diminuait lorsqu'on montait en altitude sous la forme

$$P(z) = P_0\exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right)$$

ce qui permet d'introduire la hauteur caractéristique $\lambda = \dfrac{RT_0}{Mg}$.

▷ **Taille caractéristique**
A une température $T_0 = 273$ K, l'échelle caractéristique des variations de pression est de l'ordre de $\lambda = 8$ km !
Donc si la taille h du système est $h << \lambda \sim 8$km : il n'est pas pertinent de prendre en compte les variations de pression de l'atmosphère. Si $h \sim \lambda$, il faut les prendre en comtpe.

▷ **Taille de l'atmosphère :**
Fonction $\Rightarrow$ petit graphe : pour une altitude $z \simeq 5\lambda$, la fonction $e^{-z/\lambda}$ est quasi-nulle. Donc pour une altitude supérieure 5λ, la pression atmosphérique est nulle : il n'y a plus d'atmosphère, on est dans le vide.
La taille de l'atmosphère est donc d'environ 5λ, soit une quarantaine de kilomètres, ce qui est cohérent avec les mesures expérimentales.

4 Forces exercées sur une paroi plane et poussée d'Archimède

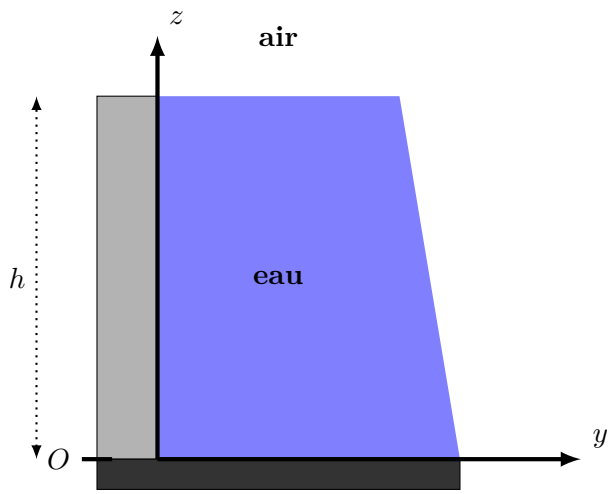
On a vu :
▷ comment exprimer la résultante des forces de pression sur une paroi en fonction du champ de pression
▷ comment obtenir le champ de pression d'un fluide à l'équilibre
On va étudier dans cette partie comment mettre en place le calcul de la résultante des forces de pression à travers un exemple **archi-classique**.

4.1 Forces exercées sur un barrage

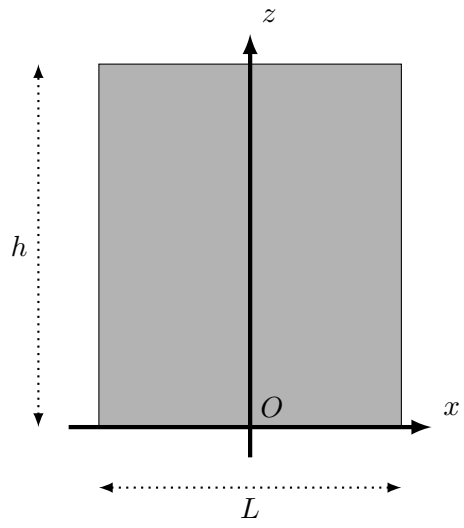
*Importantissime III : cet exemple est savoir **parfaitement** maîtriser car il sert à mettre en place les méthodes de calcul.*

On considère un barrage plan carré de côté L en contact avec une hauteur h d'eau. On cherche à calculer la résultante de force de pression exercée par l'eau retenue par le barrage.

Vue de côté



Vue de face



1. Montrer que la force de pression exercée par l'air à gauche du barrage est : $\vec{F}_0 = hLP_0\vec{e}_y$.
2. Exprimer la pression $P(z)$ du fluide à une altitude z, où l'origine verticale O a été choisi au niveau du fond de l'eau.
3. Donner l'expression de la force élémentaire de pression $\mathrm{d}\vec{F}_P(z)$ exercée par l'eau qui s'applique sur une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ en fonction de sa profondeur z.
4. Montrer que la résultante des forces de pression de l'eau sur le barrage est : $\vec{F} = -\vec{e}_y$
5. Faire l'application numérique avec $h = 30\text{m}$ et $L = 100\text{m}$.

CORRECTION

1. ▷ **Surface élémentaire et surface totale :** $\mathrm{d}S = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$ et S est définie pour $x = -L/2 \to L/2$ et $z = 0 \to h$.
   ▷ **Force élémentaire :** la pression est constante $P = P_0$ et donc $\mathrm{d}\vec{F} = +P_0\mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y$
   ▷ **Résultante des forces de pression :** $\vec{F} = \iint_S \mathrm{d}\vec{F}$

$$\vec{F} = P_0 \int_{x=-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \int_{z=0}^{h} \mathrm{d}z = P_0 hL\vec{e}_x$$

2. **Equation de la statique :** $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$. Comme ρ est constant, on peut intégrer facilement et, avec les **CL** $P(z = h) = P_0$ on trouve : $P(z) = P_0 + \rho g(h - z)$.

3. **Surface élémentaire et surface totale :** $\mathrm{d}S = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$ et S est définie pour $x = -L/2 \to L/2$ et $z = 0 \to h$.

   Force élémentaire : $\mathrm{d}\vec{F} = -P(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,\vec{e}_y$

▷ **Résultante des forces de pression :** $\vec{F} = \iint_S \mathrm{d}\vec{F}$

$$\vec{F} = -\vec{e}_y \int_{x=-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \int_{z=0}^{h} (P_0 + \rho g(h-z))\,\mathrm{d}z$$

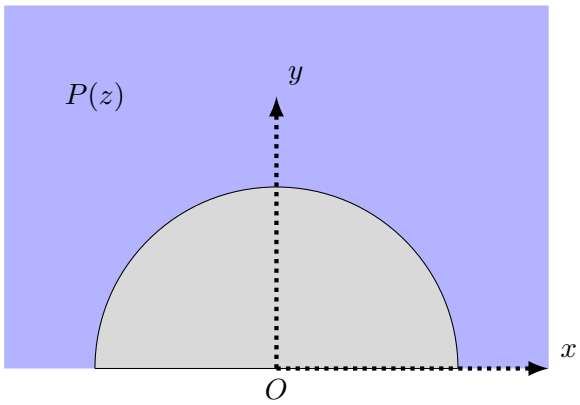
Attention ! AUX PARENTHÈSES ! ! ! ! ! !

$$\int_{z=0}^{h} (P_0 + \rho g(h-z))\,\mathrm{d}z = \left[P_0 z + \rho g\left(hz - z^2/2\right)\right]_0^h = P_0 h + \rho g\left(h^2 - h^2/2\right) = P_0 h + \rho g h^2/2$$

Finalement : $\vec{F} = -\left(P_0 h + \rho g h^2/2\right) L\,\vec{e}_y$.

4.2 Force exercée sur une paroi courbe et lois de symétrie

On cherche à calculer la résultante des forces de pression exercée par un fluide sur un demi-cylindre de centre O, de rayon R et de hauteur h. L'axe du cylindre est suivant (Oz), verticale ascendante de la pesanteur.



L'accélération de la pesanteur est perpendiculaire au plan $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

On remarque que l'axe (Oy) est un axe de symétrie (le plan (Oyz) est un plan de symétrie). On admettra alors que la résultante des forces de pression est suivant cet axe (contenu dans ce plan).

Propriété. Résultante des forces de pression et symétrie
Si le système possède un axe de symétrie (un plan de symétrie) alors la résultante des forces de pression est suivant cet axe de symétrie (contenu dans ce plan de symétrie).

> *Exemple 4 : Calculons la résultante des forces de pression en prenant comme champ de pression $P(z) = P_0 + \rho g(h-z)$.*

▷ **Surface élémentaire et surface totale**
ici on choisit une surface élémentaire cylindrique : $\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ et la surface est définie pour $z = 0 \to h$ et $\theta = 0 \to \pi$.

▷ **Force de pression élémentaire** : $\mathrm{d}\vec{F} = -P(z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,\vec{e}_r$
Utilisation de la symétrie : seule la composante suivant $\vec{e}_y$ est non-nulle ⇒ on projette $\mathrm{d}\vec{F}$ sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

$$\mathrm{d}\vec{F} = -P(z)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)$$

On ne calculera que la résultante de $\mathrm{d}\vec{F}_y = -P(z)R\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$, l'autre valant forcément 0

▷ **Résultante des forces de pression**

$$\vec{F} = \iint_S \mathrm{d}\vec{F} = -\int_{z=0}^{h} \mathrm{d}z \int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\theta\,(P_0 + \rho g(h-z))\,R\cos\theta$$

On calcule séparément :

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \mathrm{d}\theta\,(P_0 + \rho g(h-z))\,R = (P_0 + \rho g(h-z))\,R\int_0^{\pi} \cos\theta\mathrm{d}\theta = (P_0 + \rho g(h-z))\,R \times \underbrace{[-\cos\theta]_0^{\pi}}_{-(\cos\pi - \cos 0) = 2}$$

On calcule alors : $\int_0^h 2R\,(P_0 + \rho g(h-z)) = 2R\,(P_0 h + \rho g h^2/2)$ (*cf avant*).

Finalement $\vec{F} = -2R\,(P_0 h + \rho g h^2/2)\,\vec{e}_y$.

> ***Remarque :*** *Si on avait calculer la résultante de* $d\vec{F}_x$ *on serait tombé sur* $\int_0^\pi d\theta \cos\theta = [\sin\theta]_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0$.

4.3 Théorème d'Archimède

▶ Théorème

On considère un corps solide de volume V, délimité par une surface fermée (S), **totalement immergé** dans un fluide au repos soumis à un champ de pesanteur $\vec{g}$.

Définition. Poussée d'Archimède

- ▷ La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ représente la résultante des forces de pression qui s'exerce sur un solide immergé.
- ▷ Elle est égale à l'opposé du poids du volume d'eau déplacé :

$$\vec{\Pi}_A = -\rho_f V \vec{g}$$

avec ρ_f la masse volumique du fluide, V le volume de solide immergé.

- ▷ Elle s'applique au centre de la partie immergée (*coucou la mécanique des solides ...*).

Attention !

1. Pour ce la formule de la poussée d'Archimède fonctionne, le solide doit être totalement ou partiellement **immergé** (*i.e. de l'eau tout autour*) dans le fluide. Ce n'est pas le cas des exemples des barrages précédent.

2. Si le solide est partiellement immergé, le volume à prendre en compte est celui de la partie immergée.

▶ Application

Exemple 5 : L'iceberg qui fond

On considère un bloc de glace en équilibre dans de l'eau (iceberg dans la mer ou glaçon dans un verre).
On note ρ_l *la masse volumique de l'eau liquide et* ρ_g *la masse volumique de l'eau solide (glace).*

1. *Exprimer le rapport* V'/V, *avec* V' *le volume d'eau immergé et* V *le volume total de la glace en fonction de* ρ_l *et* ρ_g.
2. *Le glaçon fond : quel est le nouveau volume* V'' *que prend l'eau qui le constituait désormais liquide.*

CORRECTION

1. Le glaçon est à l'équilibre. La somme des forces extérieures vaut donc 0. Avec un axe verticale ascendant (Oz) on a :

▷ poids du glaçon : $m\vec{g} = -V\rho_g g\vec{e}_z$
▷ poussée d'Archimède : $-m'\vec{g} = +V - \rho_g g\vec{e}_z$.
A l'équilibre on a : $V\rho_g = V'\rho_l$ donc $V'/V = \rho_g/\rho_l$ soit environ 9/10.

2. Quand le glaçon fond, sa masse m_0 se conserve. Son nouveau volume V'' (sous forme liquide) vérifie donc : $V''\rho_l = m_0 = V\rho_g$ donc $V'' = \rho_g/\rho_l V = V'$
Lorsque le glaçon fond, il occupe la même place que son volume anciennement immergé. Le niveau de l'eau ne varie donc pas lorsque le glaçon fond. Question : qu'est-ce qui fait donc monter le niveau des océans alors ?

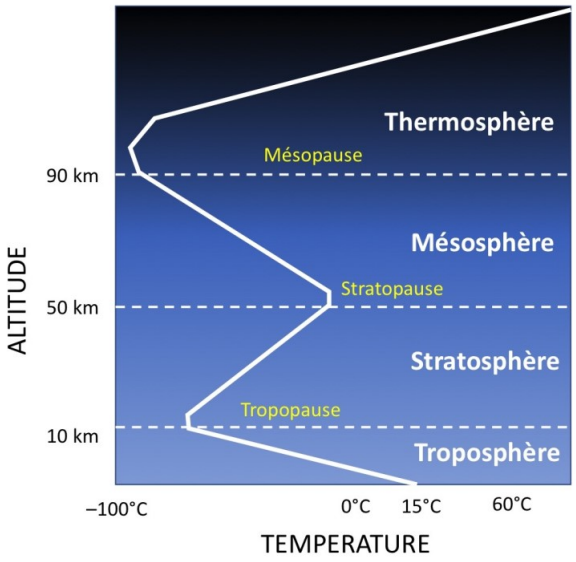
μDM

Différents modèles de l'atmosphère

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Atmosphère isotherme et avec un gradient de température

L'air de l'atmosphère est essentiellement constitué d'un mélange de diazote, de dioxygène, d'argon et de gaz carbonique. Cette composition est à peu près constante jusqu'à une altitude de 85kilomètre. On considèrera par la suite que l'air est un gaz parfait de masse molaire M.
On se propose dans cet exercice d'étudier plusieurs modélisation de l'atmosphère afin de rendre compte des constatations expérimentales. On notera g le champ de pesanteur supposé uniforme, R la constante des gaz parfaits.



On considère dans un premier temps que la température de l'air est constant, notée T_0. On prendra un axe z orienté vers le haut avec comme origine la surface terrestre.

1. Déterminer l'expression de la pression P à une altitude z.
2. Critiquer le modèle isotherme de la troposhère à l'aide du document fourni.

On propose un modèle affine, $T(z) = a + bz$, pour la variation de la température dans la troposhère.

3. Donner les dimensions et les unités des coefficients a et b. A l'aide du document fourni, estimer a et b.
4. A l'aide de ce modèle de température, donner le champ de pression dans l'atmosphère terrestre. Ce dernier vous paraît-il plus réaliste ?

Atmosphère adiabatique

On cherche à expliquer la variation de température précédemment modéliser. On décide de s'intéresser aux échanges d'énergie entre les particule fluides de l'atmosphère. On modélise l'atmosphère comme une atmosphère adiabatique. On étudie une particule de fluide initialement situé au niveau de la surface terrestre (température T_0, pression P_0) qui s'élève à une altitude z. On suppose la transformation **adiabatique et réversible.**

1. Montrer que la grandeur $\ln T(z) + \beta \ln P(z)$ est constant. On exprimera β en fonction de γ.
2. En dérivant la relation précédente montrer que :
$$\frac{\mathrm{d}T}{T} + \beta \frac{\mathrm{d}P}{P} = 0$$
3. En déduire le gradient de la température $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ en fonction de γ, M, g et R. Donner sa valeur pour l'air atmosphérique et la comparer à celle mesurée expérimentalement.
4. En utilisant l'expression du champ de température $T(z)$, montrer que le champ de pression $P(z)$ se met sous la forme :
$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{K}{T_0} z\right)^{\alpha}$$
On exprimera α et K en fonction de γ, M, g et R

μDM Différents modèles de l'atmosphère

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Atmosphère isotherme et avec un gradient de température

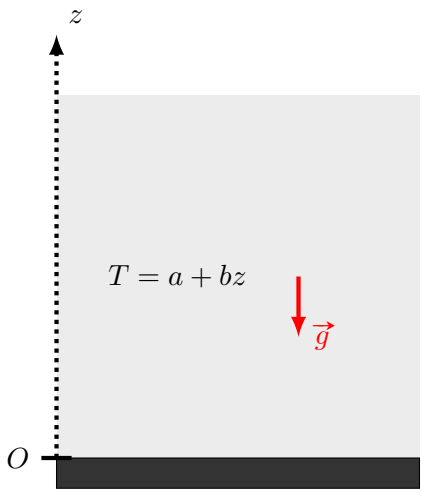
1. *Cf cours*
2. Sur le document, on remarque que la température varie tout au long de la troposphère : un modèle isotherme, où la température est fixe, semble très peu réaliste.
   On propose un modèle affine, $T(z) = a + bz$, pour la variation de la température dans la troposphère.
3. Par analyse dimensionnelle : $[T] = [a]$ **ET** $[T] = [a][z]$
   Attention ! Jamais de somme/différence en analyse dimensionnelle : $[T] = [a] + [b][z]$ **NON**!!!!

   ▷ $[a] = \Theta$ (**Attention !** T c'est le temps !) donc $[a] = K$.
   ▷ $[b] = [T]/[z] = \Theta/L$ donc $[b]$ =K.m^{-1}

> **Méthode en DS. Pente et coefficient directeur**
> Pour un modèle $f[X] = aX + b$ on trouve :
> ▷ $b = f[0]$
> ▷ $a = \dfrac{F[X_{max}] - F[0]}{X_{max} - 0}$

   On trouve ici $a = 15°$C et $b = -8,5\ 10^{-3}$K.m^{-1}.
4. *On applique la* ***méthode !!***
   ▷ **Schéma et axes**
   ▷ **Équation de la statique**
   ▷ **Expression de la masse volumique**
   ▷ **Intégration**

▷ **Schéma et axes**



▷ **Équation de la statique**
axe est orienté vers le haut donc :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

Attention ! gaz $\Rightarrow$ ρ varie.

▷ **Expression de la masse volumique**

on applique les **GP** à une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$:

$$\rho = \frac{m}{\mathrm{d}\tau} = \frac{nM_{air}}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\rho = \frac{M_{air}}{RT[z]}P[z] = \frac{M_{air}}{R\,(a+bz)}P[z]$$

▷ **Intégration**
On a alors : $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{M_{air}g}{R\,(a+bz)}P[z]$
Une équation différentielle, on vérifie si c'est une forme "classique"

$$\dot{X} = C\,;\ \dot{X} + X/\tau = ...\,;\ \ddot{X} + \omega_0^2 X = ...\,;\ \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = ...$$

Sinon $\Rightarrow$ séparation des variables !

On sépare donc les variables et on intègre entre $z = 0$ et z quelconque :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_{air}g}{R}\frac{\mathrm{d}z}{a+bz} \ \Rightarrow\ \int_{P[0]}^{P[z]}\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_{air}g}{R}\int_{z=0}^{z}\frac{\mathrm{d}z}{a+bz} \ \Rightarrow\ \ln\frac{P[z]}{P_0} = -\frac{M_{air}g}{Rb}\ln\frac{a+Bz}{a}$$

Soit finalement $P[z] = P_0\left(\frac{a+bz}{a}\right)^{-\frac{M_{air}g}{Rb}}$

Cette expression du champ de pression prend en compte les variations de températures observées expérimentalement dans l'atmosphère : il est plus satisfaisant. Néanmoins, le modèle proposé pour T est *ad hoc* : on ne sait pas expliquer un tel gradient de température. C'est ce qu'on va chercher à faire dans une deuxième partie.

Atmosphère adiabatique

1. **Adiabatique et réversible $\Rightarrow$ Laplace** avec P et T

$$P[z]^{(1-\gamma)/\gamma}T[z] = P_0^{(1-\gamma)/\gamma}T_0 \ \Rightarrow\ \ln\left(P[z]^{(1-\gamma)/\gamma}T[z]\right) = cst \ \Rightarrow\ \ln T(z) + \frac{1-\gamma}{\gamma}\ln P(z) = Cst$$

2. On dérive par rapport au z :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\frac{1}{T[z]} + \beta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\frac{1}{P[z]} = 0 \frac{\mathrm{d}T}{T} + \beta\frac{\mathrm{d}P}{P} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}T}{T} + \beta\frac{\mathrm{d}P}{P} = 0$$

S *Astuce :* si on cherche une expression en $\frac{\mathrm{d}X}{X}$ $\Rightarrow$ on pense au log !

3. Avec l'équation précédente on a : $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -\frac{\beta T}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{\beta}{PT}\times -\frac{M_{air}g}{RT}P[z] = \beta\frac{M_{air}g}{R}$

On retrouve bien une dérivée de la température constante (et négative car $\beta < 0$!) comme précédemment !

4. Il suffit de remarquer qu'on vient de montrer que $a = T_0$ et $b = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{M_{air}g}{R}$. On peut reprendre l'expression trouvée précédemment à la Q4 (*ou refaire l'étude de $P[z]$ ça ne fait pas de mal*) pour trouver :

$$P[z] = P_0\left(\frac{T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{M_{air}g}{R}z}{T_0}\right)^{-\frac{M_{air}g}{R}\times -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{M_{air}g}} \ \Rightarrow\ P[z] = P_0\left(1 - \frac{(\gamma-1)M_{air}g}{\gamma R T_0}z\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

TD25

Statique des Fluides

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Calcul de champ de pression

Exercice 1 - Eau compressible :

On s'intéresse à deux modèles pour étudier le champ de pression dans les océans :

▷ un modèle d'eau incompressible et indilatable, champ de pression $P[z]$

▷ un modèle d'eau compressible, champ de pression $\widetilde{P}[z]$

On graduera l'axe des z vers le bas depuis la surface ($z = 0$) en contact avec l'atmosphère, de pression constante $P_{air} = 1,0.10^5 Pa.$. On note ρ_0 la masse volumique de l'eau à $z = 0$.

1. Exprimer le champ de pression $P[z]$ dans le cas d'un modèle incompressible. Calculer la pression pour une profondeur $h = 30$m et $H = 3000$m.
   On suppose maintenant l'eau compressible. On définit χ_T, le coefficient de compressibilité isotherme on a :
   $$\mathrm{d}P = \frac{1}{\chi_T}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \text{ avec } \chi_T = 4,9.10^{-10} SI$$
   où ρ est la masse volumique de l'eau à la profondeur z.
2. Donner la dimension et l'unité de χ_T
3. Donner l'équation différentielle dont ρ est solution et démontrer que $\rho(z)$ se met sous la forme suivante :
   $$\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 g \chi_T z}$$
4. En déduire la nouvelle expression de la pression $\widetilde{P}$(z).
5. Calculer la nouvelle pression pour une profondeur $h = 30$m et $H = 3000$m. Comparer aux valeurs trouvée à la question 1.

Exercice 2 - Définition de la pression au cœur d'une étoile :

On assimile une étoile à une sphère de rayon R_0, de masse M, de masse volumique μ constante, et constituée d'hydrogène atomique gazeux que l'on peut considérer comme un gaz partait. Le fluide se trouve en équilibre hydrostatique. On rappelle que la constante de gravitation universelle vaut $G = 6,67.10^{-11}$ unités SI.

On peut montrer que le champ de gravitation $\overrightarrow{g}$ existant à la distance $r < R_0$ du centre O de l'étoile est de la forme :

$$\overrightarrow{g}(r) = -\mathcal{G}\frac{M}{R_0^2}\frac{r}{R_0}\overrightarrow{e}_r$$

On admettra dans cet exercice que la loi de la statique des fluides est vraie vis-à-vis de la distance au centre de l'étoile r.

1. Calculer la loi de pression $P(r)$ dans l'étoile, en considérant que la pression à sa surface est nulle.
2. En déduire l'expression de la pression en O, puis celle de la température en ce point.
3. Faire les applications numériques pour le soleil sachant que $R_0 = 696000$ km et $M = 2.10^{30}$ kg.
   Les modèles de structure stellaire complexes donnent au centre du soleil les valeurs de $2,2.10^{16}$ Pa et 15.10^6 K. Commenter les résultats obtenus.

Données : Masse molaire de l'hydrogène $\mathcal{M}_{(H)} = 1g/mol$, $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$

Poussée d'Archimède

Exercice 3 - Solide à l'interface entre deux liquides :

Un bouchon de forme cylindrique, de hauteur h et de surface s (masse volumique $\rho = 850\text{kg.m}^{-3}$) est immergée dans un récipient cylindrique de surface $\mathcal{S}$. Il contient un volume $V_{\text{eau}} = h_1\mathcal{S}$ d'eau ($\rho_1 = 1000\text{kg.m}^{-3}$) et un volume $V_{\text{huile}} = h_2\mathcal{S}$ d'huile ($\rho_2 = 750\text{kg.m}^{-3}$) non miscibles.

1. Quel liquide se trouvera au dessus de l'autre ? Faire un schéma du système
2. On choisit un axe verticale orienté vers le haut dont l'origine O se trouve au fond du récipient. Donner le champ de pression dans tout le système.
3. Trouver la hauteur δh de la partie du solide immergée dans l'eau.

Exercice 4 - Ascension d'une montgolfière :

Nous supposons l'atmosphère isotherme (température $T = 290$ K), constituée d'air au repos, assimilé à un gaz parfait de masse molaire uniforme ($M = 29$ g.mol^{-1}). Le champ de gravitation est également supposé de norme g uniforme aux altitudes considérées. L'axe (Oz) est orienté suivant la verticale ascendante et, à la surface du sol (altitude $z = 0$), la pression vaut $P_0 = 10^5$ Pa.

1. Établir l'expression de la pression $P(z)$ en tout point de l'atmosphère, en fonction de l'altitude z et des autres données.

Un scientifique décide de s'envoler à bord d'une montgolfière (sphère de rayon $r = 5$ m). Il la gonfle avec de l'hélium à la pression atmosphérique et à la température ambiante T, puis il la ferme hermétiquement. La masse totale de la montgolfière, y compris l'hélium et le passager, est $m = 600$ kg.

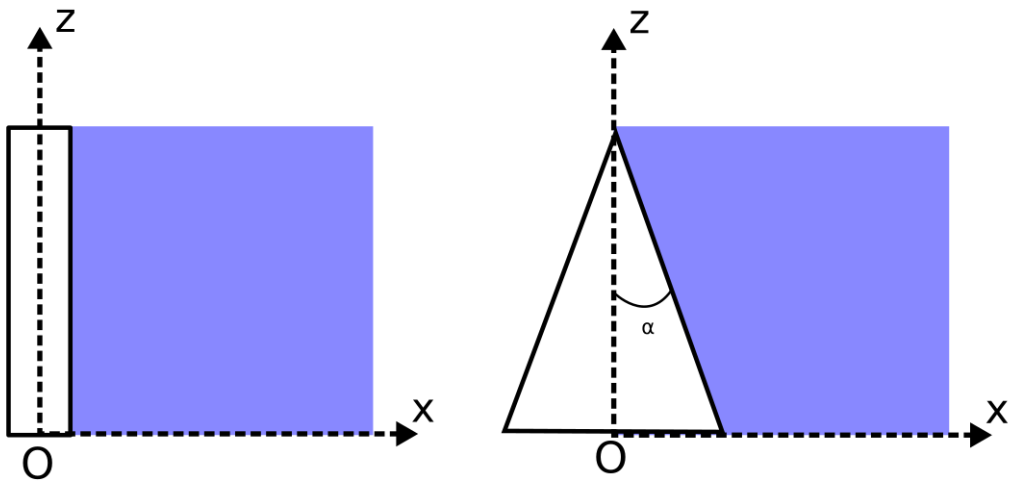
2. Déterminer la force ascensionnelle au départ et la condition sur m pour qu'elle puisse s'envoler. Conclure.
3. Au fur et à mesure que la montgolfière monte, comment la force ascensionnelle varie-t-elle ? Justifier.
4. Déterminer l'altitude plafond z_{max} atteinte par la montgolfière.
5. (*) Montrer que la dynamique du mouvement autour de l'altitude z_max est celle d'un oscillateur harmonique. Pour cela on introduire la variable $\Delta z = z - zmax$. On supposera que $|\Delta z| << z_{max}$.
   On rappelle que : $\exp(-\alpha x) \simeq 1 - \alpha x$ si $x << 1$.

Résultante des forces de pression sur un solide

Exercice 5 - Forme d'un barrage :

On considère une retenue d'eau d'une largeur $L = 600$m et d'une hauteur d'eau $h = 124$m. On s'intéresse dans cet exercice à la résultante des forces de pression sur le barrage suivant la forme de ce dernier. On étudie deux architecture :

▷ **Cas 1 :** la barrage est plat : de profil, il a une forme rectangulaire
▷ **Cas 2 :** les faces du barrage sont inclinés : de profil, il a une forme de triangle

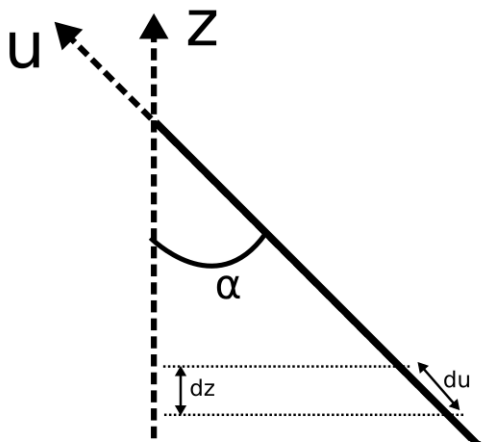


1. Pour les deux cas, exprimer le champ de pression $P(z)$ dans l'eau.

2. **Cas 1 :** exprimer la résultante des forces de pressions de l'air (à gauche) et de l'eau (à droite).

Cas 2 :

3.(a) Exprimer la surface élémentaire dS du barrage en fonction de du et dy.
(b) Exprimer la longueur du en fonction de dz et α.
(c) En déduire une expression de dS en fonction de dz, dy et α.



4. Montrer que la résultante des forces de pression de l'air (à gauche) du barrage est :

$$\vec{F}_{P,a,2} = P_0 Lh\,\vec{e}_x - P_0 Lh \tan\alpha\,\vec{e}_z$$

5. Montrer que la résultante des forces de pression de l'eau (à droite) du barrage est :

$$\vec{F}_{P,2} = -\left(LhP_0 + \frac{Lh^2\rho g}{2}\right)\vec{e}_x - \left(LhP_0 + \frac{Lh^2\rho g}{2}\right)\tan\alpha\,\vec{e}_z$$

6. Discuter l'intérêt d'une telle forme pour un barrage.

Exercice 6 - Résultante des forces de pression sur un cône (*) :

Un cône plein, de hauteur h et dont la base est un cercle de rayon R, a une masse m et repose sur le fond plan d'une piscine remplie d'eau, de masse volumique μ uniforme, sur une hauteur H.

1. Déterminer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le cône.
2. L'intensité de cette force est égale au poids d'un certain volume d'eau que l'on déterminera. Justifier et vérifier le résultat.

Petits exercices comme ça ...

Exercices pas du tout prioritaires !!

Exercice 7 - Quelques questions courtes :

Profondeur des océans : Calculer en atm la pression qui règne au fond de la fosse des Mariannes (l'endroit le plus profond de l'Océan Pacifique : environ 11 km).

Réponse : 11.10^7 Pa $= 1100$ bar

Iceberg : Un iceberg de masse volumique ρ_1, flotte dans de l'eau ayant une masse volumique ρ_2. Que peut-on dire sur la hauteur immergée h_2 et sur la hauteur h_1 de la pointe émergeant de l'eau ?

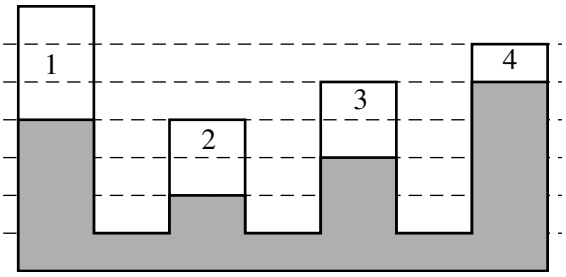
(a) $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$; (b) $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$; (c) $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$; (d) $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$;

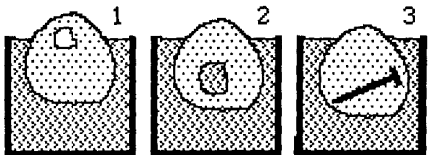
(e) $\dfrac{h_1}{h_2}$ dépend de la forme de la pointe

Réponse : (e) La relation concerne les volumes

Glaçon : Un glaçon flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. Que se passe-t-il une fois que le glaçon a fondu totalement.

Réponse : Pas de débordement, ni de baisse du niveau de l'eau





Équation barométrique : Le récipient fermé ci-dessous contient de l'eau et de l'air. Dans quelle partie verticale la pression de l'air est-elle la plus haute et dans quelle partie est- elle la plus basse ?

Réponse : $P_4 < P_1 < P_3 < P_2$

Les glaçons : Dans les glaçons flottant dans les verres ci-dessus on a emprisonné une bulle d'air (1), de l'eau (2) et un clou (3). Que peut-on dire des niveaux d'eau dans chacun des verres une fois que les glaçons auront fondu ?

(a) Seul le verre 3 déborde

(b) Le niveau d'eau du verre 3 baisse et les autres ne bougent pas

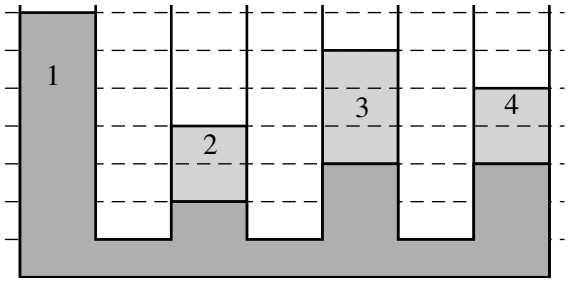
(c) Le niveau du verre 1 ne bouge pas et les autres débordent

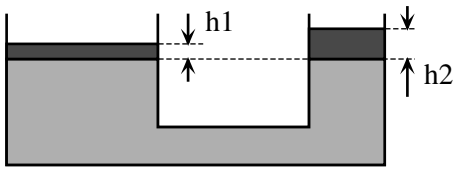
(d) Tous débordent

(e) Tous restent au même niveau

Réponse : (b)

Densité : Le récipient ci-dessous contient en tout quatre liquides différents. Classer les dans l'ordre des densités croissantes.





Réponse : $\rho_1 < \rho_3 < \rho_4 < \rho_2$

Presse hydraulique : Deux cylindres verticaux, de section horizontale A_1 et A_2 remplis d'huile sont reliés par un tuyau horizontal. Les cylindres sont fermés par des pistons faits du même métal. Que peut-on dire des épaisseurs h_1 et h_2 des cylindres, sachant que le tout est à l'équilibre ?

Réponse : $h_1 = h_2$

TD25 Statique des Fluides

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

Calcul de champ de pression

Exercice 1 - Eau compressible :

1. *Cf cours,* **Attention !** *sens de l'axe*
   On trouve $P[z] = P_0 + \rho_0 g z$ soit $P[h] = 3,94\text{bar}$ et $P[H] = 295\text{bar}$.

2. $[\chi_T] = \dfrac{1}{[\mathrm{d}P]}\dfrac{[\mathrm{d}\rho]}{[\rho]} = \dfrac{1}{[P]} = \text{Pa}^{-1} = \text{kg}^{-1}\text{m.s}^2$.

3. ▷ **Équation de la statique :** $\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}z} = \rho g$, **Attention !** $\rho = \rho[z] \neq \rho_0$!!

   ▷ **Lien entre ρ et $\widetilde{P}$:** $\mathrm{d}\widetilde{P} = \dfrac{1}{\chi_T}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$.
   On remplace $\mathrm{d}P$ dans l'équation de la statique :

   $$\frac{1}{\chi_T}\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} = \rho g \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z} = g\chi_T\rho^2$$

   C'est pas une équation différentielle "classique" ⇒ **Séparation des variables** et on intègre

   $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2} = g\chi_T\mathrm{d}z \;\Rightarrow\; \left[-\frac{1}{\rho}\right]_{\rho_0}^{\rho[z]} = g\chi_T\,[z]_0^z \;\Rightarrow\; \frac{1}{\rho[z]} - \frac{1}{\rho_0} = -g\chi_T z$$

   On trouve alors bien $\rho(z) = \dfrac{\rho_0}{1-\rho_0 g\chi_T z}$.

4. On injecte $\rho[z]$ dans l'équation de la statique : $\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\rho_0 g}{1-\rho_0 g\chi_T z}$.
   C'est pas une équation différentielle "classique" ⇒ **Séparation des variables** et on intègre

   $$\mathrm{d}\widetilde{P} = \rho_0 g\frac{\mathrm{d}z}{1-\rho_0 g\chi_T z} \;\Rightarrow\; \widetilde{P}[z] - P_0 = \rho_0 g\left[\frac{-1}{\rho_0 g\chi_T}\ln\left(1-\rho_0 g\chi_T z\right)\right]_0^z$$

   On trouve : $\widetilde{P}[z] = P_0 - \dfrac{1}{\chi_T}\ln\left(1-\rho_0 g\chi_T z\right)$.

5. On trouve $\widetilde{P}[h] = 3,94\text{bar}$ et $\widetilde{P}[H] = 297\text{bar}$. On remarque que $\widetilde{P} > P$ et que l'écart se ressent plus à grande profondeur.

Exercice 2 - Définition de la pression au cœur d'une étoile :

1. ▷ **Équation de la statique :** $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\mu g$ **Attention !** l'axe va du centre vers l'extérieur, donc opposé à (Or).
   Attention ! g varie donc on ne peut pas intégrer de suite

   $$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\mathcal{G}\frac{M\mu}{R_0^2}\frac{r}{R_0} \;\Rightarrow\; P[r] = -\mathcal{G}\frac{M\mu}{R_0^3}\frac{r^2}{2} + C$$

   Condition limite : $P[r=R] = 0$, c'est le vide. Donc $P[r] = \mathcal{G}\dfrac{M\mu}{2R_0^3}\left(R^2 - r^2\right)$.

2. Au center $r = 0$ et donc $P[0] = \mathcal{G}\frac{M\mu}{2R_0}$. Avec les **GP**, on a :

$$T[0] = \frac{P[0]V}{nR} = \frac{P[0]\mathcal{M}}{R}\frac{V}{m} = \frac{P[0]\mathcal{M}}{\mu R}$$

3. Pour trouver μ =masse/volume de l'étoile $\mu = \frac{M}{4\pi R^3/3}$. On fait les **AN** et on trouve quelque chose d'assez proche.

Poussée d'Archimède

Exercice 3 - Solide à l'interface entre deux liquides :

1. L'huile est moins dense que l'eau, elle sera donc au dessus.
2. On applique la loi de la statique dans chacun des deux fluides

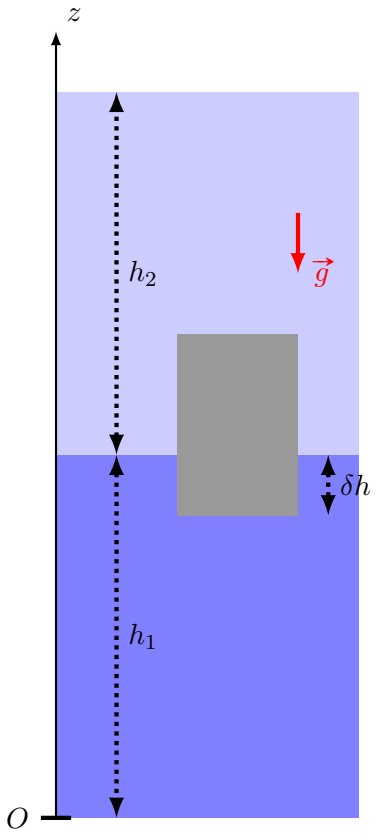
$$\begin{cases} \frac{P_1}{\mathrm{d}z} = -\rho_1 g \\ \frac{P_1}{\mathrm{d}z} = -\rho_2 g \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = -\rho_1 g z + C_1 \\ P_2 = -\rho_2 g z + C_2 \end{cases}$$

Condition limite : $P_2(h_1 + h_2) = P_0$ et (*continuité de la pression*) $P_1(h_1) = P_2(h_1)$

$$\begin{cases} P_0 = -\rho_2 g(h_1 + h_2) + C_1 \\ -\rho_1 g h_1 + C_1 = -\rho_2 g h_1 + C_2 \end{cases}$$

Donc $C_1 = P_0 + \rho_2 g(h_1 + h_2)$ et $C_2 = C_1 + (\rho_2 - \rho_1) g h_1$.



3. On a un solide plongé dans un liquide à l'équilibre ⇒ Poussée d'Archimède + Somme des forces =0

▷ poids du bouchon : $m\vec{g} = hs\rho\vec{g}$.

▷ poussée d'Archimède du liquide 1 : $\vec{\Pi}_1 = -V_1\rho_1\vec{g}$ avec V_1 le volume immergé du bouchon **dans le liquide 1**, $V_1 = s\delta h$

▷ poussée d'Archimède du liquide 2 : $\vec{\Pi}_2 = -V_2\rho_2\vec{g}$ avec V_2 le volume immergé du bouchon **dans le liquide 2**, $V_2 = s(h - \delta h)$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; hs\rho - s\delta h\rho_1 - s(h - \delta h)\rho_2 = 0 \;\Rightarrow\; \delta h = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} h$$

Exercice 4 - Ascension d'une montgolfière :

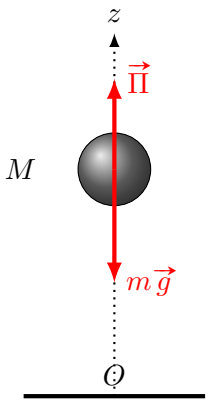
1. *Cf cours !*
2. Force ascensionelle est due à la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -V\rho_{air}\vec{g}$ avec V le volume de la montgolfière $V = 4\pi r^3/3$ et $\rho_{air} = MP[z]/RT$.

Au niveau du sol : $\vec{\Pi} = +\dfrac{4\pi r^3}{3}\dfrac{MP_0}{RT}g\vec{e}_z$.

Pour que la montgolfière décolle $\Pi > mg$ soit $m < \dfrac{4\pi r^3 MP_0}{3RT}$.

3. Au fur et à mesure que la montgolfière monte, la pression diminue donc la force ascensionnelle diminue également.

4. *Si on ne voit pas bien quoi faire ... on est en mécanique ... on applique le* ***PFD*** **Attention !** on ne perd pas le déroulé du **PFD** $\Rightarrow$ on se réfère à sa fiche méthode !!



▷ **Vecteur cinématiques :**

$$\overrightarrow{OM} = z(t)\vec{e}_z \ ; \ \vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z \ ; \ \vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$$

▷ **Forces :** poids $-mg\vec{e}_z$; poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi} = +\frac{4\pi r^3 MP_0}{3RT}\exp\left[-\frac{Mg}{RT}z\right]g\vec{e}_z$$

▷ **PFD** :

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{4\pi r^3 MP_0}{3RT}\exp\left[-\frac{Mg}{RT}z\right]g$$

A l'altitude plafond, le système est à l'équilibre donc $\ddot{z} = 0$. On cherche alors :

$$-mg + \frac{4\pi r^3 MP_0}{3RT}\exp\left[-\frac{Mg}{RT}z_{max}\right] \ \Rightarrow \ z_{max} = \frac{RT}{Mg}\ln\frac{4\pi r^3 MP_0}{3mRT}$$

5. (*) Avec Δz on a $z = z_{max} + \Delta z$ et :

$$\exp\left[-\frac{Mg}{RT}z\right] = \exp\left[-\frac{Mg}{RT}(\Delta z + z_{max})\right] = \exp\left[-\frac{Mg}{RT}z_{max}\right] \times \exp\left[-\underbrace{\frac{Mg}{RT}z_{max}}_{\alpha}\underbrace{\frac{\Delta z}{z_{max}}}_{x}\right]$$

La première exponentielle est égale à : $\exp\left[-\dfrac{Mg}{RT}z_{max}\right] = \dfrac{3mgRT}{4\pi r^3 MP_0}$ (*cf avant*) et la deuxième à la forme du DL.
On fait le DL : $\exp\left[-\dfrac{Mg}{RT}z\right] \simeq \dfrac{3mgRT}{4\pi r^3 MP_0} \times \left(1 - \dfrac{Mg}{RT}z_{max}\dfrac{\Delta z}{z_{max}}\right)$

Le PFD s'écrit alors :

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{4\pi r^3 MP_0}{3RT}\frac{3mgRT}{4\pi r^3 MP_0} \times \left(1 - \frac{Mg}{RT}\Delta z\right)$$

Ds termes de simplifient et on trouve :

$$m\ddot{z} = -mg + mg\left(1 - \frac{Mg}{RT}\Delta z\right) \ \Rightarrow \ \ddot{\Delta z} + \frac{Mg}{mRT}\Delta z = 0$$

On retrouve bien l'équation d'un oscillateur harmonique.

Résultante des forces de pression sur un solide

Exercice 5 - Forme d'un barrage :

1. *Cf cours :* $P[z] = P_0 + \rho_0 g(h-z)$
2. *Cf cours :* **Attention !** c'est du cours mais ce n'est pas facile pour autant. Il faut à chaque étape bien comprendre ce que l'on fait !
   Cas 2 :

3.(a) c'est un carré de coté $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}y$ donc $\mathrm{d}S = \mathrm{d}u\mathrm{d}y$
(b) un peu de trigo ... $\mathrm{d}u = \mathrm{d}z/\cos\alpha$
(c) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z/\cos\alpha$

4. ▷ **surface élémentaire et totale** :
   $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z/\cos\alpha$ et $S : y : 0 \to L$ et $z : 0 \to h$.
   Attention ! à bien décomposé le vecteur $\vec{n}$ dans la base cartésienne : $\vec{n} = -\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z$.
   ▷ **force élémentaire :**

$$\mathrm{d}\vec{F} = -P_0 \mathrm{d}S\,\vec{n} = -P_0 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\alpha}\left(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z\right)$$

   ▷ **force totale :**

$$\vec{F}_{P,a,2} = -\int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{h} P_0 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\alpha}\left(-\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z\right) = P_0 Lh\,\vec{e}_x - P_0 Lh\tan\alpha\,\vec{e}_x$$

5. ▷ **surface élémentaire et totale** :
   $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z/\cos\alpha$ et $S : y : 0 \to L$ et $z : 0 \to h$.
   Attention ! à bien décomposé le vecteur $\vec{n}$ dans la base cartésienne : $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z$.
   ▷ **force élémentaire :**

$$\mathrm{d}\vec{F} = -\left(P_0 + \rho_0 g(h-z)\right)\mathrm{d}S\,\vec{n} = -\left(P_0 + \rho_0 g(h-z)\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z\right)$$

   ▷ **force totale :**

$$\vec{F}_{P,a,2} = -\int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{h}\left(P_0 + \rho_0 g(h-z)\right)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z\right)$$

   Astuce : le vecteur $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z$ est une constante, on peut le sortir de l'intégrale !

$$\vec{F}_{P,a,2} = -\frac{\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z}{\cos\alpha}\int_{y=0}^{L}\int_{z=0}^{h}\left(P_0 + \rho_0 g(h-z)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   et on retrouve l'intégrale "classique" du cours ...

$$\vec{F}_{P,2} = -\left(LhP_0 + \frac{Lh^2\rho g}{2}\right)\vec{e}_x - \left(LhP_0 + \frac{Lh^2\rho g}{2}\right)\tan\alpha\,\vec{e}_z$$

6. Contrairement à la forme droite, la résultante des forces de pression sur un barrage triangulaire possède une composante suivant $\vec{e}_z$. Cela permet "d'enfoncer" le barrage dans le sol, augmentant sa stabilité (par exemple, il a moins de chance de basculer).