

Le Soulard

PCSI

Tome 9 : Induction

- *Description des champ électro-magnétiques*
- *Mouvement de particules chargées*
- *Lois de l'induction*
- *Induction de Lorentz et Neumann*

***Cours de Physique
de première année
de classe préparatoire***

Lycée Louis Thuillier

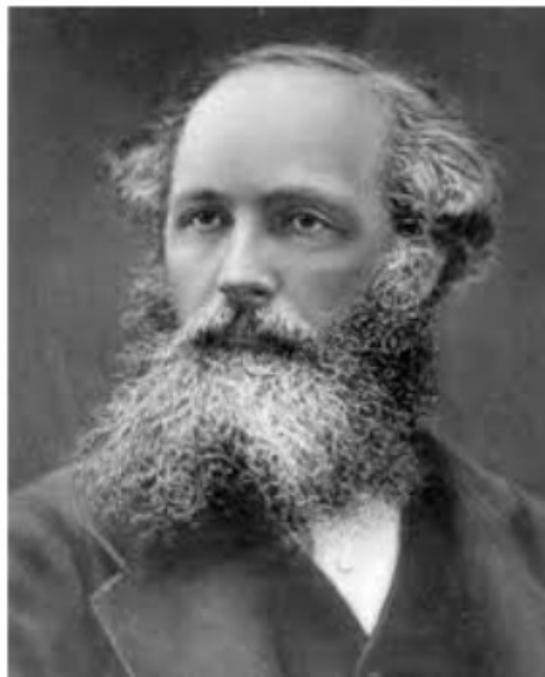
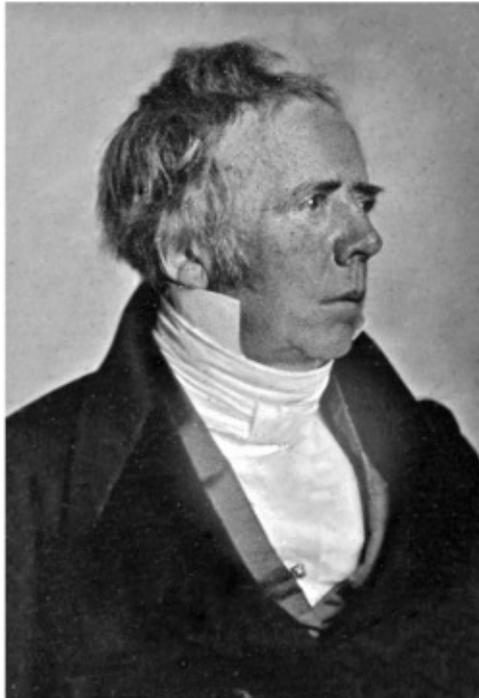
Chap XXVI

Champ magnétique : sources et caractérisations

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Champ magnétique | 3 |
| 1.1 | Mise en évidence expérimentale. | 3 |
| 1.2 | Description du champ magnétique | 4 |
| 1.3 | Unité et ordre de grandeur | 5 |
| 2 | Création d'un champ magnétique avec un courant électrique | 6 |
| 2.1 | Propriétés du champ magnétique. | 6 |
| 2.2 | Moment magnétique | 7 |
| 3 | Exercices d'applications | 9 |
| 3.1 | Bobines de Helmholtz | 9 |
| 3.2 | De la spire à la bobine | 10 |



Savoirs ♥

- ▷ ♥ **Carte de champ**
 - ▷ notion de champ vectoriel
 - ▷ ligne, carte et tube de champ
 - ▷ carte de champ d'un fil infini, d'un dipôle magnétique et d'une spire de courant
- ▷ ♥ Sens du champ magnétique suivant le courant i qui lui donne naissance
- ▷ ♥ Invariance et symétrie du champ \vec{B}
- ▷ ♥ **Moment magnétique**
 - ▷ vecteur surface d'une spire
 - ▷ moment magnétique d'une spire

Savoir Faire

-  *Analyser une carte de champ pour reconnaître*
 - ▷ les sources et leurs positions
 - ▷ les zones où le champ est uniforme

-  *Proposer un dispositif pour générer un champ \vec{B} uniforme*

Ce cours prendra la forme d'un cours inversé :

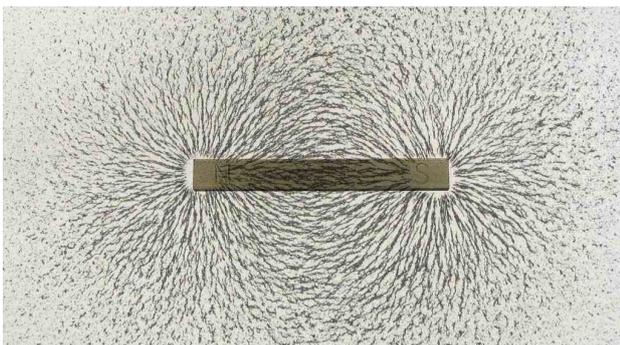
- ▷ vous aurez le cours rédigé à travailler à la maison
- ▷ puis nous ferons en classe une séance de questions-réponses ainsi que les exercices

1 Champ magnétique

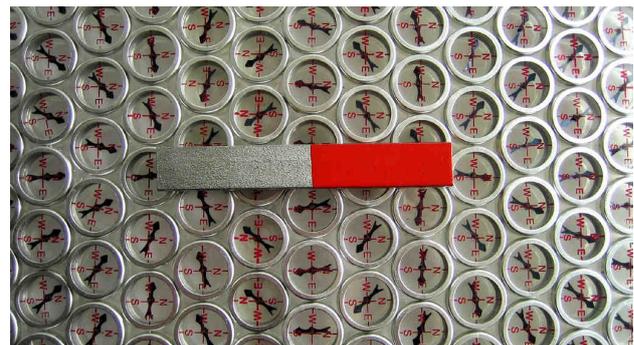
1.1 Mise en évidence expérimentale

► Les aimants

Dès l'antiquité, les hommes remarquent qu'un minéral naturel, appelé magnétite (essentiellement de l'oxyde de fer), a la propriété d'attirer de petits morceaux de fer. Cette interaction est appelée **magnétisme**, les solides capables d'attraction magnétique étant appelés **aimants**.



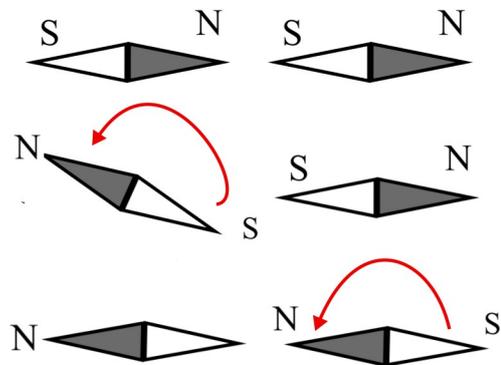
(a) Alignement de la limaille de fer autour d'un aimant.



(b) Organisation de boussoles autour d'un aimant.

Fig. 1 – Photographie de l'alignement de limaille de fer et de boussoles autour d'un aimant.

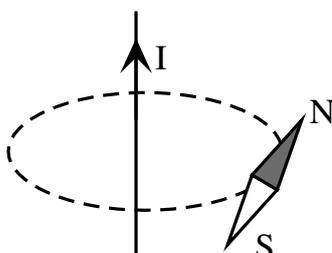
On constate que les aimants, quelle que soit leur forme et leur taille, sont **polarisés**. C'est-à-dire qu'il possède un pôle Nord et un pôle Sud. Si un aimant est brisé, chacun des éclats aura à nouveau deux pôles.



On observe que

- ▷ le pôle Nord d'un aimant et le pôle Sud d'un autre aimant s'attirent ;
- ▷ les deux pôles de même polarité de deux aimants se repoussent.

► Les courants : expérience d'Oersted



Au début du XIX^e siècle, l'étude de la magnéto-statique fait un véritable bond en avant grâce à une expérience révolutionnaire : l'expérience d'Oersted en 1819. Ce physicien a l'idée d'approcher un aimant d'un fil conducteur parcouru par un courant. Il observe alors que la boussole prend une direction privilégiée lorsque le courant électrique est non nul. D'autre part, le sens de la boussole s'inverse si le courant change également de sens.

La conclusion de cette expérience est donc que les courants exercent également une action mécanique sur les aimants.

Conclusion :

On est en présence d'effets mécaniques à distance générés par des aimants ou des courants électriques. Ces interactions sont des interactions autres que gravitationnelles et électrostatiques, d'où la nécessité d'introduire un nouveau type d'interactions. Ces dernières vont être modélisées par un champ vectoriel : le champ magnétique \vec{B} .

1.2 Description du champ magnétique**► Notion de champ vectoriel**

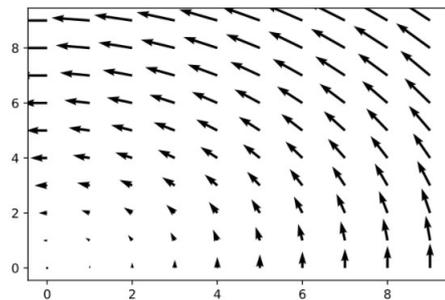
Le champ magnétique est un champ vectoriel, noté $\vec{B}(M, t)$.

Définition. Champ vectoriel

Un champ vectoriel est une grandeur physique vectorielle qui dépend à la fois de la position et du temps. Il est défini par un vecteur en tout point M de l'espace à chaque instant T .

Exemple : l'accélération de la pesanteur, le champ électrique \vec{E} , ...

Pour représenter un champ de vecteur, on quadrille l'espace de façon régulière et on représente en chaque point du quadrillage le vecteur du champ par une flèche.



Application 1 : Représenter le champ de pesanteur terrestre

▷ pour une altitude $z = 0\text{m}$ à $z = 100\text{m}$ où \vec{g} est constant

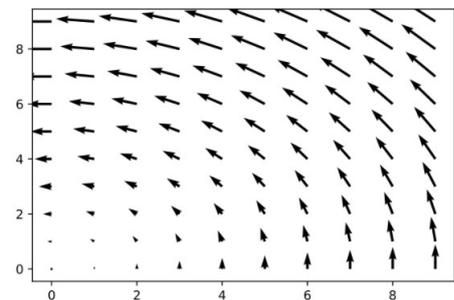
▷ pour une altitude $z = 0\text{m}$ à $z = 100\text{km}$ où \vec{g} varie

► Ligne, tube et carte de champ**Définition. Ligne de champ**

Une ligne de champ est la courbe tangente en tout point de l'espace au vecteur du champ vectoriel considéré.

Exemple 1 :

Une fois qu'on a représenté en chaque point du quadrillage le champ \vec{B} , on "relie les points en suivant les flèches" : on trace ainsi les lignes de champ créant une carte de champ.

**Définition. Carte de champ**

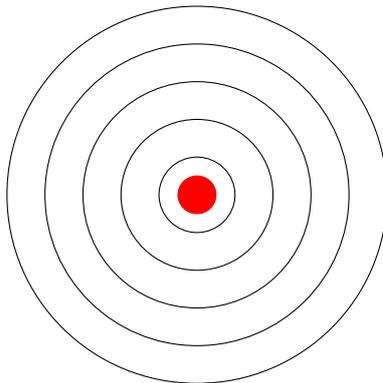
Une carte de champ est le tracé de ligne de champ dans une région de l'espace permettant ainsi de visualiser le champ magnétique \vec{B} et de déduire comment un objet pourra interagir avec ce champ.

*** **Attention !** Le champ magnétique \vec{B} a un sens ! On représente le sens de \vec{B} sur les lignes de champs par une flèche.

► ♡ **Carte de champ à connaître et reconnaître** ♡

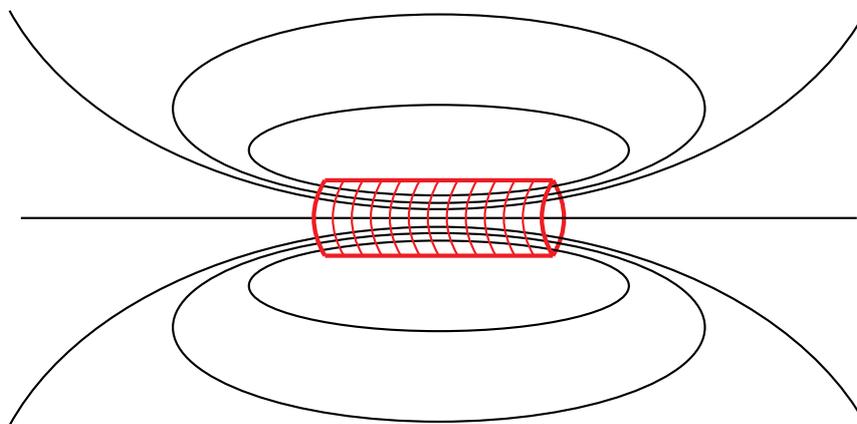
On représente les cartes de champ vues du dessus. Pour plus de généralité on ne précise pas le sens du champ \vec{B} (ce point sera discuté dans la partie suivante).

▷ **Fil**



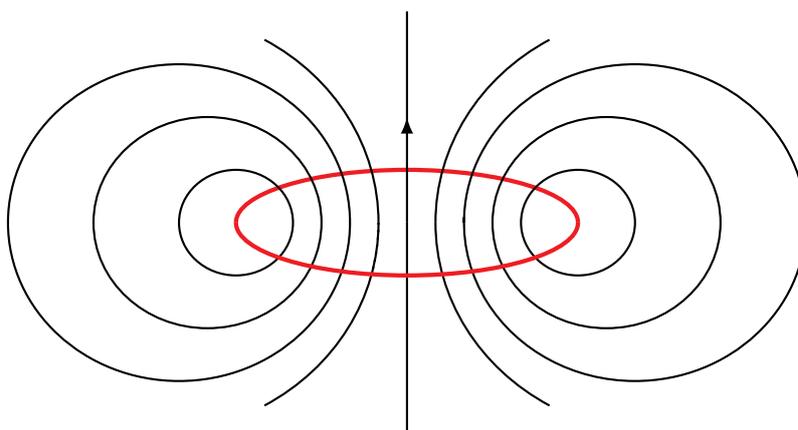
Le fil est perpendiculaire au plan des lignes de courant.

▷ **Dipôle** : aimant ou bobine



Le dipôle est dans le plan des lignes de courant.

▷ **Spire de courant**



La spire de courant est perpendiculaire au plan des lignes de courant.

1.3 Unité et ordre de grandeur

Définition. Unité du champ \vec{B}

L'unité de mesure du champ magnétique dans le système international est le Tesla, symbole T.

$$1\text{T} = 1 \text{ kg} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Dans la vie courante, les champs magnétiques sont de l'ordre du Tesla ou plus petit. Néanmoins, on peut rencontrer dans l'univers des structures produisant des champs magnétiques formidables.

| | |
|---------------------------|-----------------------------|
| Champ terrestre | $4 \times 10^{-5} \text{T}$ |
| Moteur électrique | 0.5T |
| électro-aimant | 1T |
| champ pulsé artificiel | 100T |
| IRM | 6T |
| Pulsar (étoile à neutron) | 10^8T |

2 Création d'un champ magnétique avec un courant électrique

L'expérience d'Oersted a permis de mettre en évidence une similitude entre un aimant et un fil électrique parcouru par un courant : les deux génèrent un champ magnétique.

Dans la suite des chapitres, nous allons nous intéresser plus en détail aux liens champ magnétique-courant électrique.

Définition. Courant électrique et charges

L'intensité électrique I est définie comme la quantité de charge dq traversant une surface (\sim section d'un fil conducteur) pendant un temps infinitésimal dt :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

2.1 Propriétés du champ magnétique

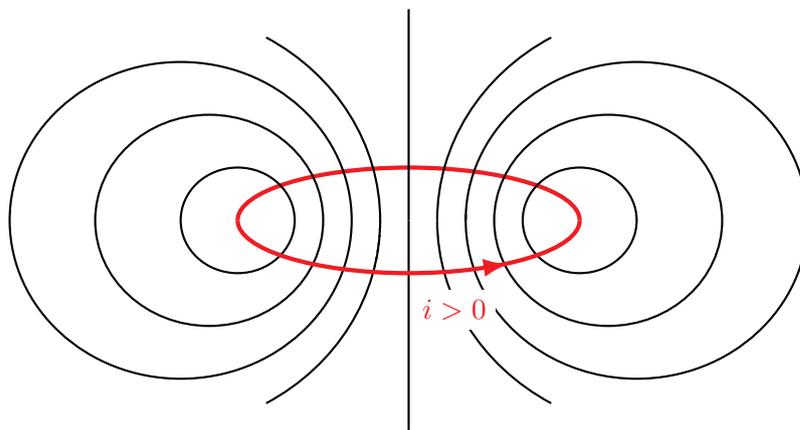
► Orientation du champ magnétique créé par un courant

Propriété. Sens du champ magnétique

L'orientation du champ magnétique et des lignes de champ par rapport au courant qui lui a donné naissance est régie par la règle de la main droite :

- ▷ le courant passe par le pouce
- ▷ puis l'index
- ▷ le majeur donne le sens de \vec{B}

Application 2 : Orienter les lignes de champ créé par la boucle de courant i .



► Symétrie et invariance

Propriété. Invariance

Si le courant créant le champ \vec{B} est invariant par rotation ou translation, alors le champ \vec{B} aura les mêmes invariances.

Astuce pratique :

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Depuis un point M :

- ▷ si le courant est invariant par translation suivant (Oz) alors \vec{B} est indépendant de z .

▷ si le système est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) , alors le champ \vec{B} est indépendant de θ .

Exemple 2 : Dans le cas d'un fil infini, le courant est :

▷ invariant par rotation : je peux tourner le fil, le courant reste le même.

⇒ le champ \vec{B} est invariant par rotation : ses lignes de courant dessinent des cercles

▷ invariant par translation le long du fil : si je me déplace le long du fil, le courant reste le même. ⇒ le champ \vec{B} est invariant par translation suivant l'axe du fil : ses lignes de champs sont les mêmes en tout plan perpendiculaire au fil.

Propriété. Symétrie

On se place en un point M de l'espace. S'il existe un plan P qui est un plan de symétrie du courant passant par M alors le champ \vec{B} créé en M par le courant est perpendiculaire au plan P

2.2 Moment magnétique

Pour certains système tel qu'un aimant ou une spire de courant, il est possible de remplacer le système par un système théorique qui génère le même champ magnétique, et donc possède les même propriétés : **un moment magnétique.**

► **Vecteur surface d'une spire**

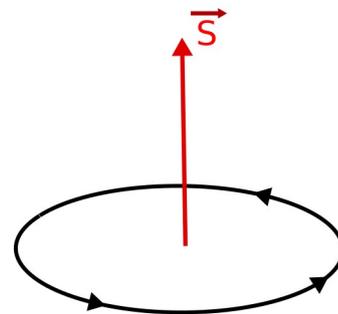
On considère une spire plane (circuit fermé) de surface S . On définit un sens conventionnel pour le courant qui parcourt cette spire.

⚠⚠⚠ **Attention !** On fixe le sens de mesure de I , pas son signe!!!

Définition. Vecteur surface d'une spire

Le vecteur surface \vec{S} d'une spire plane est défini par :

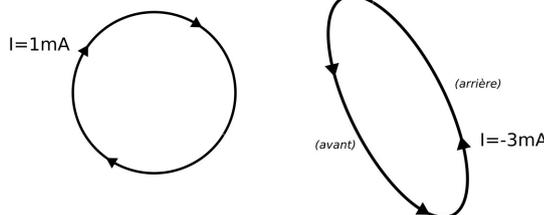
- ▷ sa norme : égale à la surface S définie par la spire
- ▷ sa direction : orthogonale au plan de la spire
- ▷ son sens : défini à partir du sens du courant de la spire définie par la règle de la main droite (ou sens direct)



Orienter une surface

1. le sens du courant passe par le pouce
2. puis par l'index
3. le majeur indique la direction de \vec{S}

Application 3 : Définir le vecteur \vec{S} dans les deux cas suivants :



► Moment magnétique d'une spire

Définition. Moment magnétique

Un moment magnétique \vec{M} d'une spire plane de surface S parcourue par un courant I est défini par :

$$\vec{M} = I\vec{S}$$

avec I l'intensité du champ (positive ou négative!!) mesurée dans le sens d'orientation de la spire et \vec{S} le vecteur surface de la spire.

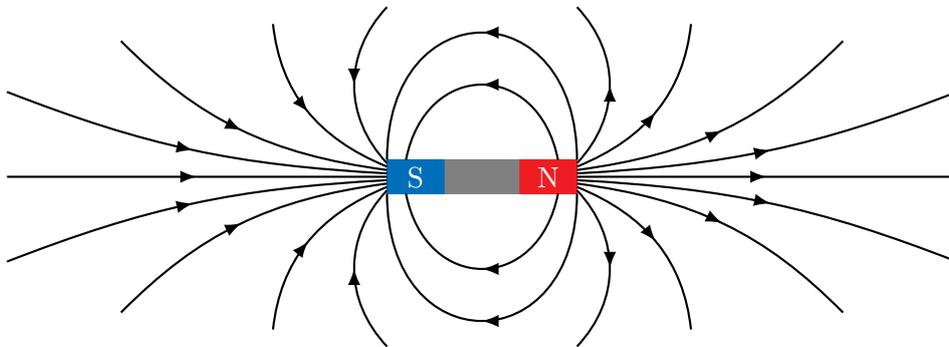
Si on considère N boucle de courant, le moment magnétique est simplement $\vec{M} = NI\vec{S}$.

On peut alors donner une expression simple du champ magnétique à l'aide de \vec{B} .

► Cas d'un aimant

Un aimant crée un champ magnétique similaire à celui d'une boucle de courant : on lui associe alors un dipôle magnétique. Suivant le sens du champ magnétique, on peut définir deux pôles Nord et Sud.

Propriété. Les boussoles s'orientent suivant les lignes du champ magnétique dans le sens Nord → Sud.



Application 4 : Tracer sur la Terre donnée en image, les lignes de champ du champ magnétique terrestre. Conclure sur le Pôle Nord géographique et le Pôle Nord magnétique.

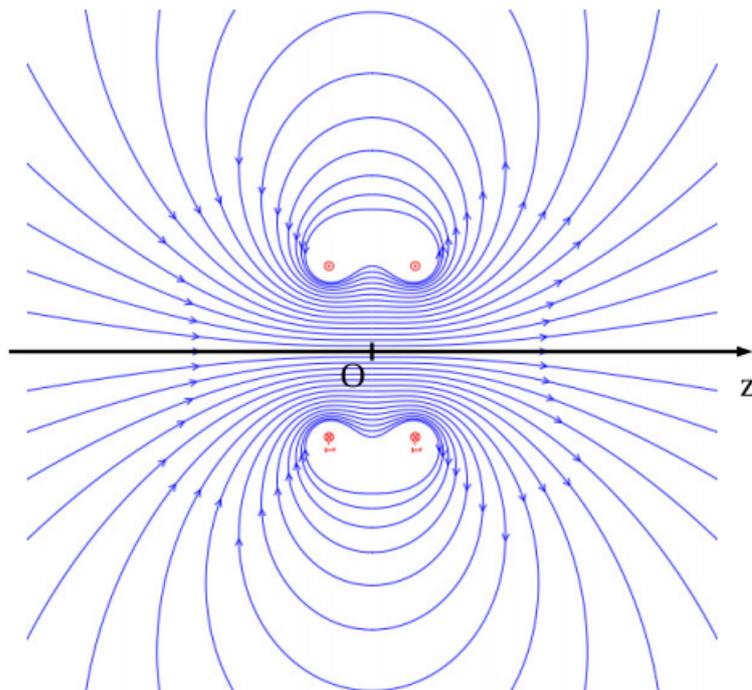


3 Exercices d'applications

Cette partie fait office de TD.

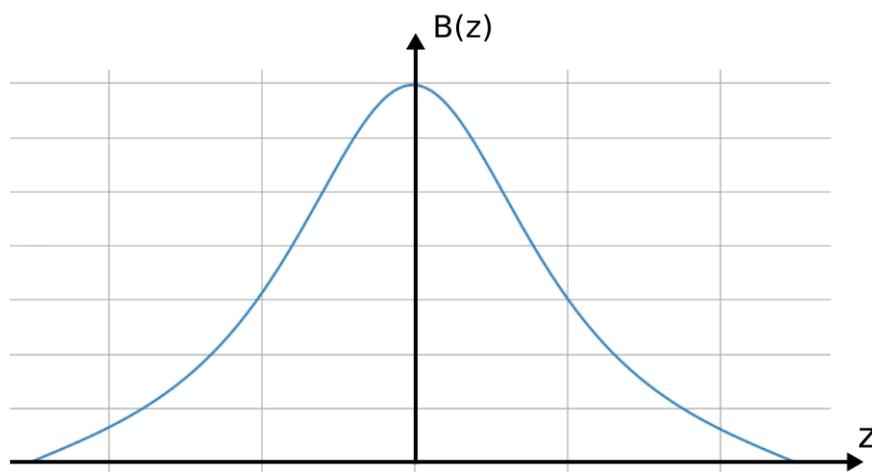
3.1 Bobines de Helmholtz

1. On donne la carte de champ suivante :



Identifier les sources du champ magnétique et représenter la configuration expérimentale sur un schéma (on fera attention à bien représenter les axes).

2. On représente ci dessous l'intensité du champ \vec{B} généré par une bobine le long de son axe.



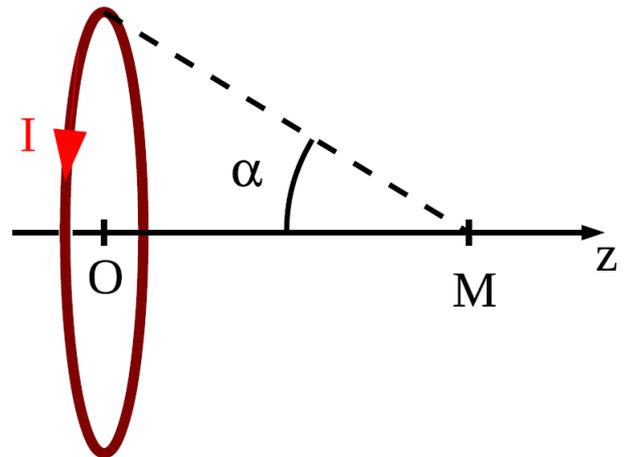
Proposer un montage expérimentale simple afin de générer dans une zone de l'espace un champ \vec{B} constant.

3. En revenant à la carte des champs, donner la forme des lignes de courant si le champ \vec{B} est constant.

3.2 De la spire à la bobine

On considère une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant I et d'axe de révolution (Oz). On admettra que le champ magnétique créé par la spire au point M situé sur l'axe est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$



où α est l'angle sous lequel on voit la spire.

La spire

1. A l'aide des symétries, justifier la direction du champ magnétique sur l'axe (Oz).
2. Donner l'expression du champ \vec{B} en fonction de z .
3. Tracer la courbe $B(z)$ pour $I = 1\text{A}$ et $R = 5\text{cm}$.
 . Où le champ est-il maximal ?

Passage à la bobine

On considère une bobine de longueur L contenant N spires parcourues par un courant I . On appelle $n = L/N$ la densité de spire de la bobine.

On considère toujours un point M sur l'axe des spires.

1. A partir des invariances et des symétries, exprimer la direction et la dépendance du champ \vec{B} généré par la bobine.
2. (*) On considère une tranche de largeur dz de la bobine.
 - ▷ Combien y-a-il de spire dans cette tranche ?
 - ▷ Exprimer le champ $d\vec{B}$ créé par cette tranche au niveau du point M en fonction de μ_0, n, dz, I, R et α .
 - ▷ Dans cette configuration $\tan \theta = R/z$. Montrer alors que :

$$dz = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

On appelle θ_1 et θ_2 , les deux angles extrêmes sous lesquels on voit la bobine depuis le point M .

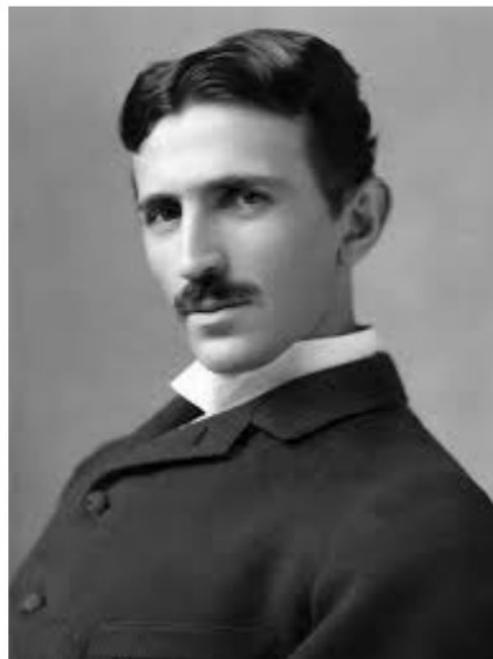
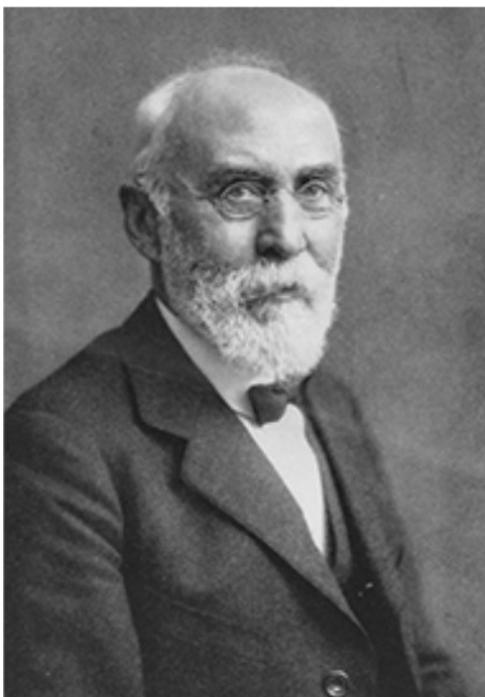
▷ Montrer que le champ \vec{B} est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2R} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_z$$

3. Exprimer $\vec{B}(M)$ dans le cas d'une bobine infiniment longue.

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Rappel sur les champs électriques et champ magnétiques | 3 |
| 1.1 | Champ électrique | 3 |
| 1.2 | Champ magnétique | 4 |
| 1.3 | Deux configuration de champ à connaître | 4 |
| 2 | Force de Lorentz | 5 |
| 2.1 | Définition et ordre de grandeur | 5 |
| 2.2 | Action de la force de Lorentz sur la vitesse d'une particule | 6 |
| 3 | Mouvement de particules chargées | 7 |
| 3.1 | Accélération d'une particule | 7 |
| 3.2 | Mouvement dans un champ électrique uniforme | 8 |
| 3.3 | Mouvement dans un champ magnétique uniforme | 10 |



Savoirs ♡

- ▷ ♡ **Champ électrique et champ magnétique**
 - ▷ force d'interaction électrostatique
 - ▷ Unité et ordre de grandeurs de \vec{E} et \vec{B}
 - ▷ Expression de \vec{E} entre deux plaques chargées
 - ▷ Expression de \vec{B} dans une bobine
- ▷ ♡ **Force de Lorentz**
 - ▷ définition, calcul d'ordre de grandeur et comparaison avec le poids
 - ▷ partie électrique : énergie potentielle et action sur une trajectoire
 - ▷ partie magnétique : travaille nul et action sur une trajectoire
- ▷ ♡ **Application**
 - ▷ accélération et déviation d'une particule avec un champ électrique \vec{E}
 - ▷ mouvement giratoire d'une particule à l'aide d'un champ magnétique \vec{B} : expression du rayon et de la pulsation cyclotron

Savoir Faire

-  **Mouvement dans un champ électrique uniforme**
 - ▷ Trouver \vec{E} entre deux plaques chargées à l'aide de la tension ou des potentiels électrique
 - ▷ Accélération d'une particule à l'aide d'un champ électrique via une approche énergétique \vec{E} ; approche énergétique
 - ▷ Mouvement d'une particule dans un champ \vec{E} perpendiculaire à la vitesse initiale
-  **Mouvement dans un champ magnétique uniforme transverse à \vec{v}_0**
 - ▷ Justifier que le mouvement est plan
 - ▷ Exprimer la force de Lorentz dans la base
 - ▷ Méthode de résolution des équations couplées du mouvement
 - ▷ Discussion de la trajectoire suivant le signe de la charge

Après avoir étudié les sources des champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} , nous allons nous intéresser au mouvement des particules chargées dans un champ électrique et magnétique. Les applications sont nombreuses et très larges : anciennes TV (tube cathodique), affichage d'une tension sur oscilloscope, accélérateur de particules (LHC : CERN)...

*** **Attention !** Il est nécessaire de bien maîtriser les chapitres de mécanique pour bien aborder ce cours ! Ce sera également l'occasion de les revoir ...

1 Rappel sur les champs électriques et champ magnétiques

Les particules portant une charge électrique interagissent entre elles par des forces dont l'expression peut être grandement simplifiée par l'introduction de deux grandeurs : le champ électrique et le champ magnétique.

1.1 Champ électrique

► Champ électrique stationnaire et uniforme

Définition. Champ électrique

On considère une particule portant une charge q , immobile en un point M de l'espace où règne un champ électrique \vec{E} . La force subie par la particule est :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

L'unité du champ \vec{E} est le V.m^{-1} .

*** **Attention !** C'est une reformulation de la force d'interaction électrostatique coulombienne dans le cas où il existe une charge unique Q :

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}$$

On en déduit l'expression du champ \vec{E} dans le cas d'une charge unique : $\vec{E} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}$. Le champ \vec{E} permet de décrire des situations où une infinité de charge génèrent ces interactions (*cf exemple suivant*).

Notion de champ vectoriel :

- ▷ le champ électrique est une grandeur définie en tout point de l'espace : c'est un champ
- ▷ le champ électrique est un vecteur : c'est un champ vectorielle

Définition. Uniforme et stationnaire

Un champ est dit **uniformes** s'il ne dépend pas de la position où on le mesure.

Un champ est dit **stationnaires** s'il ne dépend pas du temps.

Des champs "bien connus" :

- ▷ L'accélération de la pesanteur \vec{g} est un champ vectoriel uniforme et stationnaire
- ▷ La pression dans un fluide au repos est un champ (*pas vectoriel*) non-uniforme (*varie dans l'espace*) et stationnaire.

On n'étudiera par la suite que les effets de champs électriques stationnaires et uniformes.

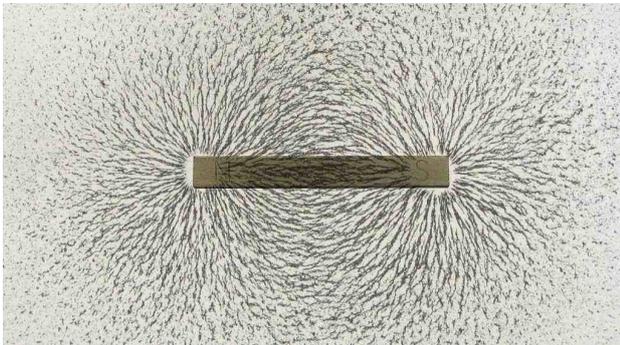
► ♡ Ordres de grandeurs à connaître ♡

| Systeme | Champ électrique crée (V/m) |
|---|-----------------------------|
| Surface de la Terre | $\sim 10^2$ |
| Orage | $\sim 10^4$ |
| Charge ponctuelle de 1 C située à une distance d (en m) | $\sim \frac{10^{-9}}{d^2}$ |

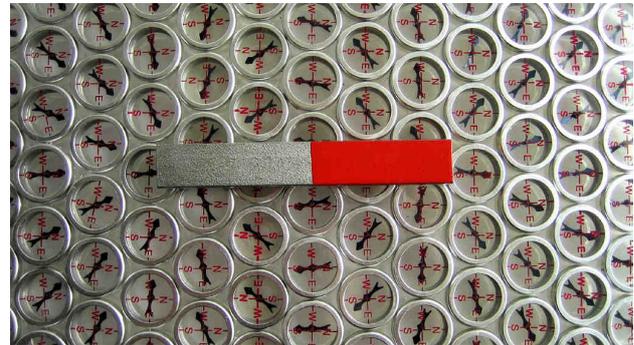
1.2 Champ magnétique

Les effets d'attraction de la "pierre d'aimant" ou magnétite (Fe_3O_4) sur le fer sont connus depuis l'antiquité. Paradoxalement, c'est le point le plus délicat à interpréter à partir des lois actuelles de l'électromagnétisme.

Nous étudierons plus en détails les champ magnétiques en fin d'année.



(a) Alignement de la limaille de fer autour d'un aimant.



(b) Organisation de boussoles autour d'un aimant.

Champ magnétique vs champ électrique

Un tel champ agit également sur les particules chargées mais on notera deux différences majeurs avec l'effet d'un champ électrique :

- ▷ la force est proportionnelle à la vitesse de la particule : pas de vitesse \Rightarrow pas de force
- ▷ la force est toujours perpendiculaire au mouvement (*puissance, travail, ... ?*)

1.3 Deux configuration de champ à connaître

🚨🚨🚨 **Attention !** Instant médecine : à connaître par cœur !

Champ électrique entre deux armatures chargées

Définition. Générateur d'un champ électrique uniforme

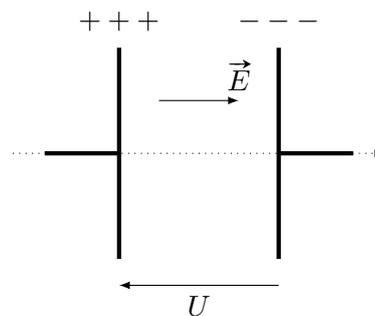
On considère deux plaques chargée, séparée d'une distance d . Il se crée alors :

- ▷ une tension $U > 0$, orientée de la plaque $-$ vers la plaque $+$
- ▷ un champ électrique orienté des charges $+$ \rightarrow $-$

$$\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{e}_z$$

Il se crée alors une tension $U > 0$, orientée de la plaque de gauche vers la plaque de droite d'intensité :

$$E = \frac{U}{d}$$



🚨🚨🚨 **Attention !** On donne parfois le **potentiel électrique** des deux plaques V_+ et V_-

$$U = V_+ - V_- \text{ et } \vec{E} = \frac{V_+ - V_-}{d}$$

Propriété. Sens du champ électrique

Le champ \vec{E} est toujours dirigé de la zone chargée positivement (haut potentiel V) vers la zone chargée négativement (bas potentiel V).

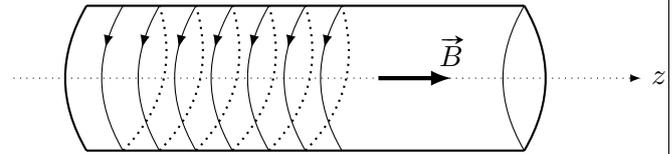
Bobine de N spires

Définition. Générateur d'un champ magnétique uniforme

À l'intérieur d'une bobine de N spires de longueur L et de rayon R règne le champ uniforme

$$\vec{B} \approx \mu \frac{N}{L} i \vec{e}_z$$

avec μ la perméabilité magnétique de l'air et i l'intensité du courant électrique qui la parcourt.



2 Force de Lorentz

2.1 Définition et ordre de grandeur

A l'aide des champs électriques et magnétiques, le mouvement d'une particule chargée q est du à une seule force : la force de Lorentz.

Propriété. Force de Lorentz

Une particule de charge q est soumise à la force de Lorentz donnée par

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} \tag{2.1}$$

avec \vec{E} le champ électrique (en V/m) et \vec{B} le champ magnétique (en Tesla T).

► **Comparaison avec le poids**

Pour se rendre compte de l'intensité de la force de Lorentz, comparons la au poids.

Exemple 1 : Force de Lorentz et poids d'un électron

- ▷ Donner le champ électrique \vec{E} pour qu'on puisse négliger le poids d'un électron devant la force de Lorentz.
- ▷ Donner la vitesse v d'un électron dans un champ magnétique de 10mT (aimant classique) pour qu'on puisse négliger le poids devant la force de Lorentz.

CORRECTION

Le poids d'un électron est égal à : $mg \sim 10^{-30} \times 10 = 10^{-29}$ N.

▷ **Comparaison avec le champ électrique :**

La force de Lorentz exercée sur l'électron est (en norme) $F = eE$. Pour que le poids soit négligeable devant la force de Lorentz, il faut que :

$$qE \gg mg \iff E \gg \frac{10^{-29}}{10^{-19}} \sim 10^{-10} \text{ V/m.}$$

le champ électrique n'a pas à être très important pour qu'on puisse négliger le poids devant la force de Lorentz.

▷ **Comparaison avec le champ magnétique :**

La force de Lorentz exercée sur l'électron est :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow F \approx evB$$

On prend un aimant puissant tel que $B=1$ T. La vitesse de l'électron pour que le poids soit négligeable devant la force de Lorentz.

$$F \gg mg \iff v \gg \frac{mg}{eB} = \frac{10^{-29}}{10^{-19} \times 10^{-2}} \sim 10^{-8} \text{ m/s.}$$

la vitesse n'a pas à être très importante pour qu'on puisse négliger le poids devant la force de Lorentz.

Propriété.

Pour un électron, le poids est négligeable devant la force de Lorentz.

Pour la majorité des particules chargées, c'est également le cas.

2.2 Action de la force de Lorentz sur la vitesse d'une particule**Méthode en DS. Effet d'une force sur la vitesse**

Influence d'une force \vec{F} sur la vitesse v d'une particule se traduit par l'énergie :

- ▷ puissance \mathcal{P} : $> 0 \Rightarrow$ accélère ; $< 0 \Rightarrow$ ralentit ; $= 0$ pas d'influence
- ▷ étude de la vitesse \Rightarrow **TEM** et énergie potentielle

► Partie magnétique

On considère uniquement le partie électrique de la force de Lorentz : $q\vec{E}$.

Sa puissance est nulle :

$$\mathcal{P}_B = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

Rappel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ alors \vec{c} est perpendiculaire à \vec{a} et \vec{b} .

Le **Théorème de la Puissance Cinétique** nous indique alors que, dans un référentiel galiléen, pour une particule soumise uniquement à la partie magnétique de la force de Lorentz, on a :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_B = 0$$

La partie magnétique de la force de Lorentz ne peut pas modifier la vitesse instantanée d'une particule.

Propriété. Action de la partie magnétique de la force de Lorentz

La partie électrique de la force de Lorentz possède un travail nul : il est donc impossible de faire varier la vitesse de particules (accélérer ou ralentir) avec un champ magnétique.

🚫🚫🚫 **Attention !** Si la force magnétique ne peut modifier la vitesse instantanée elle peut modifier le vecteur vitesse : sa norme reste constante mais pas son orientation.

Propriété.

La partie magnétique de la force de Lorentz ne peut que courber la trajectoire d'une particule chargée.

► Partie électrique

On considère uniquement le partie électrique de la force de Lorentz : $q\vec{E}$.

Sa puissance est a priori non-nulle :

$$\mathcal{P}_E = q\vec{E} \cdot \vec{v} \neq 0$$

Propriété. Action de la partie électrique de la force de Lorentz

La partie électrique de la force de Lorentz possède un travail non-nul *a priori* : il est donc possible de faire varier la vitesse de particules (accélérer ou ralentir) avec un champ électrique.

Énergie potentielle

On donne rappel le lien entre \vec{F} et énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p \Rightarrow q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

avec (Oz) un axe orienté suivant \vec{E} , $\vec{E} = E\vec{e}_z$, on trouve : $\frac{dE_p}{dz} = -qE$ donc $E_p = -qEz + C$.

On prendra souvent $C = 0$

Propriété. Énergie potentielle électrostatique

Soit (Oz) un axe aligné avec le champ électrique \vec{E} . La partie électrique de la force de Lorentz découle d'une énergie potentielle $E_p = \pm qEz$, (\pm suivant l'orientation du champ).

3 Mouvement de particules chargées

La suite du cours consiste en l'étude de trois dispositifs : l'accélérateur de particule, le tube cathodique et le spectromètre de masse. Pour chacun il faudra savoir :

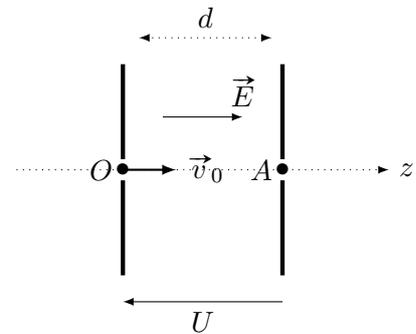
- ▷ décrire rapidement le principe de fonctionnement de la machine
- ▷ savoir refaire les questions

3.1 Accélération d'une particule

Exemple 2 :

On considère deux plaques, séparées d'une distance d et on impose une tension $U = 2V$ entre les deux plaques.

Une particule de charge q pénètre dans la zone entre les deux plaques par la gauche avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$.



1. Justifier qu'un champ magnétique est inutile pour chercher à accélérer une particule.
2. Donner le champ électrique \vec{E} entre les deux plaques et montrer que la force électrostatique découle d'une énergie potentielle $E_p = -q \frac{U}{d} z$.
3. Donner la vitesse v_A de la particule en sortie de la zone entre les deux plaques en fonction de v_0 , q , U et m .
4. Comment ralentir ou accélérer une particule avec ce dispositif?
5. Un électron $q = -e$ pénètre dans la zone avec une vitesse $v_0 = 10\text{m/s}$. Quel tension U appliquer pour qu'il n'atteigne jamais A ?

CORRECTION

Méthode en DS.

On cherche une vitesse/une position/... (i.e. pas de temps) \Rightarrow on utilise une approche énergétique!!

1. La puissance de la partie magnétique de la force de Lorentz est nulle $\mathcal{P} = \vec{F}_B \cdot \vec{v}$ car $\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à \vec{v} . Elle n'a donc pas d'influence sur la vitesse v .

🔴🔴🔴 **Attention !** elle en a sur \vec{v} car elle peut modifier la **direction** de \vec{v} mais pas la norme!!

2. Dans cette configuration $\vec{E} = E \vec{e}_z = \frac{U}{d} \vec{e}_z$. L'énergie potentielle s'écrit alors :

$$-q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p \Rightarrow -q \frac{U}{d} = \frac{dE_p}{dz} \text{ soit } E_p(z) = -q \frac{U}{d} z + C$$

On choisit une énergie potentielle nulle en O : $E_p(z) = -q \frac{U}{d} z$.

3. **Théorème de l'énergie mécanique entre O et A**

▷ en O : $E_c = mv_0^2/2$ et $E_p = 0$

▷ en A : $E_c = mv_A^2/2$ et $E_p = -qU$

Pas de force non-conservative donc $E_m(A) - E_m(O) = 0$ soit :

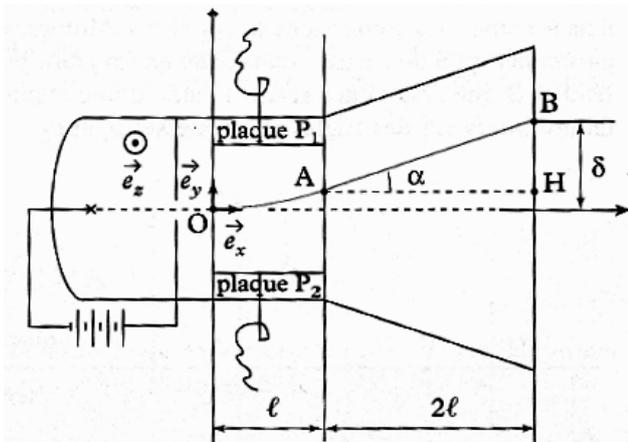
$$\frac{m}{2} v_0^2 - 0 = \frac{m}{2} v_A^2 - q \frac{U}{d} d \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU}{m}}$$

4. On remarque qu'en prenant une charge \times tension qU positive on accélère la particule, et avec $qU < 0$ on peut ralentir la particule.
5. Avec un électron on a : $v_A = \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU}{m}}$. Cette vitesse n'est possible que si : $v_0^2 > 2eU/m$.
 Dans le cas contraire, l'électron n'atteint jamais A. Pour l'en empêcher il faut appliquer une tension $U > mv_0^2/2e$. Ainsi l'électron fait demi-tour avant.

3.2 Mouvement dans un champ électrique uniforme

Dans le cas où la vitesse initiale \vec{v}_0 n'est pas colinéaire au champ électrostatique, on obtient un mouvement parabolique. Le champ \vec{E} va dévier la particule. Ce principe de déviation est au cœur du principe d'affichage de l'oscilloscope.

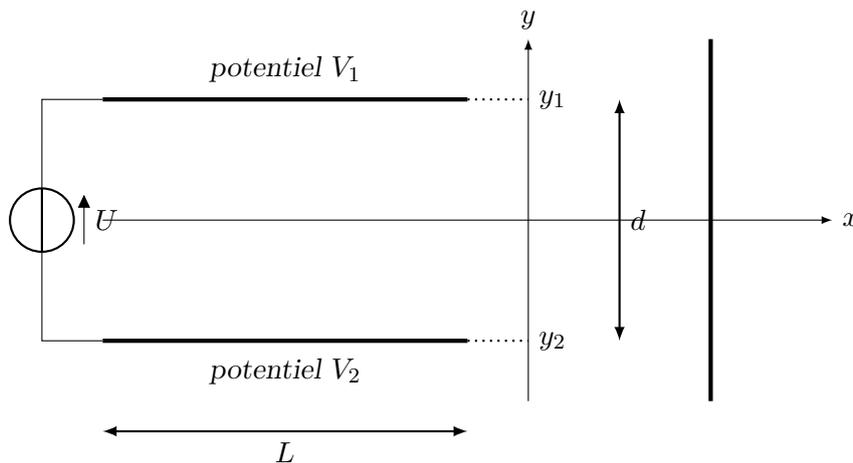
Voici schématisée la coupe verticale d'un oscilloscope. Les électrons sortent d'un canon au point O.



L'électron passe alors entre deux plaques conductrices séparées d'une distance d et soumises à une tension $U = V_1 - V_2 > 0$. Le champ électrique qui y règne dévie l'électron de sa trajectoire initiale. Ce dernier entre en contact avec l'écran affichant un point lumineux. Plus la tension U est importante, plus le champ \vec{E} va dévier la trajectoire de l'électron : le point lumineux s'affichera plus haut sur l'écran.

Exemple 3 :

On considère deux plaques conductrices séparées d'une distance d et d'une longueur L . La plaque du haut est au potentiel V_1 , la plaque du bas au potentiel V_2 . Le générateur fournit donc la tension $U = V_1 - V_2 > 0$.



1. Donner l'expression du champ électrique entre les deux plaques en fonction de V_1 , V_2 et d .
2. Donner l'expression de la trajectoire $y[x]$ de l'électron entre les deux plaques.
3. Donner alors la déviation δ_A en sortie de la zone entre les deux plaques.
4. Donner l'angle α en sortie de la zone entre les deux plaques. En déduire la déviation δ sur l'écran. On rappelle que l'angle α avec l'horizontale est donnée par $\tan \alpha = dz/dx$.

CORRECTION

1. Expression de \vec{E}

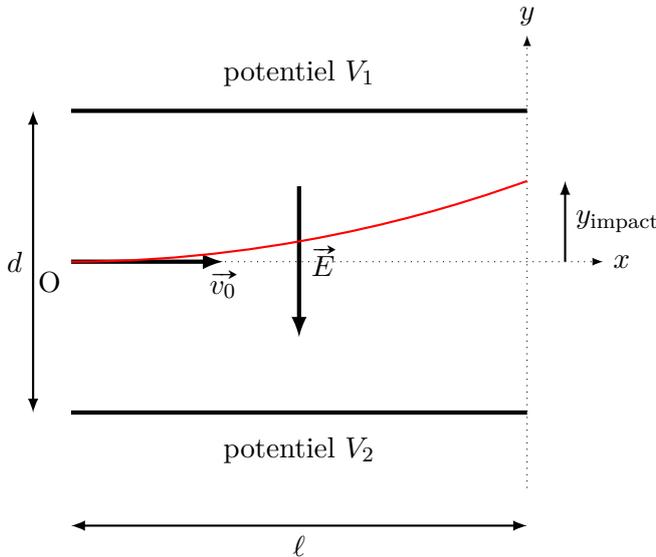
Le champ électrique va des haut potentiel V_1 vers les bas potentiel V_2 : il est donc dirigé du haut vers le bas .Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E} = -\frac{U}{d} \vec{e}_y = -\frac{V_1 - V_2}{d} \vec{e}_y$$

2. Trajectoire entre les deux plaques

Méthode en DS.

On veut une trajectoire : c'est le PFD!!!



On étudie la trajectoire d'un électron $q = -e < 0$. La force de Lorentz est donc

$$q\vec{E} = -e\left(-\frac{U}{d}\right)\vec{e}_y = \frac{eU}{d}\vec{e}_y$$

La force pousse la particule vers la plaque V_1 .

La force de Lorentz électrique pousse :

- ▷ les particules chargées négativement vers les haut potentiels
- ▷ les particules chargées positivement vers les bas potentiels

On écrit les vecteurs position-vitesse-accélération :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y \Rightarrow \vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$

Le PFD s'écrit alors :

$$m\vec{a} = -e\vec{E} \text{ soit } \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{eU}{d} \end{cases}$$

En utilisant les condition initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{eU}{2md} t^2 \end{cases}$$

Ce qui conduit à une trajectoire parabolique d'équation :

$$y = \frac{eU}{2mdv_0^2} x^2$$

3. Déviation en sortie de zone

Au niveau de l'écran $x = l$ soit un déplacement verticale :

$$\delta_A = y(x = l) = \frac{eUl^2}{2mdv_0^2}$$

Plus la tension est grande, plus l'électron est dévié.

4. Angle de sortie et déviation finale

Avec un peu de trigonométrie, on trouve que l'angle α que forme la trajectoire avec l'horizontale est donné par :

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Dans le cas de la trajectoire on a $\tan \alpha[x] = \frac{eU}{mdv_0^2}x$ soit un angle finale $\tan \alpha[x = l] = \frac{eUl}{mdv_0^2}$.

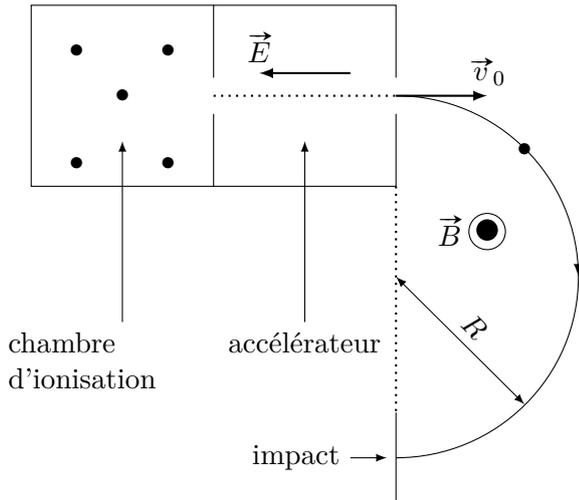
La déviation finale est alors : $\delta = \delta_A + 2l \tan \alpha[x = l]$ soit

$$\delta = \frac{eUl^2}{2mdv_0^2} + \frac{2eUl^2}{mdv_0^2} = +\frac{3eUl^2}{mdv_0^2}$$

3.3 Mouvement dans un champ magnétique uniforme

► Le spectromètre de masse

Un spectromètre de masse sert à mesurer la masse de particule trop légère pour qu'une balance classique puisse fonctionner. Nous allons voir à travers son principe de fonctionnement le mouvement de particule dans un champ magnétique uniforme.



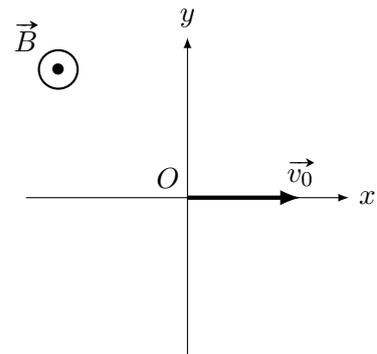
On considère un gaz de particule chargées contenues dans la chambre d'ionisation dont le rôle est de générer ces particules. Une ouverture permet de laisser sortir un faisceau de particule de charge négative que l'on accélère avec un champ électrique pour les amener à la vitesse \vec{v}_0 (cf premier exemple).

Ensuite un champ magnétique courbe la trajectoire. En mesurant le rayon R de la trajectoire, on peut déterminer la masse de la particule. Nous allons étudié plus en détail cette partie du mouvement.

On ne s'intéressera ici qu'à la partie déviation par le champ magnétique, la phase d'accélération a déjà été tritée précédemment.

Exemple 4 :

On se place dans le cas où la vitesse initiale \vec{v}_0 est perpendiculaire au champ \vec{B} qui est suivant \vec{e}_z . On définit l'axe des x suivant la direction initiale de la vitesse : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.



1. Justifier que la vitesse de la particule est constante tout au long de la trajectoire.
2. En supposant que la trajectoire est un cercle, exprimer le rayon R en fonction de v_0 , vitesse initiale de la particule, m , q et B .
3. En déduire la vitesse angulaire ω_c de la particule.

CORRECTION

1. Conservation de la vitesse

La force de Lorentz magnétique ne travaille pas donc $v(t) = v_0$.

🔥🔥🔥 **Attention !** \vec{v} n'est pas constante!!!!

2. Rayon de la trajectoire circulaire

Pour un mouvement circulaire de rayon R , les vecteurs cinématiques s'expriment par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\vec{e}_R \Rightarrow \vec{v}(t) = R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On l'écrit sous la forme "classique" : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$.

Comme la vitesse est constante : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$.

Le PFD appliqué à la particule de charge q donne alors

$$-m\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow qR\dot{\theta}B\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = qR\dot{\theta}B\vec{e}_r.$$

En norme l'équation donne :

$$m\frac{v_0^2}{R} = |q|B_0 \times R|\dot{\theta}| \Rightarrow R\frac{v_0^2}{R^2} = |q|B_0v_0$$

Il vient immédiatement $R = \frac{mv_0}{|q|B}$!

3. Vitesse angulaire de rotation

La vitesse angulaire de rotation s'exprime à partir de la vitesse instantanée :

$$v(t) = |R\dot{\theta}| \Rightarrow \dot{\theta} = \pm \frac{v_0}{R} = \pm \frac{|q|B}{m}$$

🔴🔴🔴 **Attention !** Une vitesse de rotation est algébrique !!

Pour connaître le signe de la vitesse de rotation, étudions la particule à l'instant initial. On note ω_c la vitesse angulaire.

- ▷ si $\omega_c > 0$ alors la particule part initialement "vers le haut" pour tourner dans le sens direct
- ▷ si $\omega_c < 0$ alors la particule part initialement "vers le bas" pour tourner dans le sens indirect

La direction initiale du mouvement de la particule dépend du sens de la force magnétique de Lorentz à $t = 0$.

- ▷ si $q > 0$, la force est orientée vers le bas : la particule tournera dans le sens indirect et donc $\omega_c < 0$
soit $\omega_c = -\frac{|q|B}{m}$.
- ▷ si $q < 0$, la force est orientée vers le haut : la particule tournera dans le sens direct et donc $\omega_c > 0$
soit $\omega_c = +\frac{|q|B}{m}$.

Propriété. Mouvement d'une particule chargé dans un champ \vec{B} transverse

Le mouvement d'une particule chargée avec un vecteur vitesse initiale orthogonal au champ magnétique est **mouvement circulaire uniforme**.

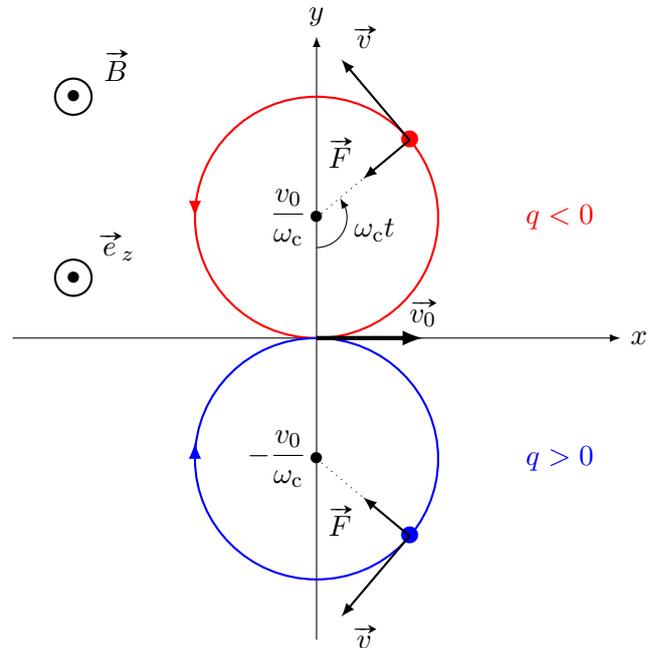
Son rayon est donné par

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

Sa vitesse angulaire (en valeur absolue) est :

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

et son sens de parcours dépend de la charge q de la particule.



► **Démontrer que la trajectoire est circulaire**

Toujours dans le cas de l'exemple précédent, on va chercher à démontrer que la trajectoire est bien circulaire. Est alors utile pour cela le repère de Frénet!!

Exemple 5 :

1. Écrire le vecteur vitesse, l'accélération et la force de Lorentz dans le repère de Frénet
2. A l'aide du PFD, montrer que le rayon de courbure de la trajectoire est constant.

CORRECTION

1. La base de Frénet est défini dans le plan de la trajectoire par deux vecteurs :

- ▷ \vec{T} : tangent à la trajectoire (\sim unitaire orienté suivant \vec{v})
- ▷ \vec{N} : perpendiculaire à la trajectoire, orienté vers l'intérieur de la courbure

Le troisième vecteur de la base est \vec{e}_z .

On peut alors écrire :

- ▷ vecteur vitesse $\vec{v} = v\vec{T}$
- ▷ accélération : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$

⚠⚠⚠ **Attention !** R , le rayon de courbure de la trajectoire peut varier : grand $R \iff$ virage large ; petit $R \iff$ virage serré

La force s'écrit alors : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv(t)\vec{T} \wedge B_0\vec{e}_z = \pm qv(t)B_0\vec{N}$.

2. Le **PFD** s'écrit alors :

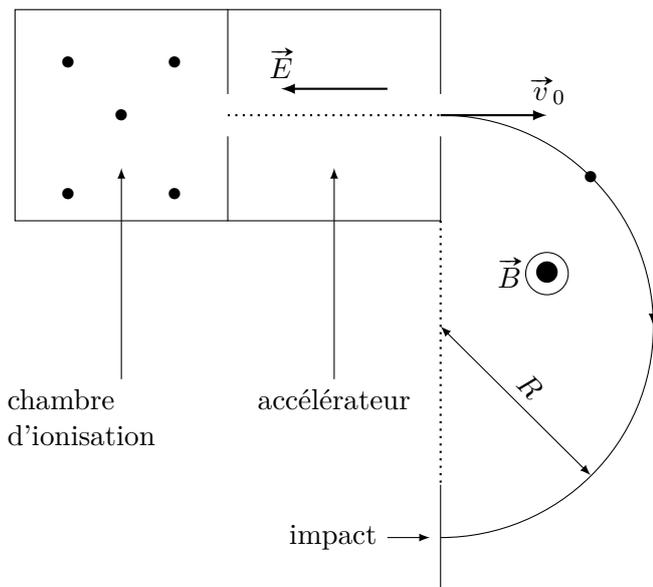
$$m \left(\frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \right) = \pm qv(t)B_0\vec{N}$$

on remarque alors que :

- ▷ $\frac{dv}{dt} = 0 \implies$ le mouvement est uniforme $v(t) = v_0$
- ▷ $m \frac{v_0^2}{R} = \pm qv_0B_0 \implies$ le rayon de courbure est constant, la trajectoire est circulaire.

► Retour sur le spectromètre de masse

Avec ce qu'on a appris, on peut facilement expliquer le principe d'un spectromètre de masse.



En sortie de chambre de ionisation, les particules vont réaliser un trajectoire circulaire

- ▷ vers le "haut" pour les particules chargées négativement
- ▷ vers le "bas" pour les particules chargées positivement

La distance d'impact après un demi-cercle est égale au diamètre de la trajectoire soit

$$d_{\text{impact}} = \frac{2mv_0}{|q|B}$$

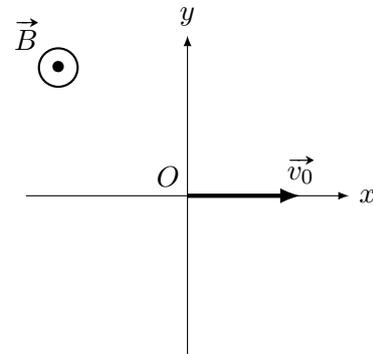
En connaissant la charge de la particule, on peut en déduire sa masse très précisément.

► **Etude dans un système de coordonnées cartésien (pour aller plus loin)**

On s'intéresse ici à l'étude du mouvement d'une particule en coordonnées cartésiennes. Certains exercices plus difficile nécessite ce savoir faire.

Application 1 :

On se place dans le cas où la vitesse initiale \vec{v}_0 est perpendiculaire au champ \vec{B} qui est suivant \vec{e}_z . On définit l'axe des x suivant la direction initiale de la vitesse : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.



On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On ne connaît pas *a priori* le mouvement de la particule : on utilise alors un système de coordonnées cartésien (x, y, z) de centre O , position de la particule à $t = 0$.

1. Montrer que les équations du mouvement de la particule sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = qB_0\dot{y}(t) \\ m\ddot{y}(t) = -qB_0\dot{x}(t) \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

2. En intégrant la seconde équation par rapport au temps, et en injectant le résultat dans la première montrer que la coordonnées x est solution de :

$$\ddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x = 0$$

3. Avec une méthode similaire, montrer que y est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = -\varepsilon\omega_c v_0$$

4. En intégrant les équations précédemment trouvées, montrer que le mouvement de la particule est un cercle de rayon R parcouru à la vitesse angulaire ω_c .

CORRECTION**Vecteurs cinématiques :**

a priori la particule bouge selon les 3 directions

- ▷ position : $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$
- ▷ vitesse : $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z$
- ▷ accélération : $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z$

Bilan des forces :

on néglige le poids, seule s'exerce la partie magnétique de la force de Lorentz.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z) \wedge B_0\vec{e}_z \\ \vec{F} &= qB_0(\dot{y}(t)\vec{e}_x - \dot{x}(t)\vec{e}_y)\end{aligned}$$

Principe fondamental de la dynamique

En appliquant le PFD projeté sur les deux axes on trouve :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = qB_0\dot{y}(t) \\ m\ddot{y}(t) = -qB_0\dot{x}(t) \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On remarque que le mouvement selon l'axe du champ magnétique n'est pas modifié. Comme la particule ne possède pas de vitesse selon l'axe (Oz), son altitude z est constante : le mouvement de la particule est plan.

(b) Les équations du mouvement dans le plan (x, y) sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \end{cases}$$

🚫🚫🚫 **Attention !** Ces équations sont des équations différentielles **MAIS** on ne peut les résoudre tout de suite car elles ne font pas intervenir une seule fonction inconnue : on obtient des termes croisés entre les coordonnées x et y .

⇒ Objectif : obtenir des équations sur x et y seulement !

Résolution des systèmes d'équations différentielles

Partie classique du mouvement de particule, les méthodes développées doivent être comprises pour être transcrites sur d'autres exercices !

En intégrant la seconde équation par rapport au temps on a :

$$m[\dot{y}(t) - \dot{y}(t=0)] = -qB_0[x(t) - x(t=0)]$$

Comme

- ▷ $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$ alors : $\dot{y}(t=0) = 0$
- ▷ $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$ alors $x(t=0) = 0$

On a donc :

$$\dot{y} = -\frac{qB_0}{m}x$$

On remplace dans la première équation et on obtient :

$$m\ddot{x} = qB_0\frac{qB_0}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$: c'est **la pulsation cyclotron**.

*** **Attention !** la charge q peut être positive ou négative!!

Pour trouver l'équation différentiel sur $y(t)$, on utilise la même méthode : on intègre la première équation.

$$m[\dot{x}(t) - \dot{x}(t=0)] = qB_0 [y(t) - y(t=0)]$$

Comme

- ▷ $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e}_x$ alors : $\dot{x}(t=0) = v_0$
- ▷ $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$ alors $y(t=0) = 0$

On a donc :

$$\dot{x}(t) = \frac{qB_0}{m}y(t) + v_0$$

En intégrant dans l'équation sur \dot{y} on a :

$$m\dot{y} = -qB_0 \left(-\frac{qB_0}{m}y + v_0 \right) \Rightarrow \dot{y} + \left(\frac{qB_0}{m} \right)^2 y = \frac{-qB_0}{m}v_0$$

On reconnaît de nouveau un équation d'un oscillateur harmonique (le membre de droite est non-nul cependant).

*** **Attention !** Le membre de droite est ici : $-\frac{qB_0}{m}v_0 = -\varepsilon\omega_c v_0$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de q .

Les équations du mouvement sont donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\varepsilon\omega_c v_0 \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales :

- ▷ $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$
- ▷ $y(t=0) = 0$ et $\dot{y}(t=0) = 0$

On a :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ y(t) = \frac{\varepsilon v_0}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1) \end{cases}$$

Analyse de la trajectoire

Prenons le cas d'un électron : $q = -e$ donc $\varepsilon = -1$.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + 0 \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \cos \omega_c t + \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

♡ *Instant math* ♡

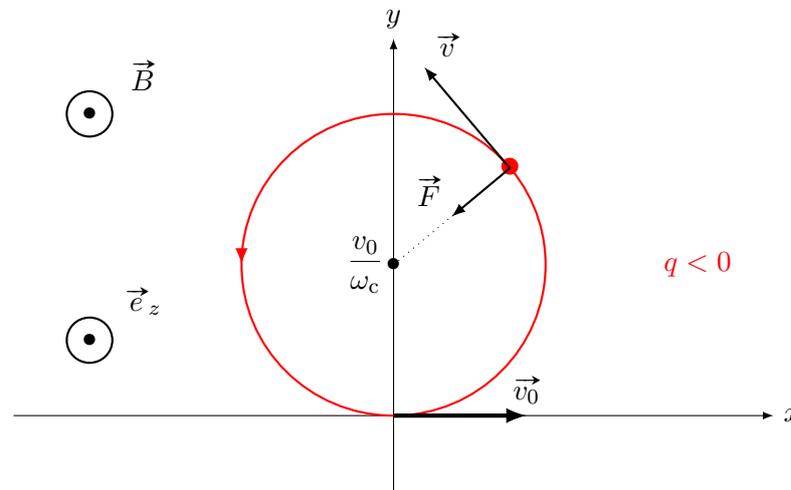
$$\begin{cases} x(t) = R \sin \omega_c t + x_0 \\ y(t) = R \cos \omega_c t + y_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Cercle de rayon } R \text{ et de centre } (x_0, y_0)$$

L'électron décrit donc un cercle de centre $\left(0, \frac{v_0}{\omega_c}\right)$ et de rayon

$$R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|q|B}$$

- ▷ L'électron parcourt sa trajectoire dans le sens anti-horaire.
- ▷ Sa vitesse de rotation est constante et est donnée par la pulsation cyclotron :

$$\dot{\theta} = \omega_c = \frac{|q|B}{m}$$



On remarque alors que la vitesse de la particule $v(t)$ est égale à :

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \omega_c t + v_0^2 \cos^2 \omega_c t} = v_0$$

Le mouvement se fait à vitesse constante. On retrouve le résultat précédent. La partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas : l'énergie cinétique, et donc la vitesse instantanée de la particule, est constante au cours du mouvement. Le mouvement est uniforme.

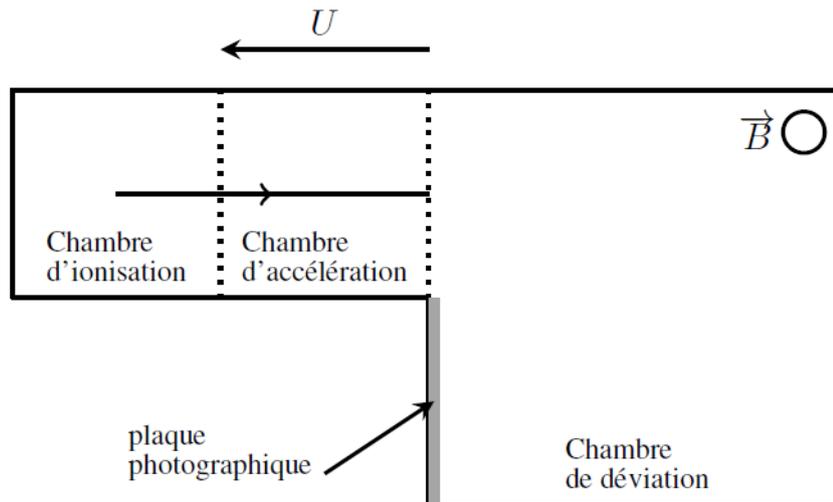
Astuce pratique : La force de Lorentz, tout comme celle d'une fronde, est toujours dirigée vers le centre de la trajectoire.



Spectromètre de masse

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Données : $m_{e^-} = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C



Un ion libre de charge $-2e$ et de masse $m = 6,6 \cdot 10^{-26}$ kg, de vitesse initiale négligeable est initialement dans la chambre d'ionisation. Dans la chambre d'accélération, l'ion est accéléré à l'aide d'une différence de potentiel $U = -10$ kV.

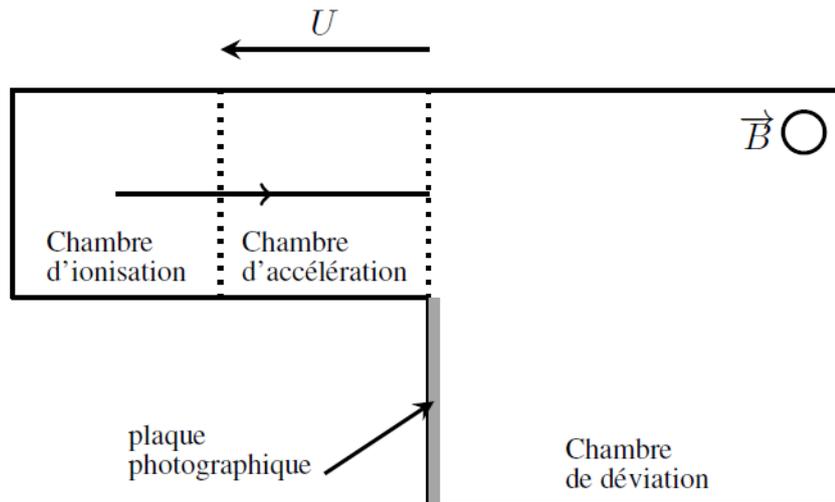
1. Donner la vitesse v_0 d'ion en sortie de la chambre d'accélération ?
Faire l'application numérique.
2. Il est alors injecté dans un espace dans lequel règne un champ magnétique $B = 5 \cdot 10^{-1}$ T.
 - (a) Démontre que, dans la zone de déviation, la vitesse de l'ion est constante.
 - (b) En supposant la trajectoire circulaire de centre O , donner le rayon R de la trajectoire ainsi que la vitesse angulaire Ω en fonction de v_0 , e , B et m . Faire les application numériques.
3. Représenter la trajectoire de l'électron dans la chambre de déviation suivant le sens du champ magnétique. En déduire dans quel sens doit pointer \vec{B} .
4. Donner la distance d entre point d'insertion dans la chambre de déviation et la zone où l'ion tape la plaque photographique. Faire l'application numérique.
5. Pour cette partie seulement, on suppose qu'il existe une force de frottement fluide $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$.
 - (a) Justifier que la vitesse de l'ion n'est plus constante et donner son sens de variation.
 - (b) Donner les deux équations du mouvement.
 - (c) Montrer que $v(t) = v_0 \exp\left[-\frac{\alpha}{m}t\right]$.
 - (d) En déduire une expression de $R[t]$.



Spectromètre de masse

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Données : $m_{e^-} = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C



Un ion libre de charge $-2e$ et de masse $m = 6,6 \cdot 10^{-26}$ kg, de vitesse initiale négligeable est initialement dans la chambre d'ionisation. Dans la chambre d'accélération, l'ion est accéléré à l'aide d'une différence de potentiel U 10 kV.

1. Cf cours $v_0 = \sqrt{-4eU/m}$.
- 2.(a) Cf cours, puissance nulle
(b) Cf cours, coordonnées cylindrique
3. Si \vec{B} pointe vers nous, la particule va tourner dans le sens trigonométrique direct donc elle va partir "vers le haut" en sortant de la chambre d'accélération.
Il faut donc que \vec{B} pointe dans l'autre sens.
4. Schéma $\Rightarrow d = 2R$.
5. Pour cette partie seulement, on suppose qu'il existe une force de frottement fluide $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$.
(a) On calcule la puissance de la force de frottement : $\mathcal{P}_\alpha = \vec{F}_\alpha \cdot \vec{v} = -\alpha v^2(t) < 0$, l'énergie cinétique diminue donc la vitesse diminue.
(b) On applique le PFD avec le repère de Frénet :

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v(t) ; \frac{v^2}{R} = 2eB_0 v$$

(c) Avec la première équation et les CI ($v(0) = v_0$) on trouve $v(t) = v_0 \exp\left[-\frac{\alpha}{m}t\right]$.

(d) En remplaçant dans la deuxième $R(t) = \frac{v(t)}{2eB_0} = \frac{v_0}{2eB_0} \exp\left[-\frac{\alpha}{m}t\right]$.

Données : $m_{\text{électron}} = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $m_{\text{proton}} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Exercice 1 - Modèle de conduction électrique dans un matériau : modèle de Drude :

Pour modéliser la conduction électrique dans un matériau, on considère un conducteur cylindrique de section S et de longueur L , dont les deux extrémités sont soumises à une différence de potentiel U . On considère un champ électrique uniforme, de norme E et dirigé dans le sens de l'axe (Ox) orthogonal à la section S .

Le conducteur possède une densité volumique de ρ d'électrons libres, de masse m et de charge $-e$, assurant la conduction électrique. On modélise les chocs entre les atomes du réseau atomique et les électrons libres par une force de frottement fluide linéaire :

$$\vec{f} = -\alpha_f \vec{v} .$$

1. Montrer que les électrons atteignent une vitesse limite \vec{v}_∞ .
Exprimer la loi d'évolution temporelle de la vitesse d'un électron et en donner la durée τ caractéristique.
2. Exprimer le nombre dn d'électrons traversant la section S du conducteur pendant une durée dt en fonction des paramètres pertinents. On supposera pour cela que tous les électrons ont atteint leur vitesse limite. En déduire l'expression de la valeur absolue de l'intensité électrique dans ce conducteur.
3. Montrer qu'une relation de proportionnalité unit la tension U aux bornes du conducteur à l'intensité qui la traverse.
Comment, en électronique, s'appelle cette loi ?
4. Définir la résistance R du conducteur et commenter l'influence des paramètres géométrique L et S .

Pour le cuivre, on mesure une densité volumique d'électrons libres $\rho_{\text{cuivre}} = 8,49 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. De plus, on définit sa résistivité comme $r = RS/L$ avec R la résistance du fil, qui vaut $r_{\text{cuivre}} = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

5. En déduire la constante de temps τ .
Jusqu'à quelle fréquence est-il raisonnable de considérer que les électrons libres sont en permanence à la vitesse limite ? Quelle approximation de l'électronique retrouve-t-on alors ?

Exercice 2 - Mouvement dans un champ électromagnétique :

Soit un électron soumis à deux champs uniformes et orthogonaux l'un avec l'autre : $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$ et $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

En $t=0$, on laisse l'électron évoluer depuis l'origine O sans vitesse initiale.

1. Montrer que le mouvement est plan.
2. Identifier la pulsation synchrotron ω_B .
3. Montrer que v_x et v_c sont tous les deux solutions d'une équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_c .
4. Donner la lois horaire de v_y .
5. A l'aide du PFD, en déduire celle de v_x . Identifier la vitesse moyenne de l'électron, appelée vitesse de dérive.
6. Exprimer les coordonnées $x(t)$, $y(t)$.

Exercice 3 - Particule chargée dans une chambre à bulle :

Pour étudier les particules émises par une réaction nucléaire, on observe leur trajectoire dans une chambre à bulle. Une chambre à bulle est une "pièce" dans laquelle règne un champ magnétostatique constant et qui contient un liquide qui se vaporise au passage des particules. Les particules laissent alors une trainée de bulle derrière elle, ce qui permet de visualiser leurs trajectoires.

Le liquide exerce sur les particules une force de frottement fluide linéaire proportionnelle à leurs vitesses et de coefficient α . Le mouvement d'une particule de charge q et de masse m est étudié dans un repère cartésien dont l'origine O qui coïncide avec la position initiale de la particule.

Le champ magnétostatique et vecteur vitesse initiale sont dirigés comme suit :

$$\vec{v}_0 = v_{0,x} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z .$$

Description qualitative du mouvement

1. Établir les équations du mouvement de la charge.
2. Par le théorème de la puissance cinétique, montrer que la norme de la vitesse $v(t)$ est égale à :

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{m}{\alpha} t}$$

3. Rappeler la trajectoire d'une particule chargée dans un champ \vec{B} uniforme sans frottement.

On admettra par la suite que l'expression du rayon de la trajectoire reste vraie quand la norme de la vitesse varie si on remplace dans l'expression la vitesse initiale par la vitesse instantanée.

4. En déduire l'évolution du rayon de la trajectoire au cours du temps.
5. Tracer qualitativement la trajectoire d'une particule :
 - ▷ de charge positive
 - ▷ de charge négative
 - ▷ de charge nulle
6. Expliquer alors comment une chambre à bulle permet d'identifier les particules qui la traversent.

Description quantitative du mouvement (*)

🔴🔴🔴 **Attention !** Méthode importante : incontournable pour ceux qui sont le plus à l'aise.

1. On définit la variable $\underline{u} = x + jy$. Montrer que :

$$\ddot{\underline{u}} + \left(\frac{1}{\tau} + j\omega \right) \dot{\underline{u}} = 0$$

avec τ et ω deux constantes qu'on définira à l'aide des constantes du problème.

♡ *Instant math* ♡

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = 0 \Rightarrow f(t) = Ae^{-\alpha t}$$

avec α un nombre complexe.

2. Exprimer $\dot{\underline{u}}(t)$.
3. En déduire alors $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.
4. Exprimer $\underline{u}(t)$ et sa valeur \underline{u}_∞ pour $t \rightarrow \infty$.
5. En déduire la position finale x_∞ et y_∞ de la particule.

Données : $m_{\text{électron}} = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $m_{\text{proton}} = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Exercice 1 - Modèle de conduction électrique dans un matériau : modèle de Drude :

1.

Méthode en DS. Vitesse limite/stationnaire

La vitesse limite/stationnaire/aux temps longs/... est la solution particulière du **PFD**.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le **PFD** à l'électron en coordonnées cartésiennes. Soit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -eE\vec{e}_x - \alpha_f \vec{v}$$

La solution particulière, cherchée sous la forme d'une constante, est : $\vec{v}_\infty = -\frac{eE}{\alpha_f} \vec{e}_x$.

C'est une équation différentielle $\dot{X} + 1/\tau X = \dots \Rightarrow$ on résout avec solution particulière et homogène + **CI!!**

On trouve, avec $\vec{v}(0) = \vec{0}$: $\vec{v}(t) = \vec{v}_\infty (1 - \exp(-t/\tau))$ avec $\tau = m/\alpha_f$.

2. Les électrons traversant la surface pendant dt sont l'ensemble des électrons présents dans le volume $Sv_\infty dt$ présents devant la surface. Et donc $dn = \rho S v_\infty dt$. Sachant que $|I| = \frac{dq}{dt}$, il vient $|I| = e\rho S v_\infty$.
3. Lien tension potentiel : $U = EL$. On a alors :

$$|I| = e\rho S v_\infty = e\rho S \frac{eE}{\alpha_f} = \frac{e^2 \rho S}{L\alpha_f} U.$$

Soit $R = \frac{L\alpha_f}{e^2 \rho S}$. Plus le conducteur est long, plus la résistance augmente. De même, plus le conducteur est fin, plus sa résistance augmente.

4. On a $r_{\text{cuivre}} = \frac{\alpha_f}{e^2 \rho} = \frac{m}{e^2 \rho \tau}$. D'où $\tau = \frac{m}{e^2 \rho r_{\text{cuivre}}} = 2.48 \times 10^{-14} \text{ s}$. Si les variations du champ, et donc de la tension, sont plus rapides que ce temps, le régime permanent n'a pas le temps de s'établir. Il faut donc travailler en dessous de 10^{14} Hz , c'est l'ARQS!

Exercice 2 - Mouvement dans un champ électromagnétique :

Soit un électron soumis à deux champs uniformes et orthogonaux l'un avec l'autre : $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y$ et $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

En $t=0$, on laisse l'électron évoluer depuis l'origine O sans vitesse initiale.

1. Réponse avec les mains, une démonstration avec les lois de la mécanique est faite dans la Q3
Le champ électrique est suivant \vec{e}_y , la force électrostatique de Lorenz $q\vec{E}$ est suivant $\vec{e}_y \Rightarrow$ elle ne crée pas de mouvement selon \vec{e}_z .
On a vu que un champ magnétique selon \vec{e}_z génère un mouvement dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) (plutôt il ne modifie pas la vitesse selon \vec{e}_z) \Rightarrow pas de mouvement selon \vec{e}_z .
2. Cours!! $\omega_c = qB/m = -eB/m$.
3. On applique le PFD à la charge dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = qE\vec{e}_y + qB(-v_x \vec{e}_y + v_y \vec{e}_x)$$

On pose $\omega_c = \frac{qB}{m}$ ce qui donne :

$$(1) : \frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y ; (2) : \frac{dv_y}{dt} = \frac{qE}{m} - \omega_c v_x ; (3) : \frac{dv_z}{dt} = 0$$

(3) nous donne facilement que $v_z = cte = v_z(0) = 0$ et donc $z = cte = z(t=0) = 0$. Le mouvement a donc lieu dans le plan (Oxy).

On veut remplacer dans (1) v_y avec (2) **mais** dans (2) on a juste $\frac{dv_y}{dt}$. Donc on dérive (1) et on injecte $\frac{dv_y}{dt}$ depuis (2) ce qui donne :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \omega_c \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qE}{m} - \omega_c^2 v_x \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = \frac{qE}{m}$$

On retrouve bien un Oscillateur Harmonique. On fait pareil mais dans l'autre sens pour trouver :

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 v_y = 0$$

4. On reprend sa fiche de résolution des **OH!!!**

CI On a $v_y(0) = 0$. Il faut trouver $\frac{dv_y}{dt}$ en 0 avec (2) en $t = 0$

$$\frac{dv_y}{dt}(0) = \frac{qE}{m} - \omega_c v_x(0) = \frac{qE}{m}$$

La solution est :

$$v_y = \frac{qE}{m\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

5. On résout en utilisant soit l'équation différentielle trouvée avant soit en injectant v_y dans (1) :

$$v_x = \frac{qE}{m\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))$$

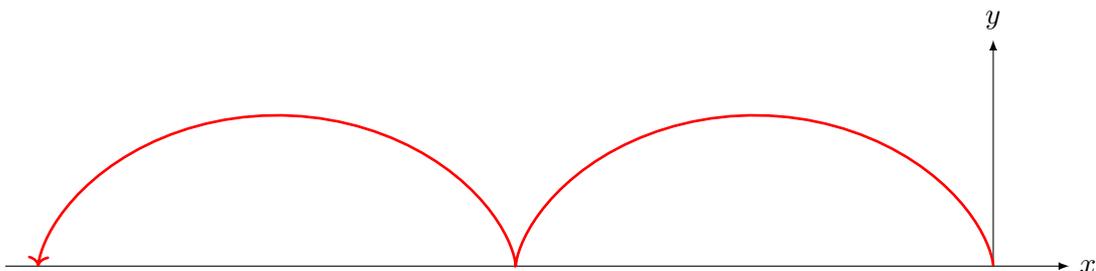
La valeur moyenne de sin et cos est nulle $\Rightarrow \langle v_y \rangle = 0$ et $\langle v_x \rangle = \frac{qE}{m\omega_c}$. En moyenne l'électron se déplace suivant $-\vec{e}_x$ (car $q = -e > 0$).

6. On intègre v_x et v_y ce qui donne :

$$y = \frac{qE}{m\omega_c^2} (1 - \cos(\omega_c t))$$

$$x = \frac{qE}{m\omega_c^2} (\omega_c t - \sin(\omega_c t))$$

La trajectoire est une cycloïde. Pour $\omega_c > 0$:



Exercice 3 - Particule chargée dans une chambre à bulle :

Description qualitative du mouvement

1. Deux méthodes, les deux sont valables et les deux sont à **maîtriser !!!**

▷ **Méthode bourrin** ⇒ système de coordonnées cartésien

On ne sait pas trop la trajectoire à l'avance ⇒ on utilise la base cartésienne

Vecteurs cinématiques

▷ vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$

▷ accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$

Bilan des forces

▷ force de Lorentz : $q\vec{v} \wedge \vec{B} = qB_0(\dot{y}\vec{e}_x - \dot{x}\vec{e}_y)$

▷ force de frottement : $-\alpha\vec{v} = -\alpha(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y)$

PFD :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + qB_0\dot{y} ; m\ddot{y} = -\alpha\dot{y} - qB_0\dot{x}$$

▷ **Méthode fine** ⇒ base de Frénet

Mouvement avec un champ magnétique ⇒ on utilise la base de Frénet (\vec{T}, \vec{N})

Vecteurs cinématiques

▷ vitesse : $\vec{v} = v(t)\vec{T}$

▷ accélération : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R(t)}\vec{N}$

Bilan des forces

▷ force de Lorentz : $q\vec{v} \wedge \vec{B} = \pm qB_0v(t)\vec{N}$

▷ force de frottement : $-\alpha\vec{v} = -\alpha v(t)\vec{T}$

Les équations du mouvement sont alors :

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v(t) ; m\frac{v^2}{R(t)} = \pm qB_0v(t)$$

2.

Méthode en DS. Puissance cinétique

Le théorème de la puissance cinétique permet de décrire l'impact des forces sur la vitesse $v(t)$ (le PFD c'est sur \vec{v} !!)

Puissance de la force de frottement $\mathcal{P}_\alpha = -\alpha\vec{v} \cdot \vec{v} = -\alpha v^2(t) < 0$. La force de frottement ralentit la particule.

La puissance de la force de Lorentz magnétique est nulle ($\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à \vec{v}).

TPC : $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_\alpha$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ donc :

$$mv(t)\frac{dv}{dt} = -\alpha v^2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\alpha v(t)$$

On retrouve la première équation du PFD avec Frénet!

Système linéaire d'ordre 1 ⇒ on résout avec $v(0) = v_0$ et on a : $v(t) = v_0 e^{-\frac{m}{\alpha}t}$.

3. Sans frottement la trajectoire est circulaire, de vitesse angulaire $\omega_c = qB/m$. Le sens de rotation dépend du signe de la charge.

On admettra par la suite que l'expression du rayon de la trajectoire reste vraie quand la norme de la vitesse varie si on remplace dans l'expression la vitesse initiale par la vitesse instantanée.

4. On trouve dans le cas sans frottement : $R = mv_0/qB$. On peut alors supposer que :

$$R(t) = \frac{m}{qB}v(t) \Rightarrow R(t) = \frac{m}{qB}v_0 e^{-\frac{m}{\alpha}t}$$

5. La trajectoire va alors décrire une spirale (\sim un cercle avec le rayon diminuant)

▷ si la particule est chargée > 0 : dans le sens horaire

▷ si la particule est chargée < 0 : dans le sens anti-horaire

6. Suivant le sens de parcours, on peut en déduire le signe de la particule. On remarque que le temps caractéristique $\tau = m/\alpha$ de décroissance du rayon est proportionnelle à la masse : plus une particule est massive, plus le rayon diminuera lentement et donc plus elle fera de tour avant d'arriver au centre. Cela permet d'avoir une estimation de la masse de la particule.

Description quantitative du mouvement (*)

🔴🔴🔴 **Attention !** Méthode importante : incontournable pour ceux qui sont le plus à l'aise.

1. On reprend les équations du mouvement dans la base cartésienne :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + qB_0\dot{y} ; m\ddot{y} = -\alpha\dot{y} - qB_0\dot{x}$$

On dérive deux fois la variable $\underline{u} = x + jy$ (dans les équations on a du $m\ddot{x}$ et $m\ddot{y}$)

$$\ddot{u} = \ddot{x} + j\ddot{y} = -\frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{qB_0}{m}\dot{y} + j\left(-\frac{\alpha}{m}\dot{y} - \frac{qB_0}{m}\dot{x}\right)$$

Donc

$$\ddot{u} + \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{qB_0}{m}\right)(\dot{x} + j\dot{y}) \Rightarrow \ddot{u} + \left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)\dot{u} = 0$$

avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $\omega = \omega_c = \frac{qB_0}{m}$.

2. On intègre $\dot{u}(t) = A \exp\left[-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right)t\right]$. **CI** : $u(0) = \dot{x}(0) + j\dot{y}(0) = v_0$ donc $A = v_0$.

$$\dot{u}(t) = v_0 e^{-(1/\tau + j\omega)t} \Rightarrow \dot{u}(t) = v_0 e^{-t/\tau} (\cos \omega t - j \sin \omega t)$$

3. On identifie $\dot{x}(t)$ avec la partie réelle et $\dot{y}(t)$ avec la partie imaginaire

$$\dot{x}(t) = v_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t ; \dot{y}(t) = -v_0 e^{-t/\tau} \sin \omega t$$

4. On intègre \dot{u} et on trouve : $u(t) = \frac{v_0}{1/\tau + j\omega} e^{-(1/\tau + j\omega)t} + C$.

CI : $u(0) = x(0) + jy(0) = 0$ donc $C = -\frac{v_0}{1/\tau + j\omega}$

$$u(t) = \frac{v_0}{1/\tau + j\omega} e^{-(1/\tau + j\omega)t} \left(e^{-(1/\tau + j\omega)t} - 1 \right)$$

A $t = +\infty$: $u(\infty) = -\frac{v_0}{1/\tau + j\omega} = -\frac{v_0(1/\tau - j\omega)}{1/\tau^2 + \omega^2}$

5. On prend partie réelle et imaginaire :

$$x_\infty = -\frac{v_0/\tau}{1/\tau^2 + \omega^2} ; y_\infty = -\frac{-v_0\omega}{1/\tau^2 + \omega^2}$$

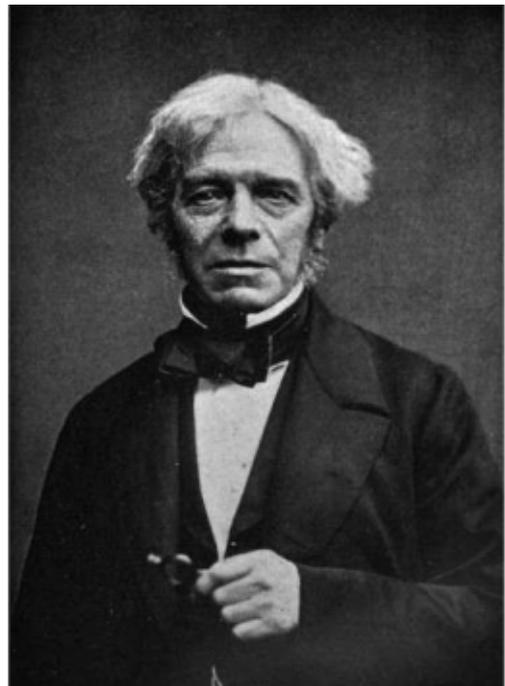
Chap XXVIII

Action d'un champ magnétique sur un circuit électrique

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Forces de Laplace | 3 |
| 1.1 | Expérience des rails de Laplace | 3 |
| 1.2 | Force élémentaire | 4 |
| 1.3 | Résultante des forces de Laplace | 5 |
| 1.4 | Puissance des forces de Laplace. | 7 |
| 2 | Couples des forces de Laplace | 8 |
| 2.1 | Moment des forces de Laplace sur un cadre rectangulaire | 8 |
| 2.2 | Couple des force de Laplace et moment magnétique | 9 |
| 2.3 | Application : Champ magnétique tournant et moteur synchrone (<i>voir TP</i>). | 10 |
| 3 | Phénomène d'induction et loi de Faraday | 12 |
| 3.1 | Mise en évidence expérimentale de l'induction | 12 |
| 3.2 | Flux magnétique | 13 |
| 3.3 | Loi de Faraday | 13 |
| 3.4 | Loi de Lenz | 15 |



Savoirs ♥

- ▷ ♥ **Force de Laplace**
 - ▷ expression de la force de Laplace élémentaire
 - ▷ résultante de la force de Laplace sur une barre droite
 - ▷ résultante des forces de Laplace sur un circuit fermé

- ▷ ♥ **Couple des forces de Laplace**
 - ▷ expression du couple élémentaire
 - ▷ expression du couple à l'aide du moment magnétique
 - ▷ action d'un champ \vec{B} sur un moment magnétique

- ▷ ♥ Présenter le principe de fonctionnement du moteur synchrone

- ▷ ♥ **Induction**
 - ▷ notion de flux magnétique, courant induit et force électromotrice
 - ▷ loi de Faraday de l'induction
 - ▷ loi de Lenz

Savoir Faire

-  *Calculer la résultante des forces de Laplace sur une portion de circuit à l'aide d'une intégrale*

-  *Calculer "à la main" le couple des forces de Laplace sur une spire carré*

-  *Calculer le couple des forces de Laplace à l'aide du moment magnétique*

-  *Calculer le flux magnétique à travers un circuit ; en déduire la force électromotrice induite*

-  *Utiliser la loi de Lenz pour analyser le lien causes - conséquences un phénomène d'induction*

Nous avons vu dans les chapitre précédent le champ magnétique : ses sources, ses représentations et son action sur une particule chargée. L'intérêt de l'étude du champ \vec{B} réside dans sa capacité à agir sur un circuit électrique parcouru par un courant via :

- ▷ des actions mécaniques : force de Laplace et couple résultant
- ▷ une phénomène d'induction : apparition d'un courant et loi de Faraday

1 Forces de Laplace

Nous allons mettre en évidence les interactions mécanique entre champ magnétique \vec{B} et un circuit électrique afin de mettre en évidence une force : la force de Laplace.

1.1 Expérience des rails de Laplace

Expérience 1 : Expérience des rails de Laplace : un circuit électrique fixe est fermé par une tige mobile posée sur le circuit. Un courant est imposé dans le circuit par un générateur et celui-ci est plongé dans un champ magnétique uniforme créé par un aimant en U.

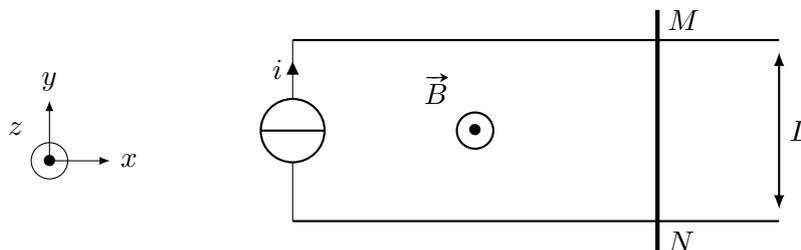


Fig. 1 – Schéma de l'expérience des rails de Laplace : la tige mobile MN ferme le circuit électrique alimenté par un courant continu i . Le circuit est placé dans un champ magnétique extérieur, uniforme et constant.

- ▷ On constate que la tige se met en mouvement lorsque le courant est présent. Nécessairement, une force est apparue, cette force est la force de Laplace.

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** La présence du courant dans le circuit induit un champ magnétique comme nous l'avons vu précédemment. Ce champ est ici négligé. Le champ \vec{B} est **imposé de l'extérieur** (par un aimant en U, ...).

► Origine physique de la force de Laplace

Un champ magnétique agit sur une particule de charge q via la force de Lorentz magnétique :

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Dans un circuit électrique, les porteurs de charges sont les électrons de conduction. S'applique alors au niveau microscopique sur chaque électron la force de Lorentz.

Définition. Force de Laplace

La force de Laplace est la résultante **macroscopique** qui s'exerce sur un conducteur parcouru par un courant I dont l'origine sont les forces **microscopiques** de Lorentz qui s'applique sur les porteur de charge du courant.

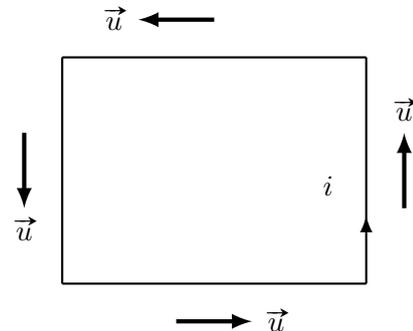
1.2 Force élémentaire

De façon similaire à la résultante des forces de pression sur un solide, nous allons :

1. définir une force de Laplace élémentaire qui s'applique sur un bout infinitésimal de circuit
2. obtenir la force totale par intégration sur tout le circuit

On considère un circuit filiforme de longueur dl pour lequel on choisit un sens de mesure du courant, noté i .

On définit alors en chaque point du circuit un vecteur \vec{u} unitaire orienté dans le sens de mesure de I .



Propriété. Force de Laplace élémentaire

Un bout de circuit filiforme de longueur infinitésimale dl plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} subit une force macroscopique, appelée force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{F}_L = I \vec{u} \wedge \vec{B} dl$$

avec \vec{u} un vecteur unitaire orienté dans le sens de mesure de I .

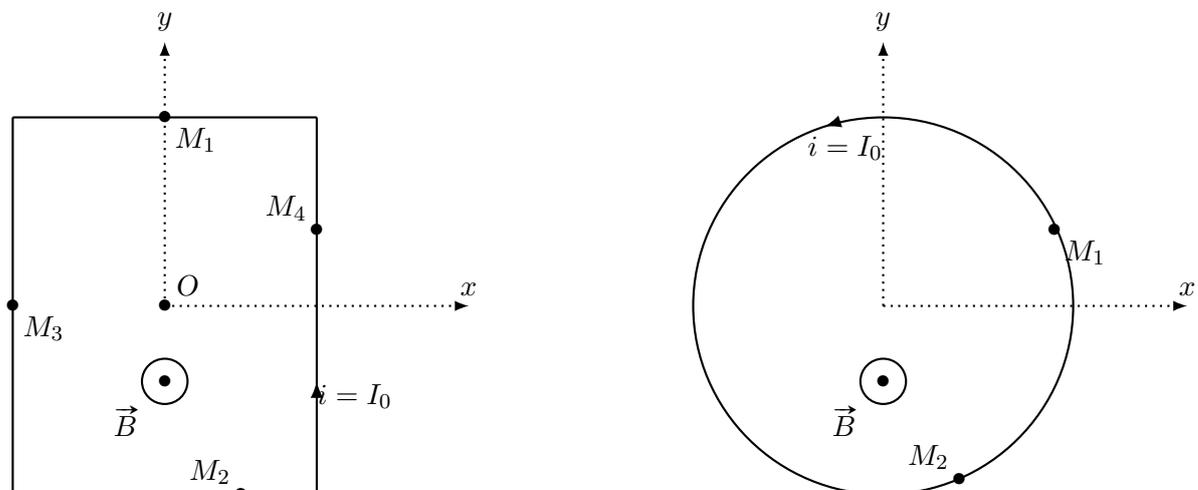
Longueur infinitésimale : on exprimera toujours dl avec le système de coordonnées :

- ▷ cartésien : $dl = dx, dy$ ou dz
- ▷ cylindrique : $dl = R d\theta$.

Orientation de la force selon la règle de la main droite :

- ▷ le pouce pointe suivant \vec{u} , sens de mesure de I
- ▷ l'index le champ \vec{B}
- ▷ le majeur donne la force

Exemple 1 : Représenter le vecteur unitaire \vec{u} et donner l'expression de la force élémentaire de Laplace pour chacun des points M_i dans les circuits suivant :

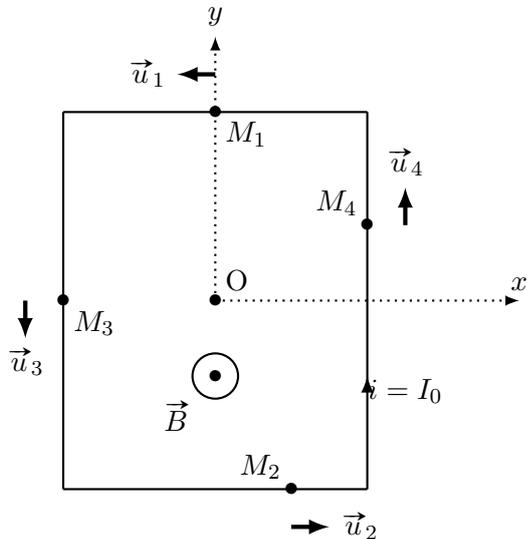


CORRECTION

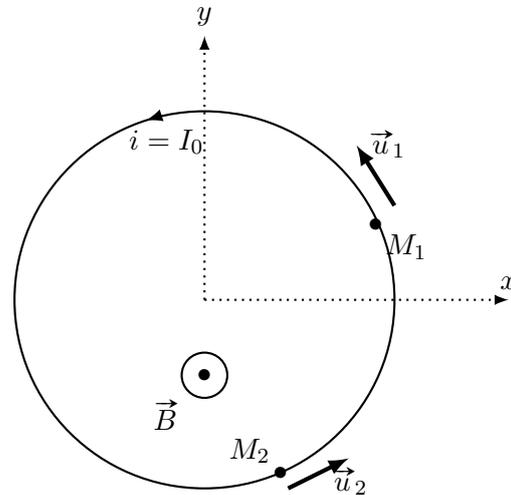
On manipule des vecteurs \Rightarrow on introduit un système de coordonnées!!

On pensera à représenter à chaque fois \vec{u} sur le schéma avant de donner son expression puis on vérifiera son résultat avec la règle de la main droite.

C'est carré \Rightarrow coordonnées cartésiennes



C'est rond \Rightarrow coordonnées cylindriques



$\triangleright \vec{u}_1 = -\vec{e}_x$ et $dl = dx$

$$d\vec{F}_1 = I_0(-\vec{e}_x) \wedge B_0 \vec{e}_z = I_0 B_0 dx \vec{e}_y$$

de la même façon on trouve :

$\triangleright d\vec{F}_2 = -I_0 B_0 dy \vec{e}_x$

$\triangleright d\vec{F}_3 = -I_0 B_0 dx \vec{e}_y$

$\triangleright d\vec{F}_4 = I_0 B_0 dy \vec{e}_x$

A chaque fois $\vec{u} = +\vec{e}_\theta$ et $dl = R d\theta$. Donc :

$$d\vec{F} = I_0 \vec{e}_\theta \wedge B_0 \vec{e}_z = I_0 B_0 R d\theta \vec{e}_r$$

1.3 Résultante des forces de Laplace

► Définition générale

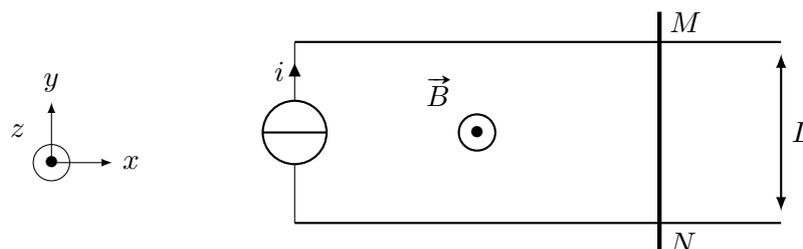
La force élémentaire de Laplace s'exerce sur chaque bout du circuit qui est plongé dans un champ magnétique extérieur. La résultante des forces de Laplace est donc la somme des forces qui s'appliquent en chaque point M_i du circuit.

$$\vec{F}_L = \sum_{circuit} d\vec{F}_L(M_i) \Rightarrow \vec{F}_L = \int_{circuit} d\vec{F}_L = I \int_{circuit} \vec{u} \wedge \vec{B} dl$$

🔴🔴🔴 **Attention !** Le vecteur \vec{u} peut varier le long d'un circuit !!

► Force de Laplace sur une barre droite

On considère le circuit suivant et on cherche la résultante des forces de Laplace sur la barre droite MN.



► Force élémentaire

\triangleright Champ magnétique : $\vec{B} = B \vec{e}_z$

▷ Vecteur unitaire \vec{u} : $\vec{u} = -\vec{e}_y$

*** **Attention !** On représente **toujours** \vec{u} sur le schéma

▷ longueur $dl = dy$

*** **Attention !** dl est une longueur : on intègre donc suivant le y croissant et non suivant le sens du courant !!

La force élémentaire de Laplace s'écrit alors :

$$d\vec{F}_L = I(-\vec{e}_y) \wedge B\vec{e}_z dy = -IBdy\vec{e}_x$$

▷ **Résultante de forces de Laplace**

On intègre la force élémentaire sur la longueur de la barre :

$$\vec{F}_L = \int_{barre} d\vec{F}_L = \int_{y=0}^{y=L} -IBdy\vec{e}_x = -IBL\vec{e}_x$$

▷ **On vérifie l'orientation de la force avec la règle de la main droite**

▷ pouce suivant $\vec{u} = -\vec{e}_y$

▷ index suivant $\vec{B} = \vec{e}_z$

▷ majeur est donc suivant $-\vec{e}_x$

Propriété. Force de Laplace sur une barre conductrice

La force de Laplace qui s'exerce au centre d'une barre conductrice droite de longueur L soumise à un courant I et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire \vec{B} est :

$$\vec{F}_L = IL\vec{u} \wedge \vec{B}$$

avec \vec{u} le vecteur directeur de la barre, orienté dans le sens du courant I .

Cette force s'applique alors au centre de la barre.

*** **Attention !** La barre doit être droite **ET** le champ magnétique uniforme dans l'espace !!

*** **Attention !** \vec{u} ne change pas de sens si $I < 0$. Il représente le sens dans lequel on mesure I (cf cours d'électricité).

► **Résultante des forces de Laplace sur un circuit fermé**

On considère un circuit fermé carré parcouru par un courant I . On cherche à calculer la force totale de Laplace qui s'applique sur ce circuit.

Pour cela on calcule $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ et \vec{F}_4 les résultantes des forces de Laplace qui s'appliquent sur les cadres du circuit.

On trouve alors :

▷ $\vec{F}_1 = Bid\vec{e}_y$ s'applique en M_1

▷ $\vec{F}_2 = -Bid\vec{e}_y$ s'applique en M_2

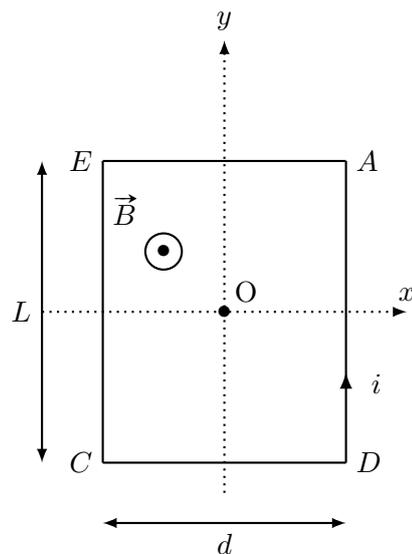
▷ $\vec{F}_3 = -BiL\vec{e}_x$ s'applique en M_3

▷ $\vec{F}_4 = Bid\vec{e}_x$ s'applique en M_4

Finalement la force totale est nulle

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$$

On généralise cette propriété à toute forme de circuit.



Propriété. Résultante des forces de Laplace sur un circuit fermé

Soit un circuit fermé plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} uniforme. Quelque soit la forme du circuit, la résultante des forces de Laplace est nulle.

⚡⚡⚡ **Attention !** Il y a une force non-nulle sur chaque portion du circuit, c'est la somme des forces qui est nulle !

1.4 Puissance des forces de Laplace

La puissance \mathcal{P}_F d'une force \vec{F} sur un point/solide en mouvement à la vitesse \vec{v} :

$$\mathcal{P}_F = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

► Puissance élémentaire et puissance totale

Définition. Puissance des forces élémentaire

La puissance délivrée par la force élémentaire de Laplace qui s'exerce sur un bout de barre conductrice de longueur dl

- ▷ animée d'une vitesse \vec{v}
- ▷ parcourue par un courant I
- ▷ placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire \vec{B}

$$d\mathcal{P}_L = (I dl \vec{u} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

⚡⚡⚡ **Attention !** Bien orienter le vecteur \vec{u} !!

⚡⚡⚡ **Attention !** \vec{v} est la vitesse de la barre !!

Pour trouver la puissance totale on intègre la puissance élémentaire sur l'ensemble du circuit et/ou sur la portion qui nous intéresse :

$$\mathcal{P}_L = \int_{\text{circuit}} (I dl \vec{u} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

► Puissance sur une barre

On reprend l'exemple précédent. La barre MN se déplace selon l'axe (Ox) .

Sa vitesse est donc $\dot{x} \vec{e}_x$, avec x la coordonnées de la barre suivant (Ox) .

Avec les résultats trouvés on a :

$$d\mathcal{P}_L = \overrightarrow{dF}_L \cdot \dot{x} \vec{e}_x = -IB \dot{x} dy$$

En intégrant sur la barre MN :

$$\mathcal{P}_L = \int_{\text{barre}} -IB \dot{x} dy = -IB \dot{x} \int_0^L dy = -IBL \dot{x}$$

Finalement la puissance est celle qu'on aurait obtenu en calculant directement la puissance de la résultante des forces de Laplace.

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}$$

Propriété. Puissance totale des forces de Laplace sur une barre homogène

La puissance totale des Laplace sur barre conductrice droite de longueur L soumise à un courant I et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire \vec{B} est

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}$$

avec \vec{F}_L la résultante des forces de Laplace sur la barre.

⚡⚡⚡ **Attention !** C'est un cas particulier !!

Mis à part dans cette configuration, on repassera **toujours** par le calcul des puissances des forces élémentaires.

2 Couples des forces de Laplace

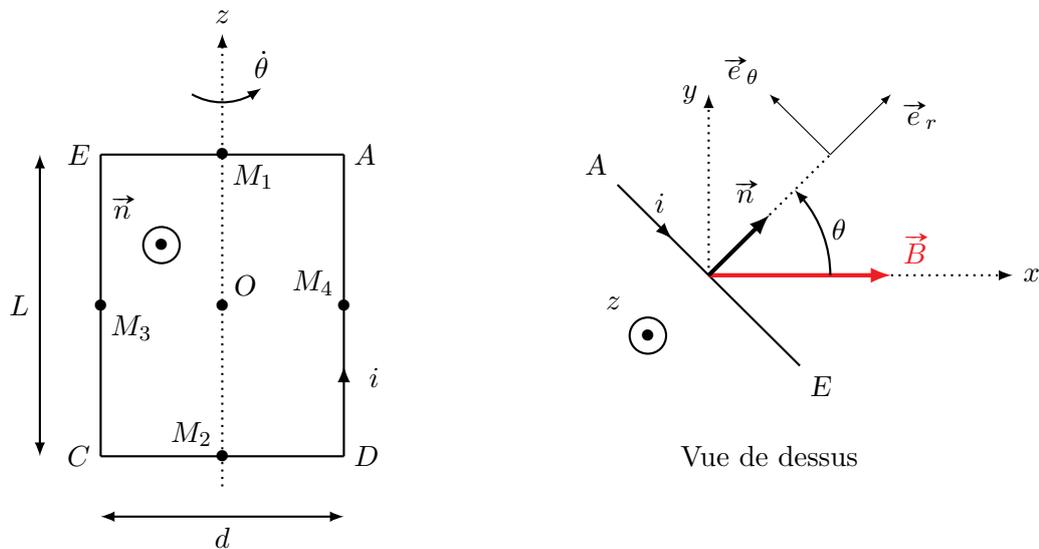
Comme vu précédemment, la résultante des forces de Laplace sur un circuit fermé est nulle lorsque le champ \vec{B} est homogène. Néanmoins, un circuit est un solide : il faut également considérer les moments des forces.

Les forces de Laplace ont une résultante nulle (le circuit ne va pas se translater) mais elles peuvent entraîner sa rotation.

2.1 Moment des forces de Laplace sur un cadre rectangulaire

Exemple 2 :

On considère un cadre rectangulaire $ACDE$ parcouru par un courant i . Ce cadre est susceptible de tourner autour de l'axe (Oz) . On impose un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$. On note θ l'angle entre \vec{B} et la normale au cadre orientée dans le sens de i que l'on notera \vec{n} .



En faisant circuler un courant i , on se rend compte que le cadre se met à tourner selon l'axe (Oz) .

On appelle Δ l'axe (O, \vec{e}_z) . Calculons les différents moments des forces de Laplace sur chacune des branches du circuit.

CORRECTION

▷ **Sur AE :**

la force de Laplace est équivalente à une force unique s'appliquant au milieu de AE que l'on note M_1

$$\vec{F}_1 = iL\vec{u} \wedge \vec{e}_x$$

Avec $\vec{u} = -\vec{e}_\theta = \sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y$. On a donc :

$$\vec{F}_1 = iL(\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y) \wedge \vec{e}_x = iL\cos\theta\vec{e}_z$$

La force est suivant \vec{e}_z : son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul.

$$\mathcal{M}^{(Oz)}(\vec{F}_1) = 0$$

| **Application 1** : De la même façon, montrer que le moment de la force de Laplace sur CD est nul.

▷ **Sur EC** :

la force de Laplace est équivalente à une force unique s'appliquant au milieu de EC M_3

$$\vec{F}_3 = iL\vec{u} \wedge \vec{B}$$

avec $\vec{u} = -\vec{e}_z$. Donc :

$$\vec{F}_3 = iL(-\vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_x = iLB\vec{e}_y$$

On calcule alors le moment par rapport à l'axe (Oz). Le point d'application de la force est en M_3 donc :

$$\mathcal{M}^{(Oz)}(\vec{F}_3) = (\overrightarrow{OM_3} \wedge \vec{F}_3) \cdot \text{vece}_z$$

avec $\overrightarrow{OM_3} = d/2\vec{e}_\theta = d/2(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)$

$$\mathcal{M}^{(Oz)}(\vec{F}_3) = (d/2(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) \wedge iLB\vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z$$

$$\mathcal{M}^{(Oz)}(\vec{F}_3) = -iL\frac{d}{2}B\sin\theta.$$

| **Application 2** : De même, montrer que le moment de la force de Laplace sur DA vaut aussi $-iL\frac{d}{2}B\sin\theta$.

► **Moment sur le circuit**

En sommant tous les moments, on a

$$\mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta^{AE} + \mathcal{M}_\Delta^{EC} + \mathcal{M}_\Delta^{CD} + \mathcal{M}_\Delta^{DA}$$

$$\mathcal{M}_\Delta = -iLd \times B \times \sin\theta$$

On reconnaît dans le premier terme la norme du moment magnétique de la spire $\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S} = iLd\vec{n}$. Ici on a donc $\mathcal{M}_\Delta = -|\vec{\mathcal{M}}|B\sin\theta$. On reconnaît : $(\vec{n} \wedge \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_z = -\sin\theta$ d'où :

$$\mathcal{M}_\Delta = (\mathcal{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z$$

2.2 Couple des force de Laplace et moment magnétique

► **Action du couple des forces de Laplace**

Propriété. Couple des force de Laplace

Le couple des forces des Laplace par rapport à un axe Δ sur un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ uniforme et stationnaire \vec{B} vaut

$$\Gamma_\Delta = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ peut avoir comme origine :

- ▷ un circuit électrique $\vec{\mathcal{M}} = iS\vec{n}$
- ▷ un aimant

► **Retour sur la spire carré**

Pour la spire carrée précédente on a :

- ▷ $\vec{n} = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$
- ▷ $\mathcal{M} = i \times dL \times \vec{n}$
- ▷ $\vec{B} = B\vec{e}_x$

On a donc :

$$\Gamma = (\mathcal{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \Gamma = (iLd(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) \wedge B\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_z$$

Soit $\Gamma = -iLD\sin\theta$.

► **Action du champ magnétique sur un aimant**

On considère une boussole (\sim un aimant) représentée par son moment magnétique \vec{M} . Elle peut tourner le long d'un axe verticale (Δ) dans un champ magnétique \vec{B} uniforme. On suppose \vec{B} situé le même plan que \vec{M} . On introduit θ l'angle entre \vec{B} et \vec{M} .

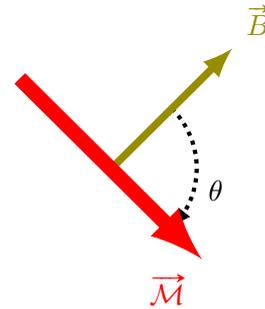
On calcule le couple des actions des forces de Laplace :

$$\Gamma_{Lap} = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

On a : $\vec{M} \wedge \vec{B} = -MB \sin \theta \vec{u}$ et donc :

$$\Gamma_{Lap} = -MB \sin \theta$$

Si $\theta > 0$ alors $\Gamma_{Lap} < 0$ (inversement $\theta > 0 \Rightarrow \Gamma_{Lap} > 0$) : le couple des forces de Laplace va avoir tendance à faire tourner \vec{M} pour l'aligner dans la direction de \vec{B} .

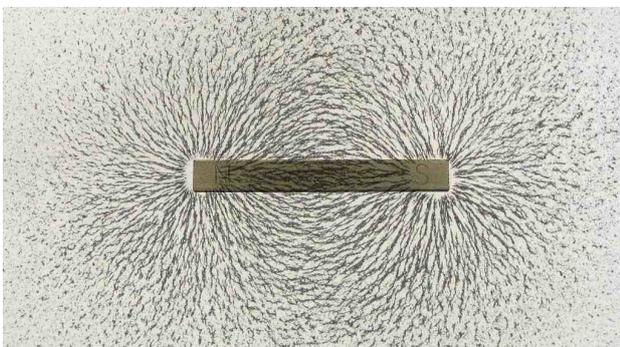


Propriété. Orientation des moments magnétiques

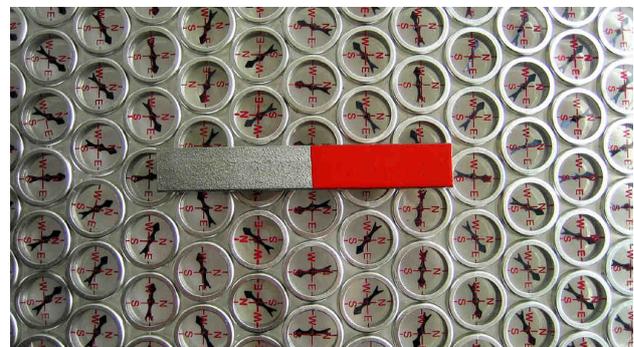
Les moments magnétiques ont tendance à s'aligner sur le champ magnétique \vec{B} , c'est à dire à s'aligner sur les lignes de champs.

Sans sources artificielles de champ, les boussoles s'orientent donc le long des lignes de champ du champ magnétique terrestre, donc vers le pôle Sud Magnétique, proche du pôle Nord géographique.

Application 3 : Expliquer les deux expériences suivantes : si on dispose de la limaille de fer, c'est-à-dire de minuscule bout de fil de fer, autour d'un aimant, ils se disposent selon une géométrie particulière (figure 2a). Si on remplace la limaille par un ensemble de petits aimants, on remarque de plus que ceux-ci s'orientent dans la même direction.



(a) Alignement de la limaille de fer autour d'un aimant.



(b) Organisation de boussoles autour d'un aimant.

Fig. 2 – Photographie de l'alignement de limaille de fer et de boussoles autour d'un aimant.

2.3 Application : Champ magnétique tournant et moteur synchrone (voir TP)

L'idée de base est la suivante : on place deux bobine à $\pi/2$ l'une de l'autre. La bobine 1 est parcourue par un courant $i_1 = i_0 \cos(\omega t)$ et la bobine 2 par un courant $i_2 = i_0 \cos(\omega t + \pi/2)$. Ces deux bobines fixes sont nommées **stator**.

On place en O un système que l'on nomme **rotor** caractérisé par son moment magnétique \vec{M} . Si les bobines sont suffisamment grandes devant la taille du rotor, on peut considérer que le champ produit par chacune des bobines est uniforme sur le rotor.

Le champ produit par la bobine 1 sur S est $\vec{B}_1 = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. Le champ produit par la bobine 2 sur S est $\vec{B}_2 = B_0 \cos(\omega t + \pi/2) \vec{e}_y$. Le champ magnétique total appliqué sur S est donc :

$$\vec{B} = B_0 (\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y) .$$

On réalise ainsi un champ magnétique tournant sans faire tourner de pièce mécanique.

Ensuite, comme le moment magnétique est soumis à un couple qui tend à l'aligner avec le champ magnétique, celui-ci va se mettre en rotation. C'est le principe d'un moteur synchrone : le champ et l'aiguille tournent à la même vitesse.

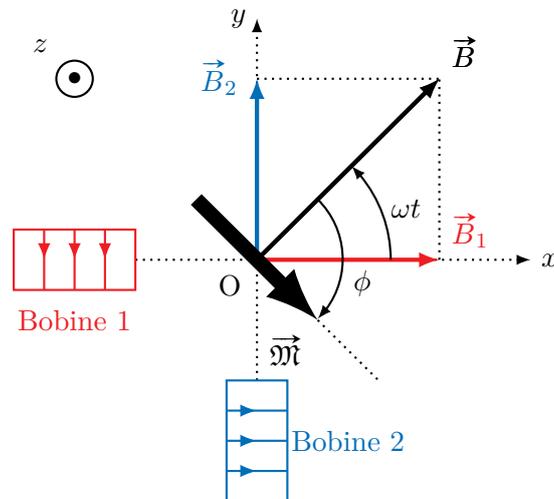


Fig. 3 – Principe de création d'un champ magnétique tournant, le moment magnétique tourne avec le champ. L'éventuel déphasage constant ϕ entre le champ et le rotor est lié à la présence d'un couple de transmission qui permet de récupérer l'énergie mécanique.

En pratique, il est compliqué de créer deux courants déphasés de $\pi/2$. Par contre, le réseau électrique EDF fournit un courant triphasé, c'est-à-dire trois courants tous déphasés de $2\pi/3$ qui permettent facilement de créer un champ tournant.

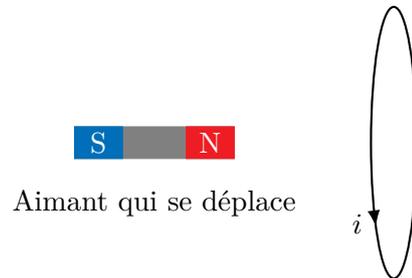
| **Remarque** : Il s'agit exactement du principe de l'agitateur magnétique utilisé en chimie.

3 Phénomène d'induction et loi de Faraday

3.1 Mise en évidence expérimentale de l'induction

Historiquement, les phénomènes d'induction ont été découverts expérimentalement par Faraday en 1831 qui se demandait si un champ magnétique pouvait être à l'origine d'un courant électrique.

On considère un aimant, dont le pôle Nord pointe vers le circuit, et un circuit conducteur. Le circuit est relié à une résistance dont on mesure la tension, et donc l'intensité i qui traverse le circuit.



► Observations et interprétations

1. Si l'aimant et le circuit sont immobiles, on n'observe aucun courant.
2. Si le circuit est immobile et que l'on bouge l'aimant, $i \neq 0$.
 - ▷ Le courant $i(t)$ est d'autant plus grand que l'aimant bouge vite \Rightarrow ce sont les variations qui comptent.
 - ▷ Si on refait l'expérience avec tout autre matériau qu'un aimant, rien ne se passe \Rightarrow c'est le champ magnétique qui compte.

L'apparition du courant $i(t)$ est donc liée à la variation temporelle de $\vec{B}(t)$ au niveau du circuit.

3. Si l'aimant est immobile et que l'on déplace le circuit $i \neq 0$. On observe les mêmes phénomènes que lorsque l'on approche le pôle nord de l'aimant.

Si on bouge l'aimant et le circuit ensemble, rien ne se passe.

L'apparition du courant $i(t)$ est donc liée au déplacement relatif de l'aimant par rapport au circuit.

4. Si on éloigne le pôle nord de l'aimant, (ou si on éloigne le circuit du pôle nord de l'aimant), on observe un courant $i > 0$. Si on approche le pôle nord de l'aimant, (ou si on approche le circuit du pôle nord de l'aimant), on observe un courant $i < 0$.

Le sens du courant $i(t)$ est sensible au signe de la variation de la norme de \vec{B} .

5. Plus le circuit est grand, plus le courant électrique est important.

► Conclusion

Ainsi, le mouvement relatif entre l'aimant et le circuit entraîne un courant dans le circuit. Le circuit se comporte comme s'il possédait un générateur délivrant un courant appelé courant induit i .

Définition. Courant induit

Un courant induit est un courant qui apparaît dans un circuit électronique plongé dans un champ magnétique. L'apparition de ce courant induit est due au mouvement relatif du champ magnétique \vec{B} par rapport au circuit.

Exemple 3 : C'est le principe du détecteur de métaux, de l'antivol dans les magasins... Un moment magnétique en mouvement entraîne un courant dans un circuit fixe. La mesure de ce courant permet donc de détecter la présence du moment magnétique.

3.2 Flux magnétique

On a vu à travers l'expérience que le courant créé dans la spire dépend :

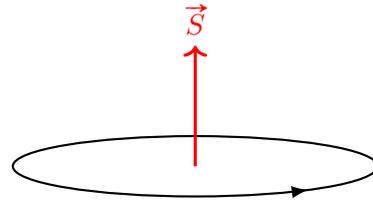
- ▷ du champ magnétique \vec{B} créé par l'aimant
- ▷ du circuit électrique qu'on considère
- ▷ de la position et du mouvement de l'un par rapport à l'autre

Ces différentes notions sont représentées par une seule grandeur : **le flux magnétique**.

Rappel : vecteur surface \vec{S} d'une spire orientée

Le vecteur surface \vec{S} d'une spire plane est défini par :

- ▷ sa norme : égale à la surface S définie par la spire
- ▷ sa direction : on place le pouce puis l'index de la main droite sur la spire de telle sorte à ce "index \rightarrow majeur" soit le sens du courant. Le majeur indique alors la direction de \vec{S} .



Définition. Flux magnétique

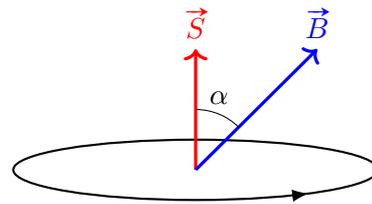
On considère une spire plane de forme quelconque placée dans un champ magnétique \vec{B} uniforme.

Le flux magnétique traversant la spire est :

$$\Phi(t) = \vec{S} \cdot \vec{B} = SB(t) \cos \alpha$$

où \vec{S} est le vecteur surface de la spire.

Son unité est le Weber (Wb).



*** **Attention !** Uniforme \neq Statique : \vec{B} dépend du temps mais pas de l'espace!!.

Avec les mains :

Le flux magnétique représente la quantité de champ magnétique qui "s'écoule" à travers la bobine.

- ▷ si \vec{B} et \vec{S} sont dans le même sens, le flux est positif
- ▷ si \vec{B} et \vec{S} sont colinéaires alors : $\phi = \pm BS$.
- ▷ si \vec{B} et \vec{S} sont orthogonaux alors : $\phi = 0$.

Propriété. Flux à travers une bobine

Le flux magnétique à travers une bobine de N spires ϕ_{tot} est la somme des flux à travers chacune des spires ϕ_{spire} , soit :

$$\phi_{\text{tot}} = N \phi_{\text{spire}}$$

3.3 Loi de Faraday

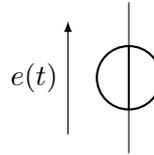
► Énoncé

La force électromotrice induite dans un circuit électrique placé dans un champ magnétique est donnée par la loi de Faraday, qui date de 1831.

Théorème. Loi de Faraday

Le courant induit dans un circuit électrique fermé sous l'action d'un champ magnétique \vec{B} est égal au courant qui serait produit par un générateur électrique idéal fictif de force électromotrice (f.é.m. ou tension) e donnée par la **loi de Faraday**

$$e(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$



avec $\Phi(t)$ le flux magnétique du champ \vec{B} dans le circuit.

🔥🔥🔥 **Attention !** La f.é.m. e de la loi de Faraday est toujours orientée en convention générateur dans les circuits électriques.

🔥🔥🔥 **Attention !** Le sens de mesure du courant a déjà été décidé lorsqu'on a défini \vec{S} !!

🔥🔥🔥 **Attention !** On n'oublie pas le moins ET la dérivée!!

Il existe deux façons de faire varier ce flux :

1. Cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps
2. Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

On devine aisément les deux chapitres qui suivent ...

Il existe également des situations où le circuit est mobile dans un champ magnétique dépendant du temps (hors programme).

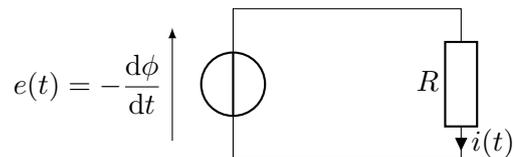
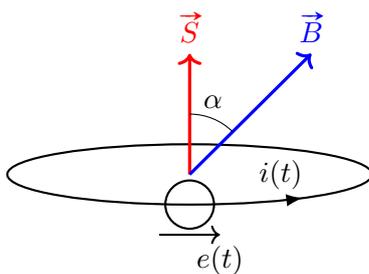
► **Convention d'orientation**

Méthode en DS. Convention d'orientation

🔥🔥🔥 **Attention !** Connaître l'énoncé de la loi de Faraday $e(t) = - \frac{d\phi}{dt}$ n'a aucune valeur si les conventions d'orientation des quantités algébriques $e(t)$ et $\phi(t)$ ne sont pas **définies avec rigueur**.

Pour cela, on représente **TOUJOURS** la spire ou le circuit étudié de deux façon différente :

1. d'un point de vu magnétique, utile pour calculer \vec{S} et le flux Φ
2. d'un point de vu électronique, utile pour trouver les liens tensions - courants



🔥🔥🔥 **Attention !** Lorsque seule une partie du circuit est sensible à la variation du flux magnétique (cas d'une bobine dans un circuit), c'est à cet endroit que se trouve la fem induite.

► **Spire dans un champ variable**

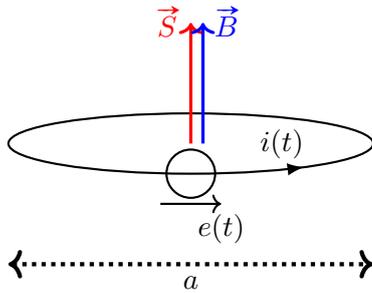
***Exemple 4 :** On considère une spire circulaire métallique de rayon a et de résistance R . On appelle (Oz) son axe de révolution et on la place dans un champ magnétique sinusoïdal uniforme de la forme $\vec{B}(t) = B_0 \cos \omega t \vec{e}_z$.*

1. Choisir une orientation pour le circuit et calculer le flux du champ magnétique. Calculer la force électromotrice dans la spire et en déduire le courant induit.

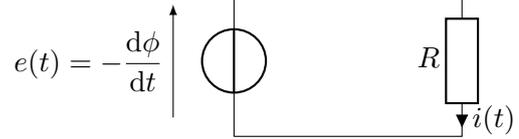
CORRECTION

1. SCHEMAAAAAA!!!!!!!

Partie magnétique :



Partie électrique



La loi des mailles et la loi d'Ohm dans le circuit électrique donne

$$e(t) = Ri(t)$$

On remarque que \vec{S} et \vec{B} sont alignés : $\Phi = SB(t) = \pi a^2 B_0 \cos \omega t$.

On a alors $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 B_0 \omega \sin \omega t$.

Mis bout-à-bout, nos deux études montrent que : $i(t) = e(t)/R = \frac{\pi a^2 B_0 \omega}{R} \sin \omega t$.

3.4 Loi de Lenz

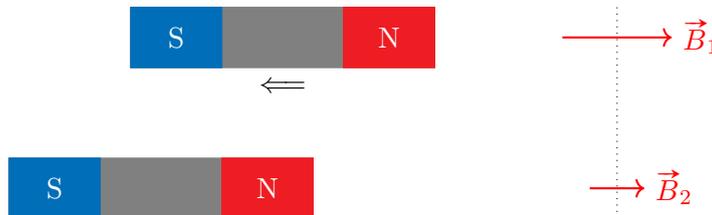
► Énoncé et exemple introductif

Un phénomène d'induction tend toujours, par ses conséquences, à modérer les variations de flux magnétique qui l'ont engendré. Plus généralement, on retient :

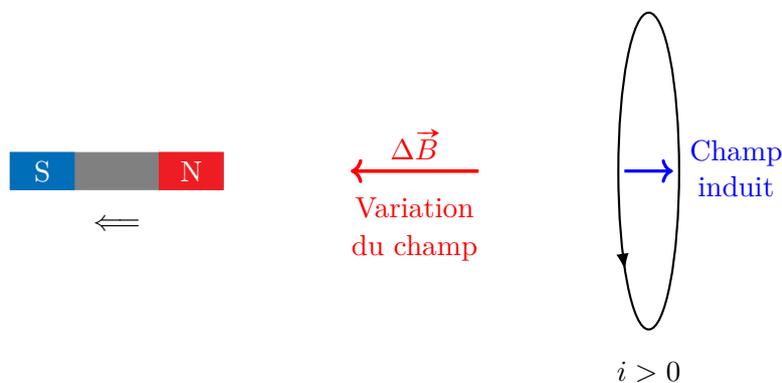
Théorème. Loi de Lenz

Les effets produits par un phénomène d'induction s'opposent toujours aux causes qui leur ont donné naissance.

Revenons à l'expérience précédente et schématisons les différents cas. On rappelle que le champ magnétique est orienté le long des lignes de courants qui vont du pôle Nord vers le pôle Sud et que l'intensité du champ est plus forte plus l'aimant est proche.



Lorsque l'on éloigne l'aimant, le champ magnétique diminue au niveau de la spire.



Il se crée alors dans la spire un courant induit i qui va lui même créé un champ magnétique induit qui s'oppose à la variation du champ magnétique créé par le mouvement de l'aimant.

► Cause : variation du champ \vec{B} au niveau de la spire du au mouvement de l'aimant

- ▷ **Conséquence** : apparition d'un courant induit i dans la spire
- ▷ **Loi de Lenz** : le courant induit crée un champ magnétique de sens opposé à la variation de \vec{B} qui lui a donné naissance.

Astuce pratique :

A la fin d'un exercice d'induction, interprétation qualitative des résultat \Rightarrow Loi de Lenz : les conséquences s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance.

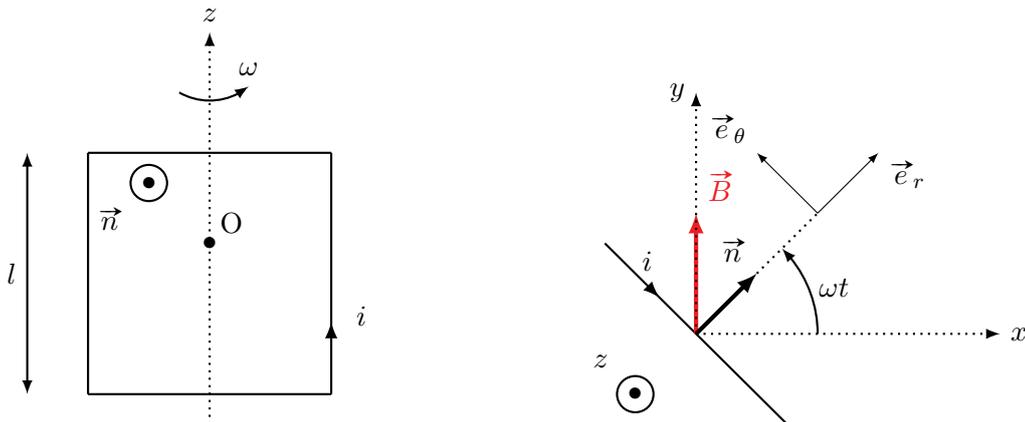
► **Cadre en rotation**

Exemple 5 : On considère un cadre métallique de résistance électrique R carré de côté l qui tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω . Ce cadre est plongé dans un champ magnétique permanent et uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$.

1. Définir une orientation du circuit. Exprimer le vecteur unitaire \vec{n} normal au cadre à l'aide des vecteurs de la base cartésienne.
2. En déduire le flux du champ magnétique à travers le circuit.
3. Donner la force électromotrice et le courant induit.
4. Donner le moment magnétique induit \mathcal{M} et le couple des forces de Laplace qui en résulte. Discuter l'effet de ce couple à l'aide de la loi de Lenz.

CORRECTION

1. SCHEMAAAAAA!!!!!!!



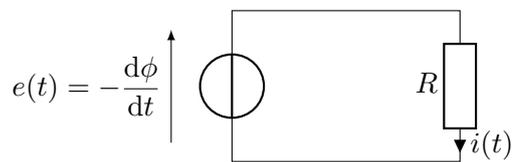
Avec notre orientation de spire on a : $\vec{n} = \cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y$.

2. Le flux magnétique est $\Phi = \vec{S} \cdot \vec{B} = l^2 \vec{n} \cdot B_0 \vec{e}_y = l^2 B_0 \sin \omega t$.
- 3.

Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -l^2 B_0 \omega \cos \omega t$.

Dans le circuit ci-contre, on trouve avec la loi des mailles/loi d'Ohm :

$$i(t) = \frac{-lB_0^2\omega}{R} \cos \omega t$$



4. Le moment magnétique de la spire est alors $\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S} = \frac{-lB_0^2\omega}{R} \cos \omega t (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$

Le couple des forces de Laplace est $\Gamma = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z$ soit :

$$\left(\frac{-lB_0^2\omega}{R} \sin \omega t (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y) \wedge B_0 \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_z = -\frac{lB_0^2\omega}{R} \cos^2 \omega t$$

On remarque que le couple Γ est négatif : les forces dus à l'induction s'oppose à la rotation du cadre.

C'est un exemple de la loi de Lenz :

- ▷ **Causes** : la mise en rotation du cadre
- ▷ **Conséquences** : apparition d'un courant induit $i(t) \Rightarrow$ force et couple de Laplace
- ▷ **Loi de Lenz** : les conséquences des phénomènes d'induction s'oppose aux causes qui leur ont donné naissance. Ici le couple Γ (*conséquence*) s'oppose à la rotation du cadre (*cause*).

Exercice 1 - Rails de Laplace penchés à savoir faire, proche du cours :

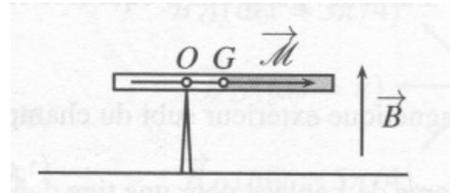
Considérons des rails de Laplace faisant un angle α avec l'horizontale. Le champ magnétique est constant et uniforme, vertical, dirigé vers le haut. On prendra pour les applications numériques $\alpha = 30^\circ$, $B = 150 \text{ mT}$, la masse de la tige est $m = 8.0 \text{ g}$ et sa longueur $\ell = 12 \text{ cm}$. On néglige d'éventuels phénomènes d'auto-induction et les frottements solides.

1. Faire un schéma du montage en précisant le sens du courant pour que la force permette au barreau mobile de monter le long des rails.
2. Déterminer l'intensité du courant qui permet l'équilibre de la tige.

Exercice 2 - Aimant en équilibre :

Un aimant très fin, de moment magnétique \vec{M} , de masse m , repose en équilibre sur une pointe en O . Il est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme \vec{B} et au champ de pesanteur, de sens opposé au champ magnétique.

On note G le centre de gravité de l'aimant.



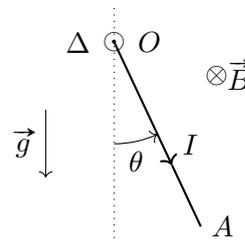
Evaluer la distance $d = OG$ pour que l'aimant soit en équilibre horizontal.

Exercice 3 - Oscillation d'une tige :

Cet exercice a pour objectif de réviser la mécanique des solides en rotation et les moments des forces.

Une tige conductrice OA , homogène, de masse $m = 100 \text{ g}$ et de longueur $\ell = 10 \text{ cm}$, est mobile en rotation autour d'un axe horizontal Δ , passant par son extrémité O . Elle est lâchée sans vitesse initiale depuis un angle θ_0 .

Un dispositif non représenté sur la figure permet de faire circuler un courant stationnaire d'intensité $I = 1 \text{ A}$ dans la tige qui est de plus soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme \vec{B} de norme 0.1 T , parallèle à Δ . On négligera les frottements de l'air.



On note $\theta(t)$ l'angle entre la verticale et la direction de la tige. On note G le centre de gravité de la tige situé en son milieu.

1. Quelles sont les trois actions mécaniques s'exerçant sur la tige.
2. Déterminer l'expression du moment du poids par rapport à l'axe Δ .
3. Montrer que le moment de la force de Laplace par rapport à l'axe Δ vaut $\mathcal{M}_{\text{Laplace},\Delta} = I \frac{\ell^2}{2} B$.
4. Déterminer l'expression de θ_{eq} lorsque la tige est à l'équilibre, en fonction de m , g , l , I et B . Faire l'application numérique.

5. On note J le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ . Montrer que l'angle $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mg\ell}{2J} \sin \theta(t) = \frac{\ell^2 IB}{2J} .$$

6. En supposant que le mouvement est de faible amplitude et donc $\sin \theta \approx \theta$, donner la période d'oscillation.
 7. Dédurre de l'équation du mouvement l'intégrale première, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2(t) - \frac{\ell^2 IB}{2} \theta(t) - \frac{mg\ell}{2} \cos \theta(t) = -\frac{\ell^2 IB}{2} \theta_0 - \frac{mg\ell}{2} \cos \theta_0 .$$

8. On trace figure 1 l'énergie potentielle de la tige en fonction de l'angle θ . A l'aide du graphe, donner

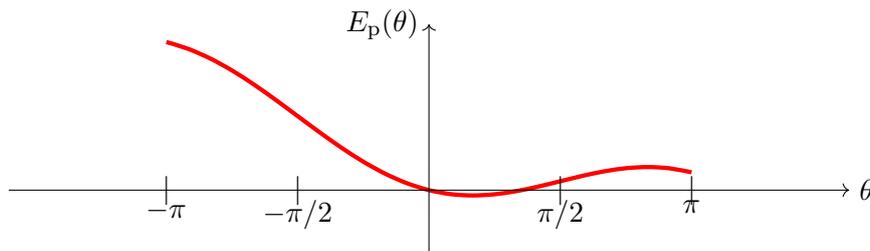


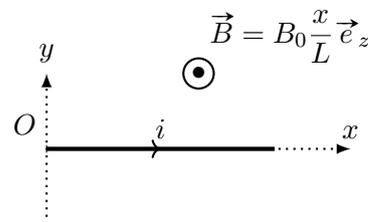
Fig. 1 – Tracé de l'énergie potentielle de la tige en fonction de l'angle θ .

qualitativement les positions d'équilibres et discuter leur stabilité.
 Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 4 - Force de Laplace infinitésimale :

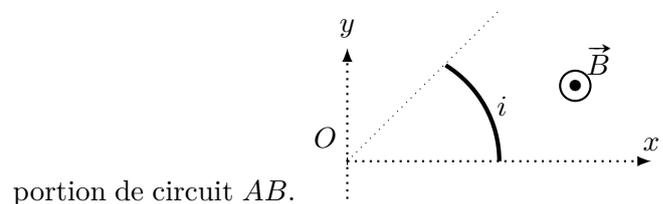
Champ magnétique variable

On étudie un segment de circuit AB droit de longueur L orienté selon l'axe x . On prend comme origine de l'axe le point A . Le champ magnétique est stationnaire mais non uniforme : $\vec{B}(x) = B_0(x/L)\vec{e}_z$.
 Calculer la résultante des forces de Laplace sur la portion de circuit AB .



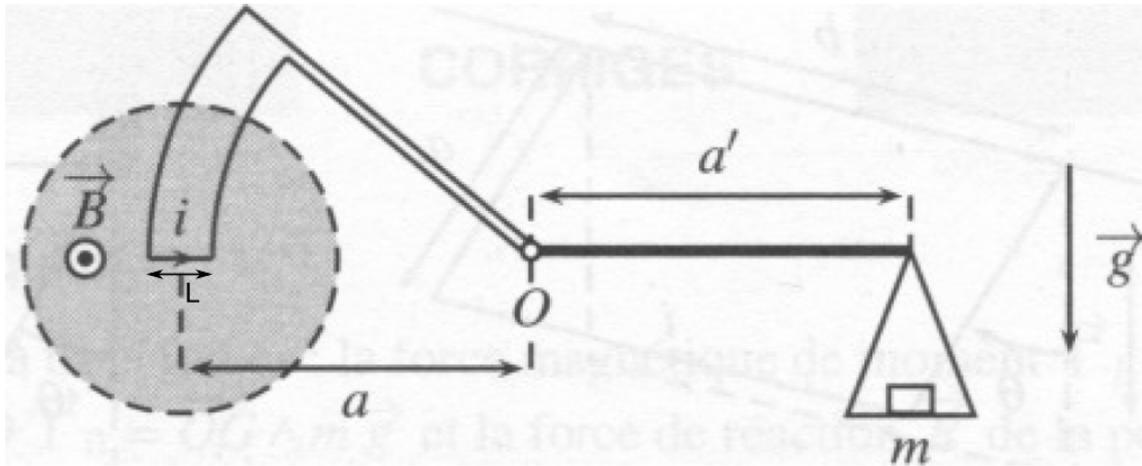
Circuit sphérique

On étudie un segment de circuit AB qui forme un arc de cercle d'angle α , de rayon R et de centre O dans le plan (Oxy) . Le champ magnétique est stationnaire et uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$.
 Calculer la résultante des forces de Laplace sur la



Exercice 5 - Balance de Cotton :

La balance de Cotton était jadis utilisée pour mesurer des champs magnétiques uniformes. Elle est constituée de deux parties rigidement liées l'une à l'autre en O . La partie de droite est une tige à l'extrémité de laquelle est attachée un plateau supportant une masse m . La partie de gauche est constituée d'un support rigide qui soutient un circuit parcouru par le courant d'intensité I . On néglige la masse des autres parties de la balance de Cotton.
 Les deux parties de la balance peuvent tourner autour de l'axe (Δ) passant par O et perpendiculaire au plan de la figure.



Dans le zone grisée règne le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$.

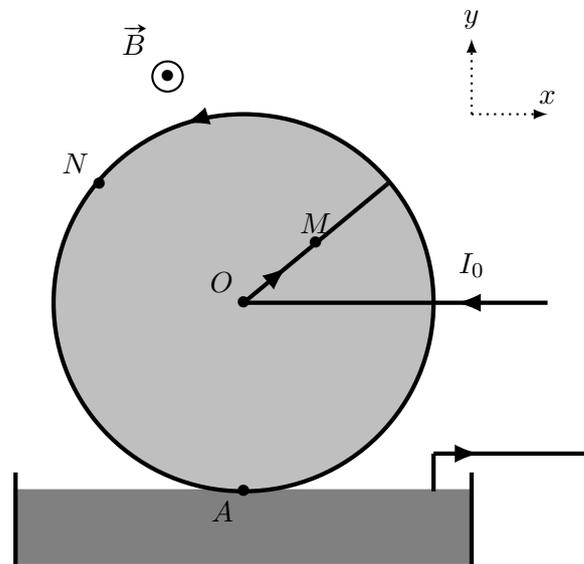
1. Calculer la force de Laplace infinitésimale qui s'applique sur une des parties circulaires. Calculer le moment infinitésimal associé à cette force.
En déduire que le moment total qui s'exerce sur cette partie du circuit est nul.
2. Calculer le moment résultant des forces de Laplace par rapport à l'axe (Δ) qui s'applique sur la partie droite du circuit plongé dans le champ \vec{B} .
3. Calculer le moment par rapport à (Δ) du poids de la masse m .
4. En déduire que la balance est à l'équilibre si :

$$B = \frac{mga'}{iaL}$$

Exercice 6 - Roue de Barlow :

La roue de Barlow (1822) est le premier moteur électrique de l'histoire. La puissance développée est très faible, si bien qu'il ne peut pas être réellement utilisé. Néanmoins le principe de fonctionnement est le même que celui des moteurs électriques moderne.

Une roue en cuivre de rayon a est capable de tourner autour d'un axe (Oz) et trempe dans une solution conductrice (historiquement du mercure liquide) au niveau du point A . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique permanent et uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Le disque est alimenté par un courant I_0 qui entre par le point O et ressort par la solution conductrice.



On modélisera le courant au sein de la roue comme purement radial, d'intensité I_0/N . On a représenté sur le schéma un seul rayon des N rayons.

1. Représenter sur le schéma au niveau du point N la force de Laplace élémentaire $d\vec{F}_L$ qui s'exerce sur la circonférence de la roue. Justifier alors que cette force ne participe pas à la rotation.
2. Représenter sur le schéma au niveau du point M la force de Laplace élémentaire $d\vec{F}_L$ qui s'exerce sur le rayon de courant. En déduire le sens dans lequel va tourner le disque suivant le signe de I_0 .
3. Exprimer des forces de Laplace sur le segment OM .
4. Par un argument de symétrie, justifier que la résultante des forces de Laplace sur la roue est nulle.

5. De nouveau sur un segment OM , calculer le moment résultant des forces de Laplace sur le rayon par rapport à l'axe (Oz) .
6. En déduire le moment total qui s'exerce sur la roue. Commenter son signe et le sens de rotation de la roue.

En plus des forces de Laplace, le disque est soumis à une force de frottement fluide de couple $\Gamma = -\alpha\omega$, avec ω la vitesse de rotation de la roue.

7. Donner l'équation différentielle dont ω est solution. En déduire la vitesse limite Ω de la roue.

Exercice 1 - Rails de Laplace penchés à savoir faire, proche du cours :

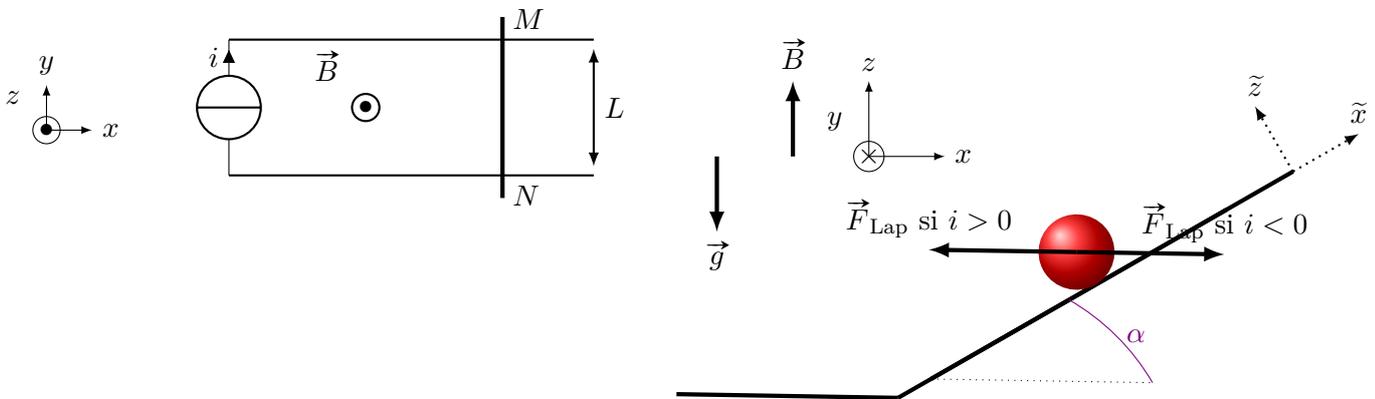
1. C'est comme des rails de Laplace "classique" mais, vu de côté, la barre glisse sur un plan incliné.

☛☛☛ **Attention !** aux axes!! On oriente le sens de la force avec la main droite!

▷ pouce suivant \vec{u}

▷ index suivant \vec{B}

▷ le majeur pointe suivant la force \vec{F}_{Lap} dans le cas où $i > 0$!



Pour que la force de Laplace équilibre le poids, elle doit pointer "vers la droite" donc $i < 0$.

2. On choisit le système de coordonnées adapté au plan incliné (on prend toujours celui-là!!) :

▷ Poids $m\vec{g} = -mg(\sin\alpha\vec{e}_{\tilde{x}} + \cos\alpha\vec{e}_{\tilde{z}})$

▷ Force de Laplace :

$$\vec{F}_{Lap} = iL\vec{u} \wedge \vec{B} = iLB(-\vec{e}_y) \wedge \vec{e}_z = -iLB\vec{e}_x = -iLB(\cos\alpha\vec{e}_{\tilde{x}} - \sin\alpha\vec{e}_{\tilde{z}})$$

☛☛☛ **Attention !** On calcule \vec{F}_{Lap} dans le système de coordonnées adapté à \vec{u} et \vec{B} ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) puis on projette dans celui adapté au problème.

▷ Réaction du support $\vec{N} = N\vec{e}_{\tilde{z}}$. (on ne prend pas en compte les frottements)

A l'équilibre, la somme des forces s'annule et on a alors, suivant l'axe \tilde{x} :

$$-mg \sin\alpha - iLB \cos\alpha = 0 \Rightarrow i = \frac{mg}{LB} \tan\alpha$$

Exercice 2 - Aimant en équilibre :

C'est un exercice d'équilibre du solide : pour qu'un solide soit à l'équilibre il faut que

▷ la somme des forces extérieures qui s'applique dessus soit nulle

▷ la somme des moments des forces extérieures qui s'applique dessus soit nulle

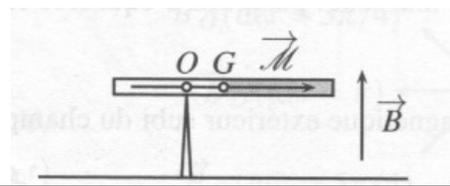
La première condition assure pas de translation, la seconde pas de rotation.

Il s'applique deux forces (le poids en G et la réaction du support en O) et un couple (celui des forces de Laplace). Les différents moments par rapport à O sont :

▷ poids : $\mathcal{M} = -mgd$

▷ réaction du support : $\mathcal{M} = 0$ (s'applique en O)

▷ couple des forces de Laplace : $\Gamma = \vec{M} \wedge \vec{B} = +MB$

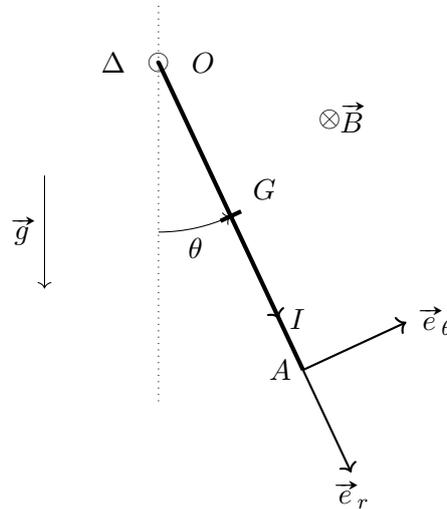


A l'équilibre : $-mgd + MB = 0$ donc $d = \frac{MB}{mg}$.

Exercice 3 - Oscillation d'une tige :

En mécanique du solide, avant toute chose :

- ▷ on introduit un système de coordonnées adapté au système, ici cylindrique
- ▷ on repère le point de rotation O
- ▷ on fait apparaître le centre d'inertie G du solide



1. On a le poids en G (centre de la barre), la réaction du support en O et la force de Laplace en G (centre de la barre).

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** C'est uniquement pour un barre **droite** et plongé dans un champ \vec{B} homogène qu'on peut dire que la force de Laplace s'applique au centre ! Sinon il faudra calculer le moment infinitésimale en chaque point et intégrer sur la barre.

2. Le poids $m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ s'applique en G avec $\vec{OG} = l/2\vec{e}_r$.

$$\mathcal{M} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{l}{2}\vec{e}_r \wedge mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) = -\frac{l}{2}mg\sin\theta$$

3. La force de Laplace $\vec{F}_{\text{Lap}} = Il\vec{u} \wedge \vec{B} = Il\vec{e}_r \wedge B(-\vec{e}_z) = IlB\vec{e}_\theta$ s'applique en G avec $\vec{OG} = l/2\vec{e}_r$.

$$\mathcal{M} = \vec{OG} \wedge \vec{F}_{\text{Lap}} = \frac{l}{2}\vec{e}_r \wedge IlB\vec{e}_\theta = I\frac{l^2}{2}B$$

4. A l'équilibre, la somme des moments s'annule (celui de la réaction du support est nul) donc :

$$-\frac{l}{2}mg\sin\theta + I\frac{l^2}{2}B = 0 \Rightarrow \sin\theta_{\text{eq}} = \frac{IlB}{mg}$$

5. Le **Théorème du Moment Cinétique**, appliqué à la barre en rotation donne :

$$\frac{d}{dt} [J\dot{\theta}] = -\frac{l}{2}mg\sin\theta + I\frac{l^2}{2}B \Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{mgl}{2J}\sin\theta(t) = \frac{\ell^2 IB}{2J}$$

6. Avec l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ on trouve une équation d'oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/2J} \text{ soit } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mgl}}$$

7. On se rappelle la méthode de l'intégrale première :

- ▷ on part de l'équation du mouvement (pas sous forme canonique)
- ▷ on multiplie par $\dot{\theta}$ (ou \dot{x})
- ▷ on intègre avec les **CI**

Ici cela donne :

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{l}{2}mg\dot{\theta}\sin\theta + I\frac{l^2}{2}B\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{l}{2}mg\cos\theta + I\frac{l^2}{2}B\theta\right]$$

Avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ on a bien :

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2(t) - \frac{\ell^2 IB}{2}\theta(t) - \frac{mgl}{2}\cos\theta(t) = -\frac{\ell^2 IB}{2}\theta_0 - \frac{mgl}{2}\cos\theta_0.$$

On remarque alors qu'on a bien obtenu l'énergie mécanique du système : $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ et $E_p = -\frac{\ell^2 IB}{2}\theta(t) - \frac{mgl}{2}\cos\theta(t)$.

8. On observe deux extremums :

▷ un maximum : position d'équilibre instable, $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$

▷ un minimum : position d'équilibre stable, $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ et $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0$

Par le calcul :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -\frac{\ell^2 IB}{2} + \frac{mgl}{2}\sin\theta \quad \text{et} \quad \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = 0 + \frac{mgl}{2}\cos\theta$$

On a alors $\sin\theta_{eq} = \frac{IlB}{mg}$ (c'est ce qu'on a trouvé avant) donc

$$\theta_{eq} = \arcsin\left[\frac{IlB}{mg}\right] \quad \mathbf{ET/OU} \quad \theta_{eq} = \pi - \arcsin\left[\frac{IlB}{mg}\right]$$

Position stable ou instable : $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -\frac{mgl}{2}\sin\theta$.

▷ pour $\theta_{eq} = \arcsin\left[\frac{IlB}{mg}\right] \Rightarrow \frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$: STABLE

▷ pour $\theta_{eq} = \pi - \arcsin\left[\frac{IlB}{mg}\right] \Rightarrow \frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0$: INSTABLE

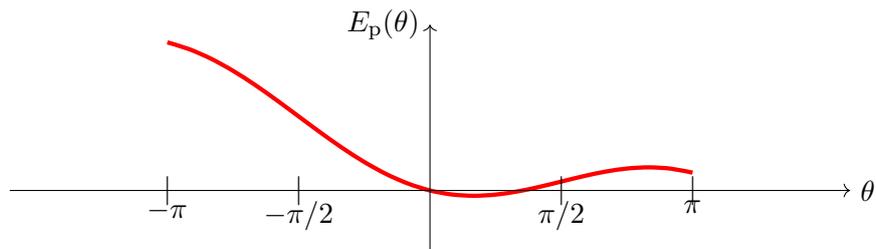


Fig. 1 – Tracé de l'énergie potentielle de la tige en fonction de l'angle θ .

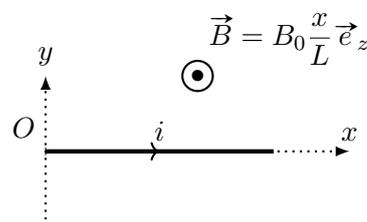
Exercice 4 - Force de Laplace infinitésimale :

Dans les deux cas, on n'a pas affaire à une barre droite plongé dans un champ homogène \Rightarrow il faut passer par les forces infinitésimale et intégrer !

Champ magnétique variable

$$\triangleright d\vec{F}_L = i\vec{e}_x \wedge B_0 \frac{x}{L} \vec{e}_z dx = -iB_0 \frac{x}{L} dx \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_L = \int_0^L dF_L = -\frac{iB_0}{L} \vec{e}_y \int_0^L x dx = -\frac{iB_0 L}{2} \vec{e}_y$$



Circuit sphérique

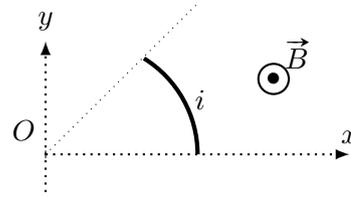
▷ $d\vec{F}_L = i \vec{e}_\theta \wedge B_0 \vec{e}_z R d\theta = -i B_0 R d\theta \vec{e}_r$

*** **Attention !** Il faut décomposer \vec{e}_r car il varie lors de l'intégration :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_L = \int_0^\alpha dF_L = i B_0 R \int_0^\alpha (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) d\theta$$

$$\vec{F}_L = -i B_0 R (\sin \alpha \vec{e}_x - (\cos \alpha - 1) \vec{e}_y)$$



Exercice 5 - Balance de Cotton :

*** **Attention !** le système de coordonnées cylindrique est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y)$.

1. Sur la partie circulaire intérieure $d\vec{F}_L = i \vec{e}_\theta \wedge B_0 \vec{e}_y a d\theta = -i B_0 a d\theta \vec{e}_r$. Moment : $d\mathcal{M} = (\vec{OM} \wedge d\vec{F}_L) \cdot \vec{e}_y = (a \vec{e}_r \wedge -i B_0 a d\theta \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_y = 0$

On peut faire un raisonnement similaire sur la partie extérieure.

2. Sur la partir droite de longueur L , on peut utiliser directement :

$$\vec{F}_L = i(-\vec{e}_r) \wedge B \vec{e}_y L = i B L \vec{e}_\theta \text{ et } \mathcal{M} = (a \vec{e}_r \wedge \vec{F}_L) \cdot \vec{e}_y = ai B L$$

3. Moment du poids : $\mathcal{M} = -mga'$

4. A l'équilibre les deux moments se compensent : $ai B L - mga' = 0$ donc $B = \frac{mga'}{aiL}$.

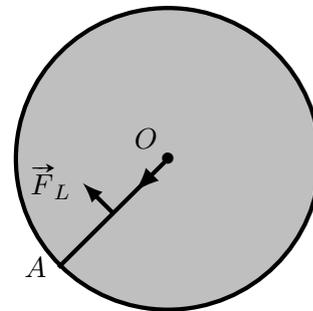
Exercice 6 - Roue de Barlow :

- 1.

On représente l'orientation de la force avec la règle de la main droite.

*** **Attention !** le sens donné est celui pour $i > 0$! Donc :

- ▷ si $i > 0$ la roue tourne dans le sens horaire
- ▷ si $i < 0$ la roue tourne dans le sens direct



2. Sur OA (barre droite et champ \vec{B} homogène) : $\vec{F}_L = i \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z a = -i B a \vec{e}_\theta$.
On modélise le courant comme se propageant dans la roue de façon radiale et selon toutes les directions.
3. Pour chaque rayon OA , on peut trouver un rayon OA' diamétralement opposé qui annulera la force sur OA . La résultante des moments est nul. Par contre, il faut prendre en compte le moment !
4. Moment $\mathcal{M} = (a/2 \vec{e}_r \wedge \vec{F}_L) \cdot \vec{e}_z = -\frac{i B a^2}{2}$. On retrouve bien $\mathcal{M} < 0$ si $i > 0$: la roue tourne dans le sens horaire.
5. Le moment total est alors la somme de tous les moments sur les rayon OA :

$$\mathcal{M}_{tot} = \sum_{OA} \mathcal{M} \rightarrow \int_{\text{cercle}} \mathcal{M} = 2\pi a \mathcal{M} = -\frac{I_0 B a^2}{2}$$

6. On applique le TMC sur la roue :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{I_0 B a^2}{2} - \alpha \omega \Rightarrow \text{régime stationnaire : } \omega_\infty = \frac{I_0 B a^2}{2\alpha}$$

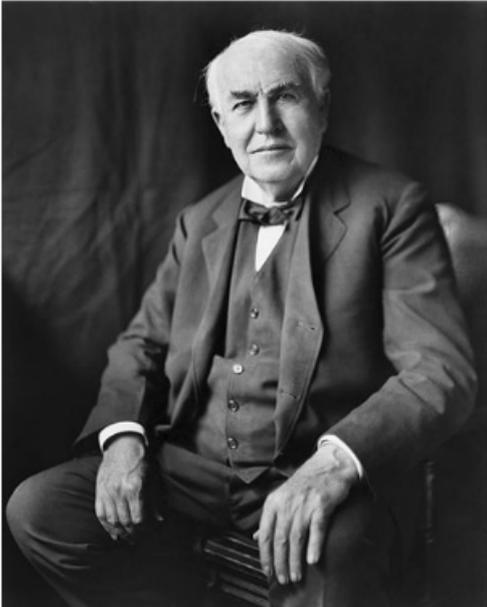
Chap XXIX

Induction de Neumann : circuit fixe dans \vec{B} variable

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Phénomène d'auto-induction | 3 |
| 1.1 | Flux propre et inductance propre | 3 |
| 1.2 | Loi de Faraday et schéma électrique équivalent pour la bobine | 4 |
| 2 | Phénomène d'induction mutuelle | 5 |
| 2.1 | Principe d'inductance mutuelle, interaction entre deux circuits. | 5 |
| 2.2 | Exemple de calcul d'inductance mutuelle : cas de deux bobines | 7 |
| 2.3 | Étude de circuit électrique couplés par inductance mutuelle | 7 |
| 3 | Applications | 10 |
| 3.1 | Le transformateur | 11 |
| 3.2 | Divers | 12 |



Savoirs ♥

- ▷ ♥ **Auto-induction**
 - ▷ schéma de fonctionnement de l'auto-induction
 - ▷ inductance propre et f.e.m. induite par auto-induction
 - ▷ énergie magnétique stockée par auto-induction
- ▷ ♥ **Inductance mutuelle**
 - ▷ schéma de fonctionnement de l'inductance mutuelle
 - ▷ décomposition du flux magnétique en deux : flux propre et flux extérieur
 - ▷ coefficient d'inductance mutuelle et propriétés générales
 - ▷ énergie magnétique stockée dans deux circuits par inductance mutuelle
- ▷ ♥ Principe de fonctionnement d'un transformateur parfait
- ▷ ♥ Notion de courant de Foucault et application

Savoir Faire

-  *Écrire la f.e.m. induite due à un phénomène d'auto-induction à l'aide de l'inductance propre ; lien avec la bobine*
-  *Calculer l'inductance propre d'un solénoïde infini*
-  **Inductance mutuelle**
 - ▷ écrire le flux magnétique des deux circuits à l'aide de l'inductance propre et mutuelle
 - ▷ écrire les f.e.m. induites dans deux circuits et en déduire les équations électriques
 - ▷ faire un bilan de puissance et d'énergie sur le système composé des deux circuits
-  *Citer des applications et le principe de fonctionnement de dispositif réel utilisant l'induction de Neumann (détecteur de métaux ; chauffage par induction ; ...)*

On s'intéresse dans ce chapitre à un façon de générer un phénomène d'induction. L'induction provient de la variation du flux magnétique à travers un circuit. Cette variation sera ici générée par un champ magnétique variable $\vec{B}(t)$: c'est l'induction de Neumann.

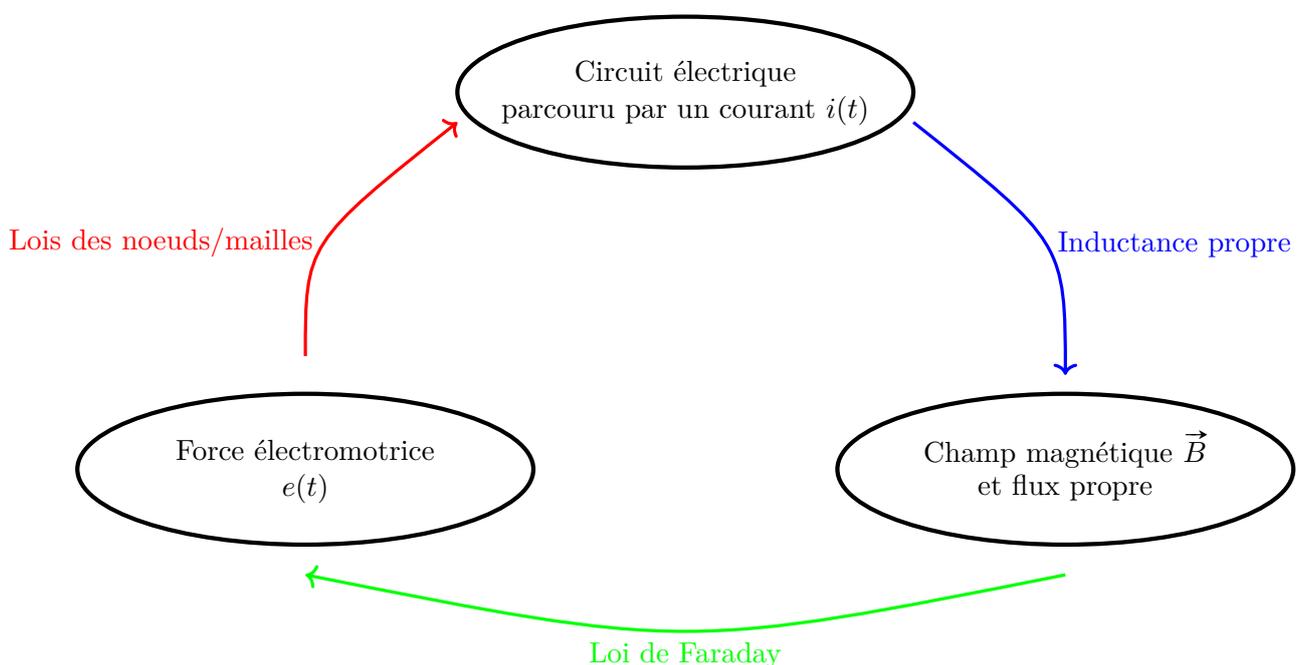
1 Phénomène d'auto-induction

L'auto-induction est un premier phénomène particulier permettant d'illustrer les lois générales présentées ci-dessus.

1.1 Flux propre et inductance propre

Schéma de l'auto-induction

Tout circuit électrique parcouru par une intensité i crée un champ magnétique \vec{B} , proportionnel à i . Ce champ magnétique possède un flux magnétique ϕ à travers le circuit. Comme le champ \vec{B} est créé par le circuit lui-même, on parle de **flux propre** que l'on note Φ_p .



► Inductance propre

- Le champ \vec{B} créé par un circuit n'est pas uniforme, il peut être difficile de calculer son flux. Néanmoins,
- ▷ le flux magnétique est proportionnel au champ \vec{B}
 - ▷ \vec{B} est proportionnel à l'intensité i .
 - ▷ le flux propre est donc lui-même proportionnel au courant i dans le circuit.

Définition. Inductance propre

On définit le coefficient d'auto-induction ou inductance propre L d'un circuit par :

$$\Phi_p = Li$$

où Φ_p est le flux magnétique du champ \vec{B} qui est créé par le courant i circulant dans le circuit. L est nommée **inductance propre** et s'exprime en Henry (H).

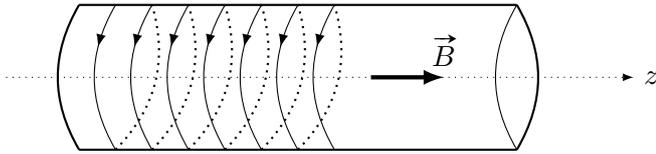
⚠⚠⚠ **Attention !** Dans l'expression précédente :

- ▷ Φ_p et i sont algébriques (positif ou négatif)
- ▷ L est positif

⚠⚠⚠ **Attention !** Il s'agit bien du flux du champ créé par le circuit lui-même. Il ne provient pas d'éventuels champs extérieurs. Ces derniers auront leur flux à eux.

► **Calcul d'une inductance : cas particulier du solénoïde infini**

Considérons une bobine infini, autrement dit un solénoïde « très très long » d'axe (Oz) de longueur l et composé de N spires de rayon R . On va chercher à calculer L .



Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde long vaut

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \frac{N}{l} i(t) \vec{e}_z$$

*** **Attention ! à savoir !!!**

On note surface S la surface d'une spire et Φ_0 le flux propre du champ \vec{B} à travers celle-ci. Comme \vec{B} est uniforme :

$$\Phi_0 = \vec{S} \cdot \vec{B} = +SB(t)$$

Comme il y a N spires, le flux propre total vaut

$$\Phi_p(t) = N\Phi_0 = NSB(t) = S\mu_0 \frac{N^2}{l} i(t)$$

L'inductance d'une bobine vaut donc

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

| **Application 1** : Estimer l'ordre de grandeur de l'inductance d'une bobine de 1000 spires utilisée en TP. Et si je double le nombre de spire ?

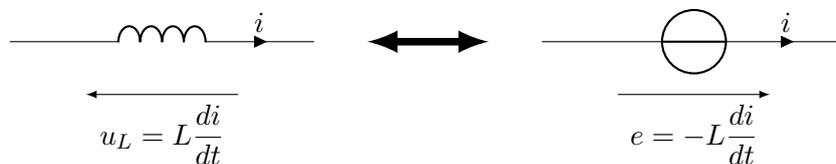
1.2 Loi de Faraday et schéma électrique équivalent pour la bobine

► **Fem de l'auto-induction**

En utilisant la loi de Faraday, il vient

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Le phénomène d'auto-induction dans une bobine est équivalent à un générateur de Thévenin de f.é.m. e . Comme e est défini en convention générateur, on a les deux circuits équivalents :



On retrouve la relation tension-courant vue en début d'année aux bornes d'une bobine.

► **Loi de Lenz**

L'apparition de la tension e est due à un phénomène d'induction : lorsque l'intensité i dans le circuit varie, le flux varie également donnant lieu à l'apparition de e .

- ▷ **Cause** : la variation de $i(t)$
- ▷ **Conséquences** : l'apparition de e/u_L
- ▷ **Loi de Lenz** : la f.é.m. induit s'oppose aux variations de i .

C'est bien ce qu'on observe : une bobine s'oppose aux variations brutales de l'intensité i qui la traverse. Cette dernière par exemple ne peut notamment pas être discontinu.

► **Approche énergétique**

On considère un générateur délivrant une tension E et une intensité $i(t)$ dans un circuit contenant une résistance r et une inductance L . On a

$$E = r i + L \frac{di}{dt} \Rightarrow E i = r i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) .$$

On a

- ▷ $\mathcal{P}_j = r i^2$ la puissance reçue par la résistance interne du circuit (dissipée par effet Joule) ;
- ▷ $\mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$ la puissance magnétique stockée par le circuit (sous l'effet du phénomène d'auto-induction) ;
- ▷ $\mathcal{P}_g = E i$ la puissance fournie par le générateur, avec

$$\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_j + \mathcal{P}_{\text{mag}}$$

Définition. Energie magnétique

C'est l'énergie stockée grâce aux phénomènes d'auto-induction par la relation

$$\mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \text{ avec } \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2$$

☛☛☛ **Attention ! Erreur à ne pas faire**

L'apparition d'une bobine dans un circuit est du à un phénomène d'induction particulier : l'auto-induction. Il faudra faire bien attention par la suite à distinguer :

- ▷ le flux créé par l'extérieur, donc du à un champ \vec{B}_{ext} créé par "on ne sait quoi"
- ▷ le flux créé par le circuit même., donc du au champ propre \vec{B}_p créé par le circuit lui même

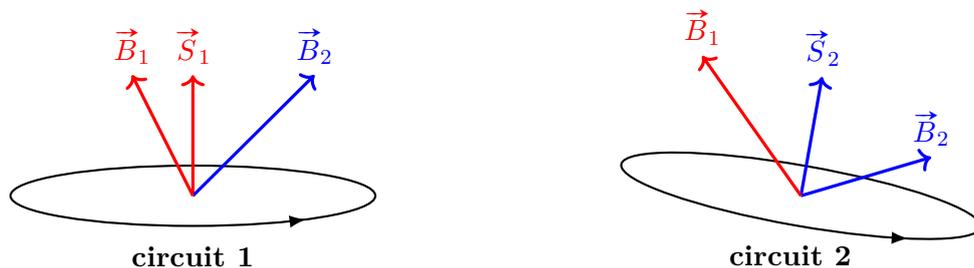
C'est uniquement ce dernier qui donne lieu à f.e.m. du type bobine !

2 Phénomène d'induction mutuelle

2.1 Principe d'inductance mutuelle, interaction entre deux circuits

► **Définition de l'inductance mutuelle**

Considérons deux circuits fixes indépendants (\sim non reliés par un fil électrique). Le circuit (1) est parcouru par un courant i_1 qui génère un champ magnétique propre \vec{B}_1 . De même, le circuit (2) est parcouru par un courant i_2 qui génère un champ magnétique propre \vec{B}_2 . Le champ magnétique totale est donc $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.



Flux magnétique :

Le flux magnétique total traversant le circuit (1) est en partie généré par \vec{B}_1 et en partie généré par \vec{B}_2

$$\Phi_1 = \Phi_{p,1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

- ▷ $\Phi_{p,1}$ est le flux propre du circuit (1) (\sim généré par \vec{B}_1). On pourrait également le noter $\Phi_{1 \rightarrow 1}$
- ▷ $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ est le flux du champ \vec{B}_2 (généré par le circuit (2)) à travers le circuit (1).

Avec les mêmes notations, le flux magnétique total traversant le circuit (2) est

$$\Phi_2 = \Phi_{p,2} + \Phi_{1 \rightarrow 2} .$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on admettra par la suite que les flux croisés sont proportionnels au courant du circuit qui génère le champ magnétique.

Définition. Inductance mutuelle

Soient deux circuits électriques (1) et (2) parcourus par des intensités i_1 et i_2 . Les flux magnétiques envoyés réciproquement l'un à travers l'autre sont donnés par :

$$\boxed{\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1} . \quad (2.1)$$

Le coefficient M est appelé l'inductance mutuelle. Il peut être négatif et s'exprime en Henry (H).

Attention ! L'intensité qui apparaît dans chaque expression est l'intensité qui crée le champ magnétique!

► **Propriétés de M**

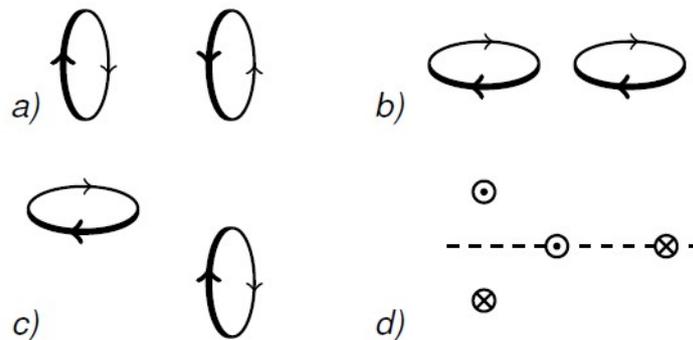
Le fait que le même coefficient de proportionnalité M apparaisse dans les deux relations n'a rien de trivial. Ce résultat constitue le théorème de Neumann (hors programme). La grandeur M quantifie le couplage entre les deux circuits. Il n'est pas à savoir calculé (sauf cas particulier suivant) mais on gardera à l'esprit les deux propriétés suivantes :

▷ **Signe de M**

M peut être positif ou négatif, **son signe dépendant des orientations relatives des deux circuits**, orientations qui doivent être soigneusement précisées.

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 > 0 \Rightarrow M > 0 ; \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 < 0 \Rightarrow M < 0 ; \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \Rightarrow M = 0$$

Exemple 1 : Orienter les circuits dans les quatre cas suivant et en déduire le signe de M, l'inductance mutuelle.



- ▷ (a) : $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 < 0 \Rightarrow M < 0$
- ▷ (b) : $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 > 0 \Rightarrow M > 0$
- ▷ (c) : $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \Rightarrow M = 0$
- ▷ (d) : $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \Rightarrow M = 0$

▷ **Couplage et distance**

M ne dépend que de la géométrie des deux circuits et de leurs positions relatives ; sa valeur absolue décroît très vite lorsqu'on éloigne les deux circuits l'un de l'autre.

► **Fem équivalente du à l'induction dans chaque circuit**

Dans ce cas, la force électromotrice dans le circuit (1) s'exprime par la loi de Faraday

$$e_1(t) = - \frac{d\Phi_1(t)}{dt}$$

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_{p,1}(t)}{dt} - \frac{d\Phi_{1\rightarrow 2}(t)}{dt}$$

$$e_1(t) = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

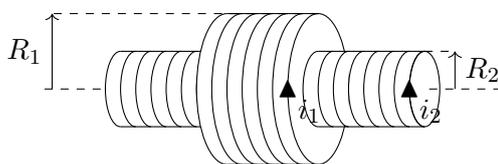
☹☹☹ **Attention !** Il faudra faire attention aux indices des courants!!!

| *Application 2* : Montrer que $e_2(t) = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt}$.

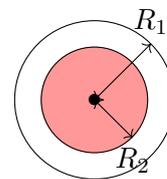
2.2 Exemple de calcul d'inductance mutuelle : cas de deux bobines

Soient (1) et (2) deux solénoïdes de même axe (Oz), de longueur respectives l_1 et l_2 avec $l_1 < l_2$, possédant respectivement N_1 et N_2 spires, de rayon d'aire R_1 et R_2 avec $R_1 > R_2$. On place le solénoïde (2) à l'intérieur du solénoïde (1).

On cherche à établir l'expression de M l'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.



(a) Situation géométrique



(b) En rouge la zone où le champ magnétique créé par la bobine 2 est présent.

Le champ créé par le solénoïde (1) dans son centre a pour expression :

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \vec{e}_z$$

Le flux de ce champ $\Phi_{1\rightarrow\text{spire } 2}$ traverse une spire du solénoïde 2, de vecteur surface $\vec{S}_2 = S_2 \vec{e}_z$. On a :

$$\Phi_{1\rightarrow\text{spire } 2} = \vec{S}_2 \cdot \vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} S_2 i_1$$

Le flux totale à travers le solénoïde (2) est : $\Phi_{1\rightarrow 2} = N_2 \Phi_{1\rightarrow\text{spire } 2}$ soit :

$$\Phi_{1\rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2 i_1 =$$

On identifie alors le coefficient d'inductance mutuelle M :

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2$$

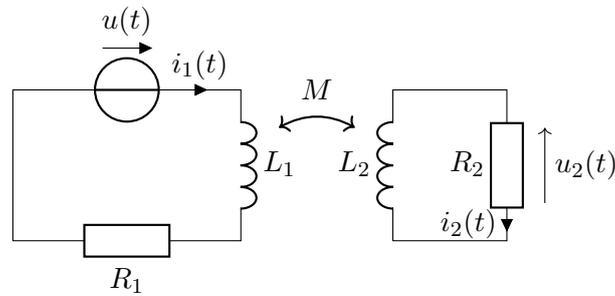
On peut alors en déduire que le flux du champ \vec{B}_2 créé par le solénoïde (2) à travers le solénoïde (1) est $\Phi_{2\rightarrow 1} = M i_2$. Cette relation est en revanche très difficile à montrer par un calcul direct.

2.3 Étude de circuit électrique couplés par inductance mutuelle

Méthode en DS. Etudier un couplage entre deux circuits

1. Faire un schéma électrique des deux circuits en faisant apparaître les f.e.m. induite
2. donner les expressions des flux magnétiques en fonction des courants ;
3. exprimer les f.e.m. à l'aide de la loi de Farady.
4. à l'aide de la loi des mailles, donner les équations électriques

Étudions le dispositif composé de deux circuits 1 et 2 présentant un couplage par induction. On appelle M le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux bobines, L_1 et L_2 les coefficients d'inductance propre des circuits 1 et 2, R_1 et R_2 leurs résistances.



On alimente le circuit 1 par un générateur de tension, délivrant une f.e.m. $u(t)$.

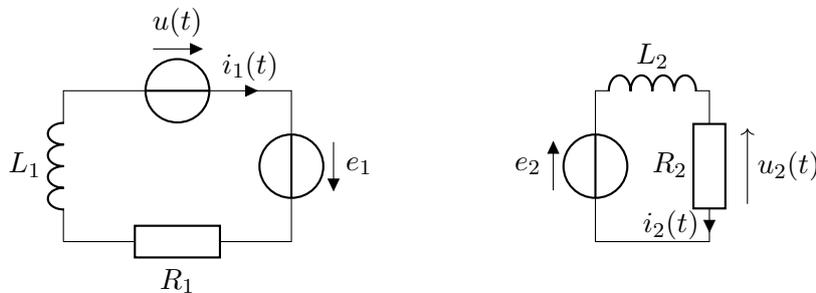
► **Schéma électrique du système**

Méthode en DS. Bobine ou fem induite ?

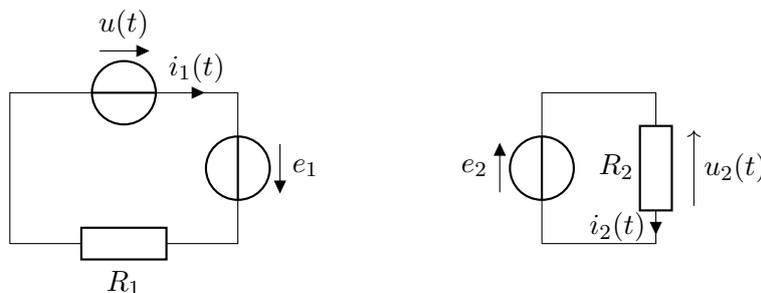
⚠⚠⚠ **Attention !** à ne pas se mélanger les pinceaux entre f.e.m. induite et bobine ! Il vaut mieux ne pas représenter les bobines et les compter dans les f.e.m. induite.

Dans le cas ci-dessous, on risque de compter en double l'induction propre :

- ▷ dans les bobine L
- ▷ dans la f.e.m. induite $e(t)$



On obtient alors deux circuits électriques à une maille à étudier.



► **Expression des flux magnétiques et loi de Faraday**

Chaque flux magnétique traversant un circuit se décompose en deux termes :

$$\text{Flux totale} = \text{Flux propre} + \text{Flux extérieur}$$

Le premier est créé par le circuit, le second par les autres circuits.

Pour le circuit 1 :

$$\Phi_1(t) = \Phi_{p,1}(t) + \Phi_{1 \rightarrow 2}(t)$$

- ▷ $\Phi_{p,1}(t)$: le flux propre du circuit 1, son expression fait apparaître i_1 l'intensité dans le circuit 1 et l'inductance propre L_1 du circuit 1 : $\Phi_{p,1}(t) = L_1 i_1(t)$

▷ $\Phi_{p,1}(t)$: le flux créé par le circuit 2 dans le circuit 1. Son expression fait apparaître i_2 l'intensité dans le circuit 2 qui crée le champ et l'inductance mutuel M entre les deux circuits 1 : $\Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M i_2(t)$

Finalement :

$$\Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$$

| **Application 3** : Exprimer le flux total $\Phi(t)$ dans le circuit 2.

La loi de Faraday stipule :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt}$$

$$e_1(t) = -\left(L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}\right)$$

► Équations électriques

Équation électrique du circuit 1

Commençons par écrire les deux équations électriques à l'aide du schéma électrique équivalent. Dans le circuit (1), la loi des mailles s'écrit

$$u(t) + e_1(t) = R_1 i_1(t) .$$

$$u(t) - \frac{d\Phi_1(t)}{dt} = R_1 i_1(t)$$

De même dans le le circuit (2), on a

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = R_2 i_2(t) .$$

On a noté $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les f.é.m. induite dans les circuits.

🔴🔴🔴 **Attention !** Convention générateur !! Finalement on a :

$$u(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} .$$

| **Application 4** : En utilisant la deuxième équation électrique, montrer en le justifiant que

$$0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} .$$

► Bilan énergétique

Méthode en DS. Equation de puissance/Bilan énergétique

- ▷ Pour obtenir un bilan énergétique, ou bilan de puissance, on multiplie la lois des maille par le courant qui la traverse.
- ▷ Pour obtenir un bilan de puissance sur un système composé de deux circuits, on somme les bilans de puissance de chaque circuit.

Faisons un bilan énergétique sur le système électrique de la partie précédente.

$$u(t)i_1(t) = R_1 i_1^2(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} i_1(t) + M \frac{di_2(t)}{dt} i_1(t) ,$$

et

$$0 = R_2 i_2^2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} i_2(t) + M \frac{di_1(t)}{dt} i_2(t) .$$

Pour obtenir un bilan de puissance sur les deux circuits, on somme les deux lois des mailles :

$$u(t)i_1(t) = R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} i_1(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} i_2(t) + M \left(\frac{di_2(t)}{dt} i_1(t) + \frac{di_1(t)}{dt} i_2(t) \right) ,$$

Instant math :

$$\frac{di_2(t)}{dt} i_1(t) + \frac{di_1(t)}{dt} i_2(t) = \frac{d}{dt} i_1(t) i_2(t)$$

On a

▷ la puissance dissipée par effet Joule ;

$$\mathcal{P}_j = R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)$$

▷ la puissance fournie par le générateur

$$\mathcal{P}_g = u(t) i_1(t)$$

▷ la puissance magnétique stockée dans les deux circuits ;

$$\mathcal{P}_{\text{mag}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1(t) i_2(t) \right)$$

Définition. Dans le cas de circuits électriques couplés par inductance mutuelle, l'énergie magnétique stockée dans les deux circuits vaut

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_2^2 + \frac{1}{2} L_2 i_1^2 + M i_1 i_2, \quad (2.2)$$

où le terme

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{couplage}} = M i_1 i_2} \quad (2.3)$$

représente l'**énergie de couplage magnétique** entre les circuits.

► En Régime Sinusoïdale Forcé

Le générateur $u(t)$ délivre désormais une tension sinusoïdale de pulsation ω : $u(t) = U_0 \cos \omega t$.
pulsation ω : $u(t) = U_0 \cos \omega t$.

On cherche l'impédance électrique équivalente \underline{Z}_1 du premier circuit.

Passage en RSF

Plaçons nous en RSF et adoptons une représentation complexe des signaux :

$$u(t) \rightarrow \underline{u}(t) = U_0 e^{j\omega t} ; u_1(t) \rightarrow \underline{u}_1(t) ; i_1(t) \rightarrow \underline{i}_1(t) ; \dots$$

Il vient à partir de la première équation électrique

$$\underline{u} = R_1 \underline{i}_1 + j\omega L_1 \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2 .$$

On veut écrire $\underline{u} = \underline{Z}_1 \underline{i}_1$. Pour cela, il faut exprimer \underline{i}_2 en fonction de \underline{u} et \underline{i}_1 .

Application 5 : En utilisant la deuxième équation électrique, montrer en le justifiant que

$$0 = R_2 \underline{i}_2 + j\omega L_2 \underline{i}_2 + j\omega M \underline{i}_1 .$$

On a : $\underline{i}_2 = \frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \underline{i}_1$

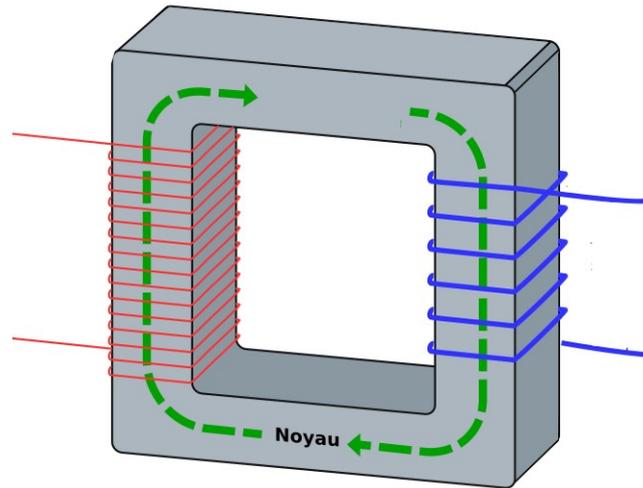
On a donc :

$$\underline{u} = \underbrace{\left(R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega} \right)}_{\underline{Z}_1} \underline{i}_1$$

3 Applications

3.1 Le transformateur

► Description du transformateur



Un transformateur est constituée par deux bobinages (primaire et secondaire) enroulés autour d'un tore de matériau ferromagnétique. Ce bobinage est caractérisé par son rapport m du nombre de spire en sortie (\sim secondaire) sur le nombre N_1 de spire en entrée (\sim primaire) :

$$m = \frac{N_2}{N_1}$$

Conservation du flux magnétique

Le noyau de ferromagnétique permet de canaliser les lignes de champ. Dans le cas du transformateur idéal, le couplage est parfait : le flux magnétique à travers une spire du secondaire est entièrement canalisé dans le tore. On retrouve donc le même flux au niveau du bobinage primaire.

Représentation électrique d'un transformateur



Pour utiliser un transformateur, on met une source de tension variable au niveau du primaire. L'intensité i_1 parcourant les boucles de courant crée un champ magnétique variable. Ce champ magnétique induit un courant au niveau du secondaire.

► La loi des tensions

Soit $\Phi(t)$ le flux du champ magnétique (existant dans le noyau le fer) à travers une boucle de courant du bobinage secondaire. Par la loi de Farady, on a :

$$e_2(t) = -u_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Le transformateur étant idéal, on retrouve le même flux au niveau du bobinage primaire. On a donc :

$$e_1(t) = -u_1(t) = -N_1 \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Propriété. Loi des tensions d'un transformateur idéal

Dans un transformateur idéal, les tensions au primaire et au secondaire sont liées par la relation

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

où m se nomme le **rappor**t de transformation. Un transformateur permet de diminuer ou d'augmenter la tension.

Si le transformateur est idéal, il transfère la totalité de la puissance électrique, ainsi :

$$\mathcal{P}_{\text{primaire}} = \mathcal{P}_{\text{secondaire}}$$

Soit :

$$u_1(t)i_1(t) = u_2(t)i_2(t) \implies \frac{i_2(t)}{i_1(t)} = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{1}{m}$$

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Cette propriété est définie pour un champ variable, et ces relations ne sont donc pas valides pour des tensions constantes.

Propriété. Transformateur idéal

Dans un transformateur idéal, la totalité de la puissance électrique du primaire est transmise au secondaire :

$$u_2 i_2 = u_1 i_1.$$

- ▷ si $m > 1$ on augmente la tension $u_2 > u_1$ mais on diminue l'intensité $i_2 < i_1$
- ▷ si $m < 1$ c'est l'inverse

Il existe de nombreuses utilisations aux transformateurs comme...

- ▷ le transport de l'énergie à très haute tension (400 000 V) puis retour aux hautes tensions (40 000 V) et aux tensions du secteur (230 V) ;
- ▷ la conversion de la tension du secteur en basse tension (12 ou 24 V) : chargeurs de téléphones ou d'appareillage électronique ;
- ▷ le transformateur d'isolement (rapport $m = 1$). Il permet d'isoler le primaire et le secondaire (découplage des masses, transfert d'énergie électrique sans fil).

3.2 Divers

► RFID

La radio-identification, le plus souvent désignée par le sigle RFID (de l'anglais Radio Frequency IDentification), est une méthode pour mémoriser et récupérer des données à distance en utilisant des marqueurs appelés "radio-étiquettes".

Les radio-étiquettes sont de petits objets, tels que des étiquettes autoadhésives, qui peuvent être collés ou incorporés dans des objets et même implantés dans des organismes vivants (animaux, corps humain).

Lorsque l'étiquette passe près d'un lecteur, qui est un système actif fournissant un champ magnétique, un courant circule dans le circuit et permet d'alimenter une petite antenne qui peut alors envoyer l'information contenue dans la puce.

Utilisation de la puce RFID : Antivols, forfaits de ski, badges de télépéage...

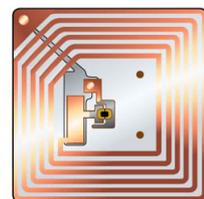


Fig. 2 – Une puce RFID

► Courant de Foucault**Définition. Courants de Foucault**

Courants électriques créés dans une masse conductrice

- ▷ soit par la variation au cours du temps d'un champ magnétique extérieur traversant ce milieu (le flux du champ à travers le milieu)
- ▷ soit par un déplacement de cette masse dans un champ magnétique constant.

Ils sont une conséquence de l'induction électromagnétique.

⚠️⚠️⚠️ **Attention !** Les courants de Foucault apparaissent dans des conducteur volumique, pas des fils!

Les courants de Foucault sont responsables d'une partie des pertes dans les transformateurs, au niveau du tore ferromagnétique, ou dans les électro-aimants. C'est la raison pour laquelle ces circuits magnétiques sont feuilletés : on cherche à limiter ces courants pour éviter trop de pertes par effet Joule .

Ils n'ont pas que des inconvénients puisqu'ils ont des applications concrètes. L'énergie dissipée par les courants de Foucault est transformée en transfert thermique qui peut permettre le chauffage : c'est le principe des plaques à induction.

► **Les détecteurs de métaux :**

Une bobine crée un champ magnétique et, si un morceau de métal se trouve à proximité, il se crée en son sein un courant. Ce courant crée lui-même un champ magnétique détecté via la f.é.m qui apparaît dans la bobine du détecteur.

► **Le rechargement par induction :**

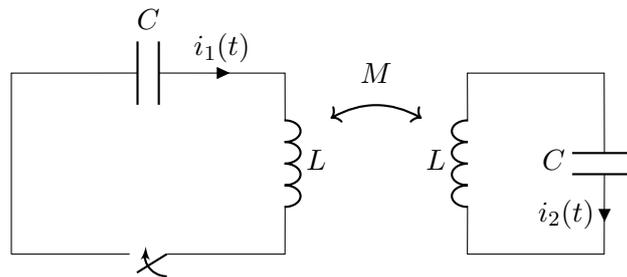
Pour les brosses à dent, ou plus récemment les téléphones portables, on peut transmettre sans contact l'énergie électrique d'un générateur vers le système à recharger.



Circuit LC couplés

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

On considère deux circuits LC identiques couplés via des bobines avec un coefficient d'inductance mutuelle M . On note L les inductances et C les capacités. Le condensateur du circuit de gauche est initialement chargé avec une charge q_0 , celui de droite est initialement déchargé. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur du circuit de droite et on laisse les deux circuits évolués librement.



1. Rappeler le lien entre tension électrique u et charge q sur les armatures d'un condensateur.
2. Montrer que les deux équations différentielles couplées sur les charge q_1 et q_2 sont :

$$\ddot{q}_1 + K\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{q}_2 + K\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0$$

où on a posé $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $K = M/L$.

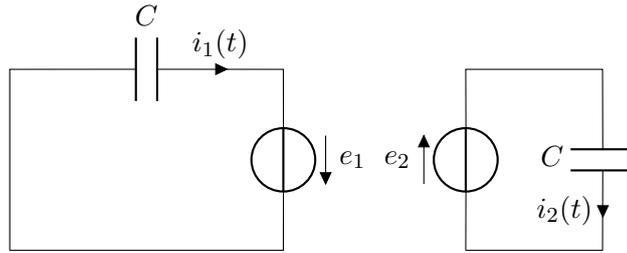
3. En posant $S = q_1 + q_2$ et $A = q_1 - q_2$, établir les équations différentielles sur les variables A et S . On introduira les pulsations propres ω_A et ω_S qu'on exprimera à l'aide de ω_0 et K .
4. Les deux équations différentielles trouvées sont-elles couplées? Résoudre et donner les expressions de A et S .
5. En déduire les expressions de q_1 et q_2 au cours du temps. On les écrira sous la forme de produit de fonctions sinusoïdales.



Circuit LC couplés

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

- $q = Cu_C$ **Remarque** : on dérive et on retrouve $\frac{dq}{dt} = i(t)$ donc $i(t) = C \frac{du}{dt}$.
- On représente les f.e.m. induite :



- ▷ On note u_1 et u_2 les tensions aux bornes des C dans les circuits 1 et 2. On a $u_1 = e_1(t)$ et $e_2(t) = u_2$.
 ▷ Loi de Faraday $e_1 = -L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ et $e_2 = -L \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$.

$$-L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = Cq_1 \quad \text{et} \quad -L \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = Cq_2$$

Avec $i = \frac{dq}{dt}$ on trouve : $Cq_1 + M\ddot{q}_2 + L\dot{q}_1 = 0$ et $Cq_2 + L\ddot{q}_2 + M\dot{q}_1 = 0$

$$\ddot{q}_1 + K\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{q}_2 + K\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0$$

avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $K = M/L$.

- Astuce** : on veut trouver la somme $q_1 + q_2$ et la différence $q_1 - q_2 \Rightarrow$ on prend la somme et la différence des deux équations trouvées précédemment

$$\text{Somme : } \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + K\ddot{q}_2 + K\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_2 = 0 \Rightarrow \ddot{S} + K\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0$$

$$\text{Différence : } \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 + K\ddot{q}_2 - K\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 - \omega_0^2 q_2 = 0 \Rightarrow \ddot{A} - K\ddot{A} + \omega_0^2 A = 0$$

On trouve alors $\omega_S = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+K}}$ et $\omega_A = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-K}}$

- Elles ne sont plus couplés : il n'y a plus de A dans l'équation de S et vice-versa. On peut alors résoudre avec : solution particulière + solution homogène.

$$S(t) = b_1 \cos \omega_S t + b_2 \sin \omega_S t \quad \text{et} \quad A(t) = a_1 \cos \omega_A t + a_2 \sin \omega_A t$$

CI 🚫🚫🚫 **Attention !** on a représenté des f.e.m. mais on n'oublie pas que y a des bobines!!!

Tension continue aux bornes d'un condensateur et intensité continue dans une bobine. On a alors :

▷ $q_1(0) = q_0$ et $\dot{q}_1(0) = i_1(0) = 0$

▷ $q_2(0) = 0$ et $\dot{q}_2(0) = i_2(0) = 0$

Donc $S(0) = q_0 + 0$; $S'(0) = 0$ et $A(0) = q_0$; $A'(0) = 0$

On a alors :

$$S(t) = q_0 \cos \omega_S t \quad \text{et} \quad A(t) = q_0 \cos \omega_A t$$

5. On a : $q_1 = (A + S)/2$ et $q_2 = (A - S)/2$:

$$q_1 = q_0 (\cos \omega_A t + \cos \omega_S t) \quad \text{et} \quad q_2 = q_0 (\cos \omega_A t - \cos \omega_S t)$$

Rappel : $\heartsuit \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ et $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \heartsuit$

Finalement :

$$q_1 = q_0 \cos \frac{\omega_A + \omega_S}{2} t \cos \frac{\omega_A - \omega_S}{2} t \quad \text{et} \quad q_2 = -q_0 \sin \frac{\omega_A + \omega_S}{2} t \sin \frac{\omega_A - \omega_S}{2} t$$

1 Notion d'inductance propre et mutuelle

Exercice 1 - Comparaison entre induction par un champ extérieur et auto-induction dans une spire :

Lorsque l'on considère une spire unique plongé dans un champ extérieur, on peut généralement négliger la f.e.m. induite devant celle qui est due à un champ "extérieur" Nous allons vérifier ça ici.

On considère ici une spire circulaire de rayon $R = 5 \text{ cm}$ et de résistance interne $r = 1 \Omega$. Le champ « extérieur » variable est uniforme, orthogonal au plan de la spire, sinusoïdal de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et d'amplitude $B_0 = 50 \text{ mT}$.

1. Calculer l'amplitude de la fem induite dans la bobine du fait du champ extérieur.
2. En déduire, en négligeant l'auto-induction, l'amplitude du courant induit.
3. Expliquer pourquoi, en négligeant l'auto-induction, on sur-estime le courant induit.
4. L'expression de l'inductance propre d'une spire est délicate à établir car le champ n'est pas uniforme à l'intérieur de la spire.

On donne l'expression $L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} - 2 \right)$, avec a le diamètre d'un fil.

Calculer L pour cette spire, avec $a = 0,1 \text{ mm}$.

5. Calculer la nouvelle amplitude du courant en prenant en compte les phénomènes d'auto-induction. Conclure.

Exercice 2 - Préparation au TP : mesure du coefficient d'inductance mutuelle :

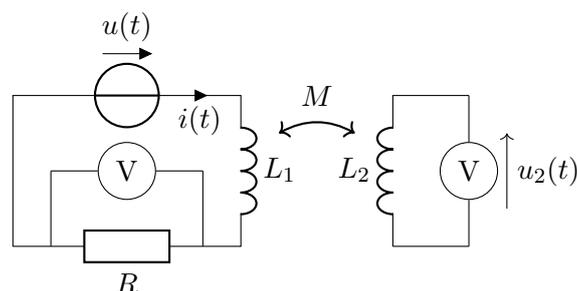
Concernant les voltmètres ...

Un voltmètre permet de mesurer :

- ▷ la tension continue (\sim stationnaire) aux bornes d'un dipôle
- ▷ la valeur moyenne, ou valeur efficace, d'une tension sinusoïdale : $\tilde{U} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$, où U_0 est l'amplitude du signal.

Pour fonctionner de façon optimal, un voltmètre idéal possède une résistance interne R_{int} infinie : $R_{int} = +\infty$.

Afin de mesurer le coefficient d'inductance mutuelle entre deux bobines, on réalise le montage ci-dessous où la première bobine est reliée en série avec un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω et avec une résistance. Deux voltmètres permettent de mesurer les tensions aux bornes de la résistance et de la deuxième bobine. Les deux bobines sont face à face et en interaction totale.



1. Les voltmètres étant supposés idéaux, c'est-à-dire de résistance infini, déterminer l'intensité du courant circulant dans la deuxième bobine.
2. Exprimer la tension $u_2(t)$ aux bornes de la deuxième bobine en fonction de M et de $i(t)$, intensité du courant circulant dans la première bobine.
3. Soit $u_1(t) = Ri(t)$ la tension aux bornes de la résistance. Exprimer $u_2(t)$ en fonction de M , R et $u_1(t)$ et en déduire l'expression de M en fonction de R , ω , U_1 et U_2 où U_1 et U_2 sont les valeurs mesurées par les voltmètres.
4. Application numérique : Calculer M avec $U_1 = 3\text{ V}$, $\omega = 4\pi \times 10^4\text{ rad/s}$, $R = 100\ \Omega$ et $U_2 = 5\text{ V}$.

Exercice 3 - Etude d'un couplage par induction mutuelle en Régime sinusoïdale forcé :

Soit S_1 un circuit de résistance R_1 et d'inductance propre L_1 , alimenté par un générateur délivrant des signaux sinusoïdaux de pulsation ω . On branche en série dans S_1 un condensateur de capacité C . On approche de S_1 un second circuit fermé S_2 , de résistance R_2 et d'inductance propre L_2 qui n'est pas alimenté. On note M l'inductance mutuelle de S_1 et S_2 .

1. Expliquer pourquoi un courant circule dans S_2 . Lequel des deux circuits appelle-t-on circuit inducteur ? Comment s'appelle alors l'autre circuit ? Quelle grandeur physique permet de coupler les deux circuits ?
2. En notant $u_G(t)$ la tension délivrée par le générateur, déterminer les équations différentielles régissant l'évolution des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ circulant dans S_1 et S_2 .
3. En déduire les équations reliant les grandeurs complexes $\underline{i}_1(t)$ et $\underline{i}_2(t)$ associées aux courants. Quelle nouvelle grandeur, homogène à une impédance, apparaît dans ces calculs ?
4. Déterminer le rapport I_2/I_1 des amplitudes de $i_1(t)$ et $i_2(t)$, ainsi que le déphasage ϕ entre ces courants.

Exercice

Exercice 4 - Détection par boucle inductive :

Cet exercice a pour objectif d'approfondir le principe de la détection d'une voiture, en la couplant par inductance mutuelle à un circuit oscillant au sein duquel circule un courant sinusoïdal.

Soit S_1 le circuit détecteur, modélisé par un générateur délivrant une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω , un condensateur de capacité C et un bobinage de résistance R_1 et d'inductance propre L_1 . Soit S_2 la partie inférieure de la carcasse métallique d'une voiture, que l'on modélise par un circuit fermé de résistance R_2 et d'inductance propre L_2 . Lorsque la voiture s'approche du détecteur, des courants de Foucault apparaissent dans la carcasse de la voiture et S_1 et S_2 se couplent par induction ; on note alors M leur coefficient d'induction mutuelle.

1. Exprimer les deux équations électriques des circuits en RSF.
2. Pour quelle fréquences peut-on négliger les résistances R_1 et R_2 ?
Nous supposons cette condition réalisée dans la suite.
3. Soient $u_1(t)$ la tension aux bornes du bobinage de S_1 et $i_1(t)$ le courant qui le traverse. Montrer que ces deux grandeurs sont liées par une relation du type :

$$u_1(t) = L_1(1 - K) \frac{di_1(t)}{dt}$$

4. On parle de couplage total lorsque $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Que se passe-t-il alors dans le circuit S_1 étudié.
5. Montrer que dans le circuit 1 tout se passe comme si il n'y avait pas de couplage et que l'inductance propre de ce dernier était égale à une inductance équivalente L_{eq} qu'on exprimera en fonction des données du problème.
6. Exprimer la pulsation de résonance ω_{max} de l'intensité dans le circuit 1.
7. Exprimer la pulsation de résonance dans le circuit 1 lorsqu'il n'y a pas de voiture au dessus du détecteur. En déduire la variation relative de fréquence propre du circuit S_1 .

8. Expliquer comment fonctionne un détecteur de voiture, ou n'importe quel système de détecteur de métaux.

Exercice 5 - Chauffage par induction :

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être réalisé directement au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même, située au fond de la casserole. L'inducteur, de rayon 5 cm, possède 20 spires de cuivre de résistance $R_1 = 1.8 \times 10^{-2} \Omega$ et d'auto-inductance L_1 . La plaque de résistance $R_2 = 8.3 \text{ m}\Omega$ et d'auto-inductance $L_2 = 0.24 \mu\text{H}$, nommée induit, est assimilable à une spire refermée sur elle-même. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$. La mutuelle est estimée à $M = 2 \mu\text{H}$

- L'inducteur est alimenté en l'absence de circuit induit par une tension sinusoïdale, d'amplitude 24 V, à la fréquence de 25 kHz. Il est alors traversé par un courant d'amplitude égale à 5,1 A.
Exprimer littéralement son auto-inductance L_1 puis en donner la valeur numérique.
- Montrer que $L_1\omega \gg R_1$ et $L_2\omega \gg R_2$.
- Écrire les équations électriques relatives aux deux circuits.
- En déduire l'expression de i_2/i_1 ainsi que la valeur de $|i_2/i_1|$.
- Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W (en moyenne). Quelle est alors l'amplitude du courant maximal admissible dans l'inducteur ?
En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité efficace du courant dans la plaque et la puissance (moyenne) de chauffe développée dans celle-ci.

Exercice 6 - Induction au sein d'une spire plongée dans un champ tournant :

Au voisinage du centre O d'un repère direct (O, x, y, z) dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, règne un champ $\vec{B}(t)$ localement uniforme, normal à (Oz), et tournant à la vitesse angulaire ω de 3000 tours par minutes dans le plan horizontal (Oxy). Une bobine plate immobile d'axe (Ox) formée de N spires circulaires de rayon a , est plongée dans ce champ. On note L son inductance propre. Elle est électriquement fermée sur une résistance R très supérieure à sa propre résistance. On désire calculer le courant induit $i(t)$ dans cette spire.

- Expliquer les phénomènes physiques mis en jeu et justifier l'apparition d'un courant dans la bobine.
- Une grosse bobine possède une inductance typique de 10mH. Pour quelle valeur typique de résistance peut-on négliger le phénomène d'auto-induction dans une spire ?
- Calculer $i(t)$ en supposant l'auto-induction négligeable et commenter.

Problème

Exercice 7 - Circuits LC couplés :

On considère deux circuits LC identiques couplés via un coefficient d'induction mutuelle M . On note L et C les inductances et capacités. Le condensateur du circuit 1 est initialement chargé avec une charge q_0 et celui du circuit 2 est déchargé.

À $t = 0$ on ferme le circuit 1 et on observe l'évolution de la charge des condensateurs au cours du temps.

Questions de cours

- Rappeler la relation entre la charge q d'un condensateur et la tension à ses bornes u_C .
- Rappeler les propriétés de continuités des grandeurs électriques pour une bobine et un condensateur.
- En déduire les expressions de q_1 et q_2 et de leurs dérivées à $t = 0$.

Oscillations libres

4. Etablir les deux équations différentielles couplées sur les charges q_1 et q_2 des deux condensateurs. On introduira les coefficients :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad K = \frac{M}{L}$$

5. En posant $S = q_1 + q_2$ et $A = q_1 - q_2$, établir les équations différentielles sur les nouvelles variables A et S . Ces équations sont-elles couplées ?

On définira deux nouvelles pulsations caractéristiques ω_A et ω_S .

6. Donner les expression au cours du temps de A et S .
7. En déduire les expression de q_1 et q_2 . On les présentera sous la forme d'un produit de fonctions sinusoidales.
8. Dans la majorité des cas, le couplage entre deux circuits est faible $M \ll L$. Dans ce cas simplifier l'expression des pulsations ω_A et ω_S , puis des expressions de q_1 et q_2 .
9. Tracer l'allure de l'évolution des charges q_1 et q_2 au cours du temps. Quel phénomène, déjà rencontré lors de l'étude d'interférences, observe-t-on ici ?

Oscillations forcées

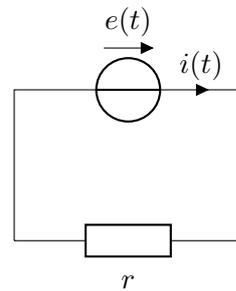
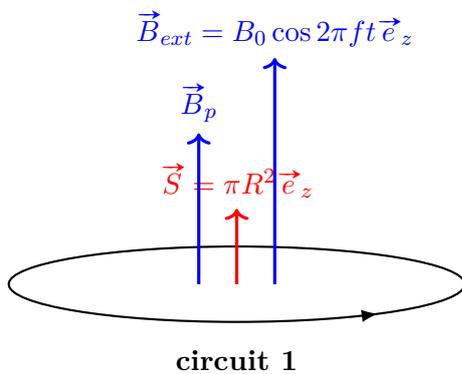
On ajoute dans le circuit 1 un générateur de tension sinusoidale de la forme $E(t) = E_0 \cos \omega t$. On ne se préoccupe plus du régime transitoire.

10. Comment sont modifiées les équations différentielles couplées sur q_1 et q_2 ?
11. En se plaçant en RSF, donner l'expression des amplitudes complexes associées à q_1 et q_2 .
12. Exprimer les racines des dénominateurs en fonction de ω_A et ω_S .
Astuce : on posera $X = \omega^2$.
13. Tracer (on utilisera sa calculette graphique) l'allure des amplitudes réelles de q_1 et q_2 en fonction de la pulsation d'excitation du système.
14. En pratique, pourquoi la quantité de charge d'un condensateur ne tend pas vers l'infini ?

1 Notion d'inductance propre et mutuelle

Exercice 1 - Comparaison entre induction par un champ extérieur et auto-induction dans une spire :

☛☛☛ **Attention !** On prend le temps de faire une "double" représentation du circuit pour bien comprendre ce qui se passe !!



☛☛☛ **Attention !** la f.e.m. induite est due au flux extérieur et au flux propre !!

1. On calcule la partie due au flux extérieur avec la loi de Faraday :

$$e_{ext} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} = B_0 \pi R^2 2\pi f \sin 2\pi ft$$

L'amplitude est donc $2\pi B_0 \pi R^2 f$.

2. On se limite ici au flux extérieur $\phi = \phi_p + \phi_{ext} \simeq \phi_{ext}$

Par la loi des mailles on a alors $i(t) = e(t)/r = \frac{B_0 \pi R^2 2\pi f}{r} \sin 2\pi ft$.

3. ☛☛☛ **Attention !** Appliquer la loi de Lenz n'est pas si facile. il faut bien découper en 3 :

▷ **Causes** : champ \vec{B} extérieur/courant i dans la spire

▷ **Conséquences** : champ \vec{B}_p propre/courant électrique induit

▷ **Lenz** : le courant électrique induit s'oppose au courant i qui lui a donné naissance, donc i est plus faible si on prend en compte l'auto-induction.

4. Avec ces valeurs on trouve $L \simeq 4,0 \cdot 10^{-7} \text{H}$.

5. On prend désormais en compte les phénomènes d'auto-induction :

$$\phi = \phi_p + \phi_{ext} = Li + B_0 \pi R^2 \cos 2\pi ft \Rightarrow e(t) = -L \frac{di}{dt} + B_0 \pi R^2 2\pi f \sin 2\pi ft$$

Avec la loi des mailles on a : $-L \frac{di}{dt} + B_0 \pi R^2 2\pi f \sin 2\pi ft = ri$.

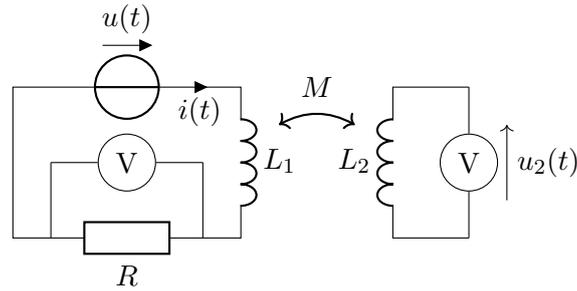
On passe au complexe et on trouve rapidement l'amplitude complexe \underline{I}_0 du courant :

$$\underline{I}_0 = \frac{B_0 \pi R^2 2\pi f}{r + j2\pi fL} \text{ soit une amplitude réelle } I_0 = \frac{B_0 \pi R^2 2\pi f}{\sqrt{r^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}}$$

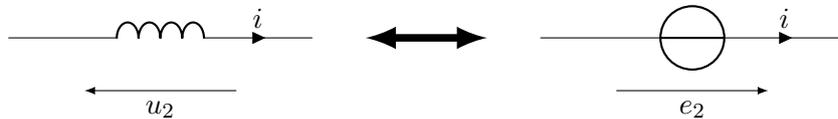
On peut alors comparer $r^2 = 1\Omega^2$ et $4\pi^2 f^2 L^2 \simeq 5 \cdot 10^{-9} \Omega^2$: l'auto-induction est bien négligeable.

Exercice 2 - Préparation au TP : mesure du coefficient d'inductance mutuelle :

☛☛☛ **Attention !** Ici, pas de flux à calculer à la main ou de mécanique à faire : une représentation électrique des circuits "suffi" !



1. La deuxième bobine est branchée en boucle ouverte (\sim résistance infinie) : le courant est donc nul $i_2 = 0$.
2. ☛☛☛ **Attention !** à ne pas confondre : une bobine est une "autre" représentation de la f.e.m. induite de Faraday



On fera attention au changement de signe $u_2 = -e_2$.

On calcule le flux dans la bobine 2 : $\phi_2 = \phi_{p,2} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i = M i$. Avec la loi de Faraday :

$$u_2 = -e_2 = + \frac{d\phi_2}{dt} = M \frac{di}{dt}$$

3. On a facilement $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du_1}{dt}$ donc $u_2 = \frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}$.

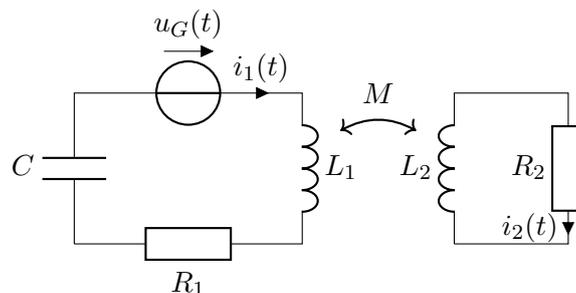
En passant en amplitude (complexe puis réelle) on trouve :

$$\underline{U}_2 = \frac{M}{R} j\omega \underline{U}_1 \text{ donc } U_{2,0} = \frac{M}{R} \omega U_{1,0}$$

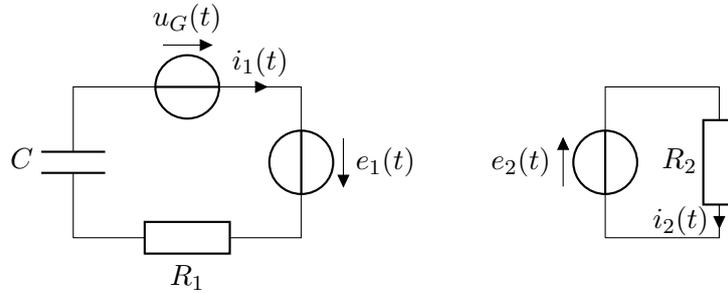
La mesure de la tension efficace fait apparaître un $\sqrt{2}$ de chaque coté : on trouve la même relation avec les tensions efficaces

$$U_2 = \frac{M}{R} \omega U_1 \Rightarrow M = \frac{U_2 R}{U_1 \omega}$$

Exercice 3 - Etude d'un couplage par induction mutuelle en Régime sinusoïdale forcé :



On préfère alors représenter les deux circuits avec les f.e.m. de Faraday. Dans cette représentation le inductances "disparaissent" ainsi que les inductances mutuelles.



1. Avec la représentation des f.e.m. on comprend facilement pourquoi un courant i_2 circule : il y a un générateur (induit pas l'induction). On peut dans ce cas appeler le circuit 1 le circuit inducteur (qui est à l'origine du phénomène d'induction via u_G) et le circuit 2 le circuit induit.

Ce couplage entre les deux circuits est possible grâce au coefficient d'induction mutuel M .

2. On applique deux lois de Faraday pour trouver e_1 et e_2 :

$$\phi_1 = \phi_{p,1} + \phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M i_2 \Rightarrow e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$\phi_2 = \phi_{p,2} + \phi_{1 \rightarrow 2} = L_2 i_2 + M i_1 \Rightarrow e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

Avec deux lois des mailles on a :

$$u_G - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + u_C \quad \text{et} \quad -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$$

On dérive la première pour obtenir :

$$\frac{du_G}{dt} - L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - M \frac{d^2 i_2}{dt^2} = R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} \quad \text{et} \quad -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$$

3. On passe à une représentation complexe des signaux : $u_G \rightarrow U_0 e^{j\omega t}$, $i_1(t) \rightarrow \underline{i_1} e^{j\omega t}$ et $i_2(t) \rightarrow \underline{i_2} e^{j\omega t}$.

Avec les équations précédentes on trouve :

$$j\omega U_0 + L_1 \omega^2 \underline{i_1} + M \omega^2 \underline{i_2} = R_1 j\omega \underline{i_1} + \frac{\underline{i_1}}{C} \quad \text{et} \quad -L_2 j\omega \underline{i_2} - M j\omega \underline{i_1} = R_2 \underline{i_2}$$

4. **Rappel** pour avoir le rapport d'amplitude et le déphasage entre deux signaux X_1 et X_2 on calcule le rapport des amplitudes complexes et :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{|X_1|}{|X_2|} \quad \text{et} \quad \phi = \arg\left(\frac{X_1}{X_2}\right)$$

Avec l'équation du circuit 2 on a :

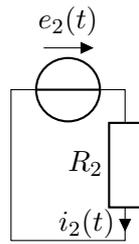
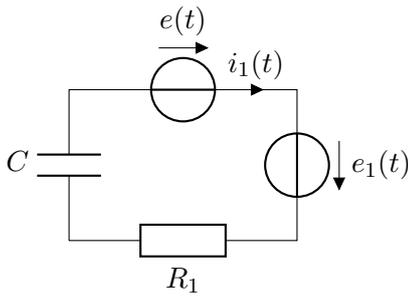
$$(jL_2\omega + R_2) \underline{i_2} = -M j\omega \underline{i_1} \Rightarrow \frac{\underline{i_2}}{\underline{i_1}} = \frac{-M j\omega}{jL_2\omega + R_2}$$

Finalement $\frac{I_2}{I_1} = \frac{|M|\omega}{\sqrt{L_2^2\omega^2 + R_2^2}}$ et $\phi = \arg(i_1/i_2) = \arg(-j\omega M) - \arg(jL_2\omega + R_2) = \pm\pi/2 - \arctan(L_2\omega/R_2)$.

*** **Attention !** M est algébrique!!!

Exercice

Exercice 4 - Détection par boucle inductive :



avec :

$$\begin{aligned} \triangleright e_1(t) &= -L_1 i_1'(t) - M i_2'(t) \\ \triangleright e_2(t) &= -L_2 i_2'(t) - M i_1'(t). \end{aligned}$$

1. On passe en RSf et on adopte une représentation complexe des signaux : $e(t) \rightarrow \underline{e} = e_0 e^{j\omega t}$, $i_1(t) \rightarrow \underline{i}_1 = I_1 e^{j\omega t}$, ...

On a alors :

$$\underline{e} - j\omega L_1 \underline{i}_1 - j\omega M \underline{i}_2 = R_1 \underline{i}_1 + \frac{\underline{i}_1}{j\omega C} \quad \text{et} \quad -j\omega L_2 \underline{i}_2 - M j\omega \underline{i}_1 = R_2 \underline{i}_2$$

2. On peut réécrire les deux équations en factorisant les termes : (*toujours une bonne idée ça!!*)

$$\underline{e} = \left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2 \quad \text{et} \quad (j\omega L_2 + R) \underline{i}_2 = j\omega M \underline{i}_1$$

On peut alors négliger R_1 et R_2 si $R_1 \ll \omega L_1$ (ou $\frac{1}{\omega C}$) et $R_2 \ll \omega L_2$. P=Il faut alors se placer à très haute fréquence. En supposant cette condition vérifiée on a alors :

$$\underline{e} = \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2 \quad \text{et} \quad \omega L_2 \underline{i}_2 = -j\omega M \underline{i}_1$$

3. En notation complexe $\underline{u}_1 = j\omega L_1 \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2$. On exprimer \underline{i}_2 avec l'équation du circuit 2 et on a :

$$\underline{i}_2 = -\frac{M}{L_2} \underline{i}_1 \quad \text{et donc} \quad \underline{u}_1 = j\omega L_1 \underline{i}_1 - j\omega M \frac{M}{L_2} \underline{i}_1 = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) j\omega \underline{i}_1$$

En passant au réel, on reconnaît une dérivée et donc : $u_1(t) = L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$

4. Lors du couplage total on trouve $u_1 = 0$: il n'y a pas de tension aux bornes du bobinage du circuit 1. La f.e.m. du à l'induction couplée annule celle du à l'auto-induction. Tout se passe comme si il n'y avait ni circuit 2 ni bobine dans le circuit 1.

5. Avec l'expression de \underline{u}_1 précédente, la loi des mailles dans le circuit 1 donne :

$$\underline{e} = \left(\underbrace{j\omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right)}_{L_{eq}} + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}_1$$

6. On a alors : $\underline{i}_1 = \frac{\underline{e}}{j\omega L_{eq} + 1/j\omega C}$. On pose le classicoclassique $\omega_0 = 1/\sqrt{L_{eq}C}$ et on a :

$$\underline{i}_1 = \frac{jC\omega \underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

L'amplitude du courant est maximale pour $\omega = \omega_0$: c'est la pulsation de résonance $\omega_r = 1/\sqrt{L_{eq}C}$.

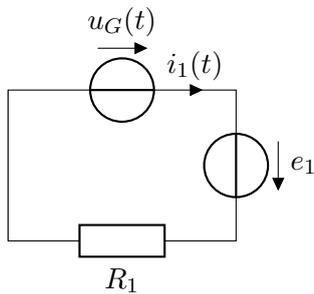
7. Sans voiture le raisonnement est le même mais $L_{eq} \rightarrow L_1$. La variation relative de fréquence est alors :

$$\frac{\Delta f_r}{f_r} = \frac{1/\sqrt{L_{eq}C} - 1/\sqrt{L_1 C}}{1/\sqrt{L_1 C}} = \frac{L_1 - L_{eq}}{L_{eq}} = \frac{M^2/L_1 L_2}{1 - M^2/L_1 L_2}$$

8. Un détecteur de métal va alors chercher à trouver la fréquence de résonance. Si f_r est inchangée il n'y a pas de métal à proximité, si f_r est modifiée, il y a une structure métallique proche du détecteur.

Exercice 5 - Chauffage par induction :

1. On fait un schéma du circuit et on applique nos lois électriques en passant en RSF



- ▷ Loi de Faraday : $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} \rightarrow -jL_1\omega i_1$
- ▷ Loi des mailles : $u_G = R_1 i_1 + jL_1\omega i_1$
- ▷ Amplitude du courant : $I_0 = \frac{U_G}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L_1^2}}$.

On cherche L_1 :

$$L_1 = \frac{U_G^2 - R^2 I_0^2}{\omega^2 I_0^2}$$

2. On fait les AN ... OK On retiendra qu'à hautes fréquences $\omega \gg R/L$, les résistances sont négligeables devant les inductances.
3. Cf avant ... on n'oublie pas les inductances mutuelles

$$u_G = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 \quad \text{et} \quad 0 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2$$

4. Avec la seconde : $\frac{i_2}{i_1} = \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2}$ donc $|i_2/i_1| = \frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} \simeq \frac{M}{L_2}$.

5. **Attention !** à ne pas confondre amplitude I_1 et valeur efficace $\tilde{I}_1 = I_1/\sqrt{2}$!!

Effet Joule : $\mathcal{P} = RI^2$ donc dans l'inducteur $I_{1,max} = \sqrt{\mathcal{P}_{max}/R_1}$.

Avec l'équation du circuit 1 on a alors :

$$i_1 = \frac{u_G}{j\omega L_1 - j\omega M \frac{M}{L_2} + R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{U_0}{\omega |L_1 - M^2/L_2|}$$

On a alors l'amplitude maximale :

$$U_{0,max} = \left(\omega |L_1 - M^2/L_2| \right) I_{1,max} = \left(\omega |L_1 - M^2/L_2| \right) \sqrt{\mathcal{P} R_1}$$

La valeur efficace maximale est alors $U_{0,max}/\sqrt{2}$.

Dans la plaque 2 : $I_2 = \frac{M}{L_2} I_1 = \frac{M}{L_2} \sqrt{\mathcal{P}/R_1}$ donc $\tilde{I}_{2,max} = \frac{M}{L_2} \sqrt{\mathcal{P}/2R_1}$.

La puissance moyenne est alors $\mathcal{P}_2 = R_2 \tilde{I}_{2,max}^2 = R_2 \frac{M^2}{L_2^2} \frac{\mathcal{P}_{max}}{2R_1}$

Exercice 6 - Induction au sein d'une spire plongée dans un champ tournant :

Correction rapide !

C'est similaire à l'exercice 1 : il faut calculer un flux extérieur du à un champ \vec{B} tournant : on pense à faire deux schéma du dispositif!! On trouve alors :

▷ Champ $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \vec{e}_x + B_0 \sin \omega t \vec{e}_y$ et $\vec{S} = N\pi a^2 \vec{e}_x$.

▷ Flux extérieur $\phi_{ext} = \vec{B} \cdot \vec{S} = N\pi a^2 B_0 \cos \omega t$.

▷ Auto-induction » R si $\omega \gg R/L$ donc on néglige L à "petites" fréquences $\omega \ll R/L$.

▷ Équation électrique : $-N\pi a^2 B_0 \omega \sin \omega t + 0 = Ri(t)$.

Chap XXX

Induction de Lorentz : circuit mobile dans \vec{B} fixe

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Conversion de puissance mécanique en puissance électrique : les rails de Laplace | 3 |
| 1.1 | Présentation et analyse qualitative | 3 |
| 1.2 | Etudes des rails de Laplace en mode générateur | 4 |
| 1.3 | Etude énergétique : bilan de puissance. | 7 |
| 2 | Application de la conversion mécanique \rightarrow électrique | 7 |
| 2.1 | Freinage par induction | 7 |
| 2.2 | Freinage d'un cadre rectangulaire. | 9 |
| 2.3 | Générer un courant : principe de l'alternateur | 11 |
| 3 | Conversion de puissance électrique en puissance mécanique | 13 |
| 3.1 | Rails de Laplace en mode moteur | 13 |
| 3.2 | Machine à courant continu dans un entrefer plan. | 13 |



Savoirs ♡

- ▷ ♡ Différence entre induction de Neumann et induction de Lorentz
- ▷ ♡ **Rails de Laplace**
 - ▷ principe de l'expérience en mode générateur et moteur
 - ▷ analyse qualitative des phénomène d'induction et utilisation de la loi de Lenz
 - ▷ force de Laplace, force équivalente de frottement et principe du freinage par induction
- ▷ ♡ Lien entre la puissance des forces de Laplace et la puissance de la f.e.m. induite
- ▷ ♡ Principe de fonctionnement d'un alternateur
- ▷ ♡ Moteur synchrone et moteur à courant continu : principe de fonctionnement, avantage et inconvénient de chacun

Savoir Faire

 *Mettre en place la méthode pour réaliser une étude complète d'un phénomène d'induction de Lorentz : c'est tout mais c'est beaucoup !!*

On s'intéresse dans ce chapitre à une seconde façon de générer un phénomène d'induction : un circuit mobile (ou déformable) dans un champ magnétique \vec{B} fixe. C'est l'induction de Lorentz.

On s'intéressera tout au long du cours à

- ▷ la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique : générateur de courant
- ▷ la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique : moteur électrique

Les rails de Laplace serviront d'expérience modèle tout au long du cours pour comprendre la conversion d'une forme d'énergie, mécanique ou électrique, en une autre.

1 Conversion de puissance mécanique en puissance électrique : les rails de Laplace

Dans ces systèmes de type générateur :

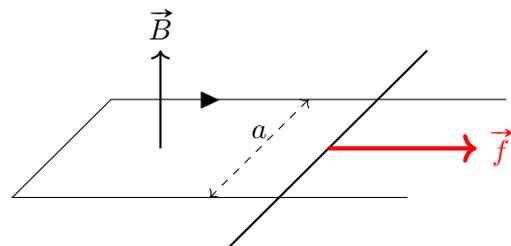
- ▷ on modifie le circuit électrique à l'aide d'une action mécanique (force ou couple)
- ▷ on observe l'apparition d'un courant électrique

1.1 Présentation et analyse qualitative

► Expérience

La tige conductrice \mathcal{T} est initialement au repos et peut glisser le long de deux rails parallèle. Elle ferme ainsi le circuit électrique qui ne comporte ici aucun générateur. On appelle R la résistance totale du circuit, supposé constante.

On tire sur la tige mobile via une force \vec{f} constante et on suppose que le contact est sans frottement. Le champ magnétique \vec{B} est uniforme et stationnaire, généré par un dispositif extérieur.

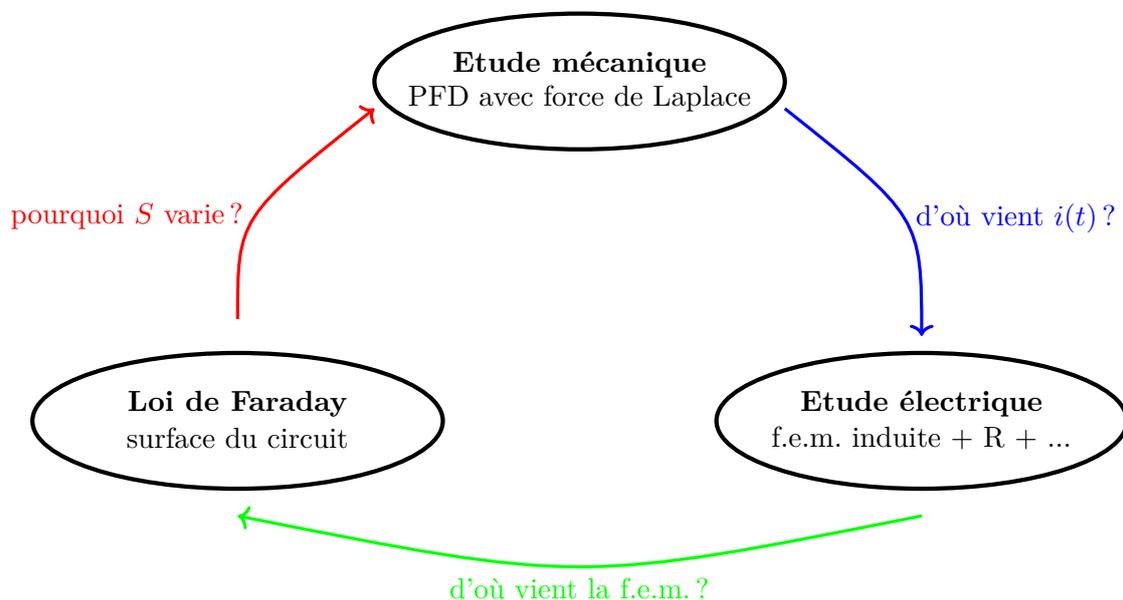


► Analyse qualitative et loi de Lenz

Principe de fonctionnement

- ▷ Par action de la force \vec{f} , la tige se met en mouvement vers la droite.
- ▷ Le flux du champ \vec{B} à travers le circuit fermé varie car la surface de ce dernier varie.
- ▷ Il apparaît donc une force électromotrice induite $e(t)$ qui crée un courant $i(t)$.
- ▷ La tige mobile, désormais parcourue par le courant $i(t)$ est soumise à une force de Laplace \vec{F}_L .

Schéma de l'induction de Lorentz



Utilisation de la loi de Lenz :

On a un phénomène d'induction

- ▷ **Cause** : la force \vec{f} qui déforme le circuit
- ▷ **Conséquence** : l'apparition d'une force électromotrice $e(t)$ et d'un courant $i(t)$
- ▷ **Loi de Lenz** : le courant $i(t)$ va s'opposer via la force de Laplace \vec{F}_L à la force \vec{f} : \vec{F}_L est dans le sens opposé de \vec{f} .

► Neumann versus Lorentz**Et l'auto-induction ?**

*** **Attention !** Le courant $i(t)$ crée également un champ magnétique \vec{B}_i qui va s'ajouter à \vec{B} . Dans la plupart des exercices, on supposera que le champ induit est négligeable devant le champ extérieur $\|\vec{B}_i\| \ll \|\vec{B}\|$.

Très souvent, quand un champ extérieur est imposé, on néglige tout phénomène d'auto-induction.

Il est donc très important de savoir quel type de phénomène d'induction on regarde pour ne pas tout mélanger !!

- ▷ Induction de Neumann : auto-induction, induction mutuelle \Rightarrow axé électricité
- ▷ Induction de Lorentz : force de Laplace \Rightarrow axé mécanique

1.2 Etudes des rails de Laplace en mode générateur**► Méthode générale d'étude**

Pour ne pas faire n'importe quoi, il faut bien avoir en tête le schéma de l'induction de Lorentz : on voit qu'on aura trois points de physique à développer :

- ▷ une partie mécanique : **PFD**/...
- ▷ une partie magnétique : **loi de Faraday**
- ▷ une partie électrique : **loi des mailles**/...

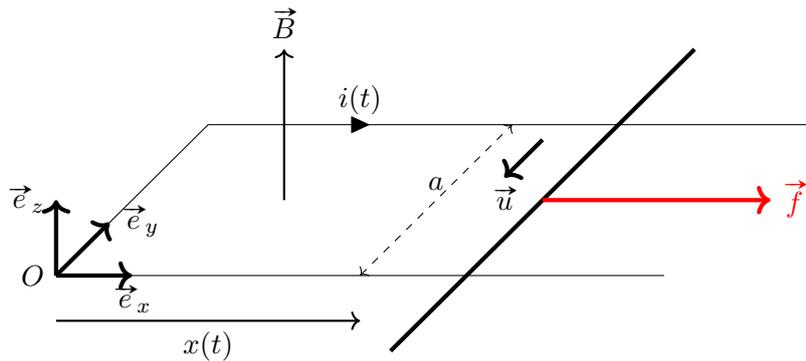
*** **Attention !** La difficulté de l'induction est de faire proprement ces trois parties ! Il faut donc être **méthodique** !

Méthode en DS. Étudier les conversions électromécaniques :

1. faire un schéma du problème en dessinant les axes, le sens de mesure des courants, les tensions électriques et les forces mécaniques.
*** **Attention !** Bien identifier la variable mécanique et la variable électrique
2. (*option*) réaliser une analyse qualitative des phénomènes qui se produisent et exploiter la loi de Lenz
3. identifier les **deux** 2 inconnues : une mécanique (*position ou vitesse*) et une électrique (*intensité*.)
4. **Étude mécanique** : cela renvoie à la méca du point ou du solide !
*** **Attention !** on n'oublie pas la force de Laplace du au courant !!
5. **Étude électrique** : *loi des dipôles, loi des mailles et loi des nœuds*
*** **Attention !** on n'oublie pas la force électromotrice $e(t)$!!
6. **Étude magnétique** : *loi de Faraday*
*** **Attention !** il faut relier proprement la surface S aux coordonnées !!
7. à l'aide des trois équations précédentes, en déduire une équation différentielle sur la variable électrique ou la variable mécanique.

► **Schéma, analyse qualitative et inconnues**

SCHEMAAAAAA!!!!



Inconnues :

- ▷ électrique : le courant $i(t)$ dans le circuit
- ▷ mécanique : la position $x(t)$ de la barre

► **Étude mécanique :**

Le système étudié est la tige MN en translation étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Vecteurs cinématiques :

- ▷ position $\vec{OM} = x(t)\vec{e}_x$
- ▷ vitesse $\vec{v} = \dot{x}(t)\vec{e}_x$
- ▷ accélération $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x$

Bilan des forces :

- ▷ la force constante $\vec{f} = f\vec{e}_x$;
- ▷ la force de Laplace, avec la convention du sens du courant du schéma,

$$\vec{F}_L = i(t)\overline{MN} \wedge \vec{B} = i(t)aB\vec{e}_x$$

Remarque : d'après la loi de Lenz, \vec{F}_L s'oppose à \vec{f} : elle est suivant $-\vec{e}_x$. Donc $iaB < 0$, le courant i est négatif.

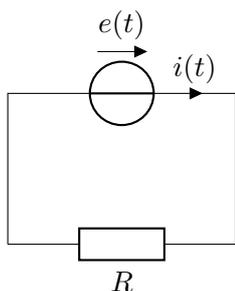
- ▷ le poids $-mg\vec{e}_z$
- ▷ réaction du support $\vec{N} = N\vec{e}_z$, pas de frottement ici

Principe fondamentale de la dynamique suivant \vec{e}_x :

$$m\ddot{x}(t) = f + i(t)aB$$

► **Étude électrique**

SCHEMAAAAAA!!!!



*** **Attention !** aux conventions générateur pour la f.e.m. et récepteur pour la résistance !

Le circuit est simplement constitué d'une source de tension e et d'une résistance R . On note $i(t)$ le courant électrique. On a donc simplement la loi d'Ohm

$$e(t) = Ri(t)$$

🔴🔴🔴 **Attention !** Même si on prend en compte l'inductance du circuit ; L est "compris" dans $e(t)$!!

► Étude magnétique :

SCHEMAAAAA!!!! (ou on utilise celui de mécanique pour identifier $S \dots$)

Avec le sens conventionnel du courant qu'on a choisi, le vecteur surface \vec{S} du circuit s'écrit : $\vec{S} = ax(t)\vec{e}_y$.

🔴🔴🔴 **Attention !** au sens de \vec{S} . On respecte la règle de la main droite :

1. le sens de mesure du courant suit le sens de l'index
2. **PUIS** le courant suit le sens du majeur
3. **DONC** \vec{S} est orienté suivant le pouce

Ainsi, le flux du champ dans le circuit vaut $\Phi(t) = \Phi_p + \Phi_{ext} \simeq \Phi_{ext}$ car on néglige tout phénomène d'auto-induction.

Finalement :

$$\Phi = \vec{S} \cdot \vec{B} = ax(t)B \quad \text{on applique la loi de Faraday} \quad e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -aB\dot{x}(t)$$

► Résolution :

Une fois qu'on a réalisé les 3 études :

- ▷ mécanique $m\ddot{x}(t) = f + i(t)aB$
 - ▷ électrique $e(t) = Ri(t)$
 - ▷ induction $e = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -aB\dot{x}(t)$
- on peut résoudre le problème ...

Vitesse de la barre : on cherche une équation sur $\dot{x}(t)$.

On exprime $i(t)$ à l'aide de l'équation électrique : $i(t) = e(t)/R$. On exprime la force électromotrice $e(t) = -aB\dot{x}(t)$ pour obtenir un lien entre la vitesse de la barre et l'intensité électrique dans le circuit :

Finalement on a :

$$\ddot{x}(t) + \frac{a^2 B^2}{mR} \dot{x}(t) = \frac{f}{m}$$

Pour résoudre ces équations différentielles on pose $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$. On obtient une expression de la vitesse $v(t) = \dot{x}(t)$, en prenant $v(0) = 0$:

$$v(t) = \frac{Rf}{a^2 B^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right). \quad (1.1)$$

Après un régime transitoire d'une durée d'environ 5τ , un régime permanent en vitesse et courant est atteint.

Intensité du courant

En remplaçant dans l'équation électrique on a : $i(t) = -\frac{Ba}{R}\dot{x}(t)$ soit avec l'expression de la vitesse trouvée :

$$i(t) = \frac{f}{Ba} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

le courant est bien négatif, ce que prédisait la loi de Lenz : la force de Laplace s'oppose bien à \vec{f} .

► Conclusion

L'induction a un effet modérateur, de freinage, car la force de Laplace s'oppose au forçage extérieur : la vitesse tend vers une vitesse limite. Sans phénomène d'induction, la barre serait uniquement soumise à la force \vec{f} et accélérerait indéfiniment.

On retrouve la loi de Lenz : les conséquences de l'induction (l'apparition de $i(t)$) s'oppose aux causes (le mouvement de la barre) : la force de Laplace s'oppose à la vitesse de la barre.

1.3 Etude énergétique : bilan de puissance

► Calcul des puissances

Méthode en DS. Bilan de puissance électromécanique

Pour obtenir un bilan de puissance :

- ▷ mécanique : on multiplie le PFD par la vitesse
- ▷ électrique : on multiplie la loi des mailles par l'intensité

Ce qui donne ici :

$$\begin{cases} \left(m\ddot{x}(t) = f + i(t)aB \right) & \times \dot{x}(t) \\ \left(e(t) = Ri(t) \right) & \times i(t) \end{cases}$$

▷ Les puissances mécaniques :

- ▷ Le terme de gauche donne la variation d'énergie cinétique.
- ▷ L'opérateur qui impose la force \vec{f} fournit la puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{meca}} = f\dot{x}(t)$.
- ▷ La puissance de la force de Laplace vaut $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = i(t)aB\dot{x}(t)$

▷ Les puissances électriques :

- ▷ La puissance électrique reçue par le circuit vaut simplement $\mathcal{P}_{\text{fem}} = e(t)i(t) = -i(t)aB\dot{x}(t)$.
- ▷ Cette puissance électrique est dissipée par effet Joule dans le circuit.

▷ Puissance de Laplace et puissance de la f.e.m.

On remarque que la puissance mécanique de la force de Laplace $aBi(t)\dot{x}(t)$ est égale à la puissance délivrée par la source de tension.

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = i(t)aB\dot{x}(t) = -\mathcal{P}_{\text{fem}}$$

On admettra cette propriété comme vraie pour tout système.

Théorème. Conversion de puissance électro-mécanique

La puissance des forces de Laplace $\mathcal{P}_{\text{Laplace}}$ (*domaine de la mécanique*) est l'opposée de la puissance délivrée par la f.e.m. induite (*domaine de l'électricité*) \mathcal{P}_{fem} :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} = -\mathcal{P}_{\text{fem}}$$

► Bilan

En appliquant le théorème de la puissance cinétique, on a

$$\frac{d\mathcal{E}_c(t)}{dt} = \mathcal{P}_{\text{meca}} + \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = \mathcal{P}_{\text{meca}} - \mathcal{P}_{\text{fem}}$$

Autrement dit, l'énergie fournie par l'opérateur sert à mettre en mouvement la tige mais est aussi en partie perdue par effet Joule dans le circuit à cause de la conversion de puissance mécanique en puissance électrique.

$$\mathcal{P}_{\text{meca}} = \frac{d\mathcal{E}_c(t)}{dt} + Ri^2(t) .$$

En régime permanent, $d/dt = 0$ et donc $\mathcal{P}_{\text{meca}} = Ri^2(t)$.

Propriété. Puissance et régime permanent

Lors du régime permanent, l'intégralité de la puissance mécanique fournie par l'opérateur est convertie en puissance électrique.

2 Application de la conversion mécanique \rightarrow électrique

2.1 Freinage par induction

Une force de freinage est une force qui s'oppose à la vitesse (\sim force de frottement).

► Retour sur les rails de Laplace

Dans l'exemple précédent, la force de Laplace s'écrit comme :

$$\vec{F}_L = i(t)aB\vec{e}_x = -\frac{(Ba)^2}{R}\dot{x}(t)\vec{e}_x = -\frac{(Ba)^2}{R}\vec{v}$$

Pour les rails de Laplace, l'apparition d'un courant par induction conduit à la présence d'une force de Laplace qui se comporte comme une force de frottement fluide (proportionnelle à la vitesse) et qui s'oppose au déplacement du rail.

Ce phénomène se généralise à une géométrie quelconque grâce à la loi de Lenz :

Propriété. Freinage par induction

Si un conducteur se déplace dans un champ \vec{B} stationnaire, il va se créer à l'intérieur du conducteur un courant induit qui sera responsable d'une force de Laplace qui s'oppose au mouvement et va agir comme une force de frottement.

► Freinage par courant de Foucault

Définition. Courants de Foucault

Courants électriques microscopique créés dans une masse conductrice

- ▷ soit par la variation au cours du temps d'un champ magnétique extérieur traversant ce milieu (le flux du champ à travers le milieu) \Rightarrow Induction de Neumann
 - ▷ soit par un déplacement de cette masse dans un champ magnétique constant \Rightarrow Induction de Lorentz
- Ils sont une conséquence de l'induction électromagnétique.

Induction de Neumann : chauffage par plaque à induction

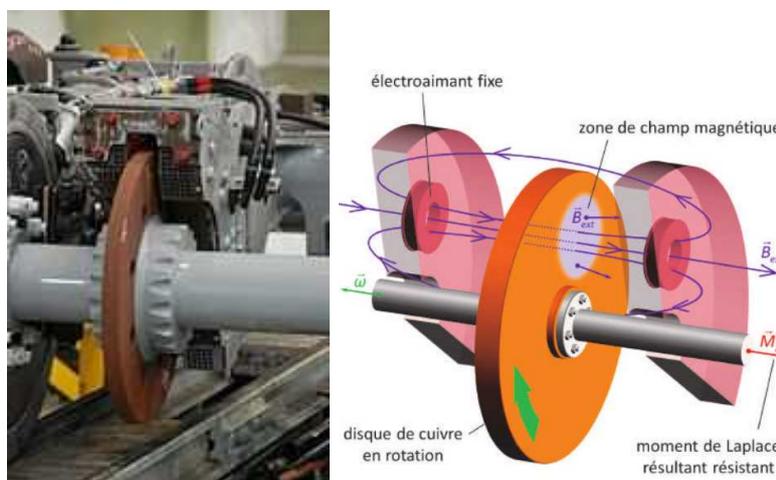
Une plaque à induction est constituée :

- ▷ d'un circuit primaire (*dans la dite plaque*) alimenté par un générateur
- ▷ d'un circuit secondaire où se créera des courant de Foucault (*poêle, casserole, ...*)

En alimentant le circuit primaire, et grâce à l'induction, des courants de Foucault apparaissent dans la poêle. Par effet Joule ça chauffe : on peut cuire des aliments.

Freins dans les transports :

Un disque métallique conducteur est associé à l'arbre de transmissions du véhicule. Le système produit, sur demande, un champ magnétique plus ou moins important, provoquant l'apparition de courants de Foucault dans le conducteur. L'énergie mécanique est alors convertie en énergie électrique puis dissipée par effet Joule.



▷ **Avantages** : Freinage doux, évitant la surchauffe des disques de frein.

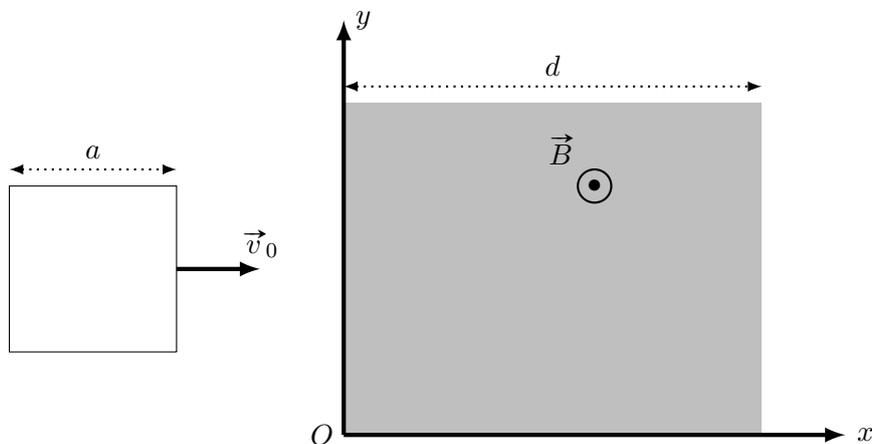
▷ **Inconvénients** : Ce système ne peut pas remplacer le freinage mécanique, car il n'agit pas assez à basse vitesse.

Donc on commence par freiner par courant de Foucault puis on switch à des frottement solides pour arrêter le système se fait par frottement solide (plaquette de frein).

2.2 Freinage d'un cadre rectangulaire

Application 1 : On considère un cadre métallique de côté a , de masse m et de résistance R en translation à vitesse constante v_0 suivant l'axe (Ox) . Il traverse alors une région de l'espace de largeur d où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ constant.

On négligera tout phénomène d'auto-induction. L'accélération de la pesanteur est perpendiculaire au plan.



On étudie la position x du bord droit du cadre.

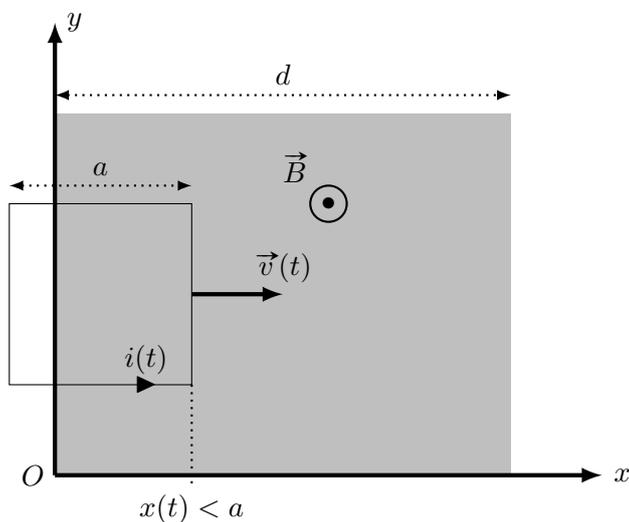
1. On se place dans le cas $0 < x(t) < a$. Montrer que la vitesse $v(t)$ du cadre est solution de :

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{a^2 B^2}{R} v(t) = 0$$

2. Par un changement de variable, donner une équation différentielle portant sur $v[x]$. En déduire l'expression de $v[x]$.
3. Que se passe-t-il si $x > a/2$?
4. Pour quelle valeur de x le cadre est de nouveau freiné ?
5. Tracer alors schématiquement l'évolution de $v(x)$. En déduire la perte de vitesse totale du cadre.
6. A quelle condition sur v_0 le cadre s'arrête ?

CORRECTION

1. **SCHEMAAAA** Pour $0 < x < a$, l'avant du cadre est dans la zone \vec{B} et l'autre partie non.



▷ **Etude mécanique**

Il y a trois parties du cadre qui subissent une force de Laplace :

- ▷ partie horizontale inférieure 🚫🚫🚫 **Attention !** cela va de 0 à x !! Le bout de cadre à gauche ne "trempe" pas dans \vec{B} .

$$\vec{F}_L = iL\vec{u} \wedge \vec{B} = i(t)x(t)\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z = -i(t)x(t)B\vec{e}_y$$

- ▷ partie verticale droite

$$\vec{F}_L = iL\vec{u} \wedge \vec{B} = i(t)a\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = +i(t)aB\vec{e}_x$$

- ▷ partie horizontale supérieure 🚫🚫🚫 **Attention !** cela va de 0 à x !! Le bout de cadre à gauche ne "trempe" pas dans \vec{B} .

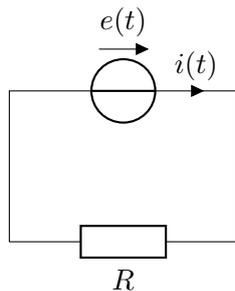
$$\vec{F}_L = iL\vec{u} \wedge \vec{B} = i(t)x(t)(-\vec{e}_x) \wedge B\vec{e}_z = +i(t)x(t)B\vec{e}_y$$

La résultante des forces de Laplace est finalement : $\vec{F}_L = +i(t)aB\vec{e}_x$.

PFD sur \vec{e}_x : $m\frac{dv}{dt} = +aBi(t)$.

Par loi de Lenz, on en déduit que $i(t)x(t)B < 0$ donc $i(t)$ est négatif.

▷ **Etude électrique** **SCHEMAAAAA!!!!**



On a donc simplement la loi d'Ohm

$$e(t) = Ri(t)$$

▷ **Etude magnétique**

La surface est $ax(t)$ donc le flux extérieur est $\Phi_{ext} = ax(t)B$. Le flux total est $\Phi = \Phi_{ext} + \Phi_p \simeq \Phi_{ext}$ car on néglige tout phénomène d'auto-induction.

Finalement, la **Loi de Faraday** donne : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -aBv(t)$.

En mettant tout bout-à-bout on trouve : $m\frac{dv}{dt} = +aBi(t) = \frac{aB}{R}e(t) = -\frac{a^2B^2}{R}v(t)$.

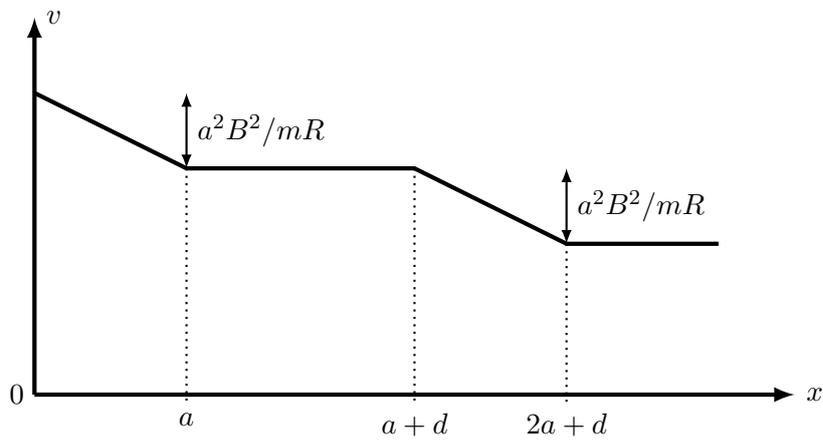
2. On réalise le changement de variable $t \rightarrow x$: $\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} = v(t) \frac{d}{dx}$. L'équation précédente donne alors :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{a^2B^2}{mR} \Rightarrow v[x] = -\frac{a^2B^2}{mR}x + C$$

Condition initiale/limite : $v[x=0] = v_0$ donc $v[x] = v_0 - \frac{a^2B^2}{mR}x$.

3. Pour que le cadre soit freiné, il faut qu'un phénomène d'induction se produise (loi de Lenz). Or, pour cela, le flux du champ magnétique à travers le cadre doit varier (loi de Faraday). Cela n'est pas possible si le cadre "trempe" entièrement dans le champ \vec{B} , donc si $x > a/2$.
Pour que le freinage reprenne, il faut que $x > d$.

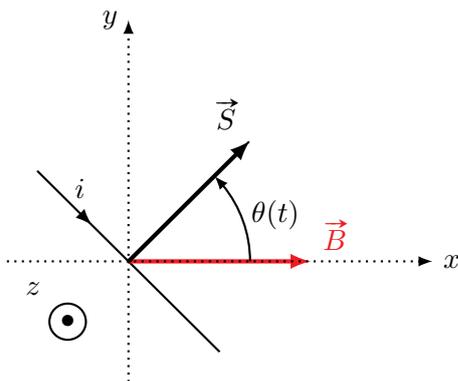
4.



5. A chaque zone de freinage la vitesse du cadre diminue de $\frac{a^2 B^2}{mR} a$. Le cadre s'arrête si $2 \frac{a^3 B^2}{mR} > v_0$.

2.3 Générer un courant : principe de l'alternateur

Un alternateur est un système qui permet de transformer une puissance mécanique en une puissance électrique dans la durée. Le problème des rails de Laplace est que, pour fournir un courant sur une longue période, les rails doivent être infiniment longs. On résout ce problème en travaillant sur un système en rotation.



On étudie une spire carré de côté l , de résistance totale R en rotation autour d'un axe (Oz). La rotation est assurée par un couple moteur fourni par l'extérieur Γ .

On note J le moment d'inertie de la spire par rapport à l'axe (Oz) et L son coefficient d'auto-induction.

Cette spire est plongée dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et stationnaire $\vec{B} = B \vec{e}_x$. On repère la position de la spire en rotation par la position angulaire θ de son vecteur surface \vec{S} par rapport au champ magnétique \vec{B} .

Exemple 1 :

1. A l'aide d'une analyse qualitative et de la loi de de Lenz, expliquer pourquoi il est nécessaire de fournir un couple Γ pour maintenir la rotation de la spire.
2. On prend en compte le phénomène d'auto-induction.
 - (a) Exprimer la force électromotrice $e(t)$. **Attention !** deux parties!!
 - (b) En déduire l'équation électrique du circuit.
3. Donner l'équation du mouvement.
4. Dans le cas où on néglige l'auto-induction, donner l'équation différentielle dont θ est solution.

CORRECTION

Attention ! Bien identifier les deux variables : mécanique $\theta(t)$ et électrique $i(t)$.

1. La rotation de la spire va créer, par action du champ extérieur \vec{B} et loi de Faraday, l'apparition d'un courant $i(t)$. Ce courant, via les forces de Laplace, va créer un couple qui, par loi de Lenz, va s'opposer à la rotation car c'est elle qui est la cause du phénomène d'induction.

Il faut donc fournir un couple Γ pour maintenir la rotation.

2.(a) Le flux est composé de : $\Phi = \Phi_p + \Phi_{ext}$

▷ flux propre : $\Phi_p = Li(t)$

▷ flux extérieur : $\Phi_{ext} = \vec{S} \cdot \vec{B}$ avec $\vec{S} = l^2 (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$. Donc $\Phi_{ext} = Bl^2 \cos \theta(t)$

Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} + Bl^2\omega \sin \omega t$.

(b) Le circuit est juste la résistance et la f.e.m. induite en série : $e(t) = Ri(t)$ soit

$$-L\frac{di}{dt} + Bl^2\dot{\theta} \sin \theta(t) = Ri(t)$$

3. **Bilan des couples et moment :**

▷ pas de moment de force (le poids a un moment nul)

▷ couple des forces de Laplace : $\Gamma_L = \vec{M} \wedge \vec{B} \cdot \vec{e}_z = i(t)l^2 (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = -Bl^2 \sin \theta i(t)$.

On applique le **TMC** au cadre en rotation :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma + -Bl^2 \sin \theta i(t)$$

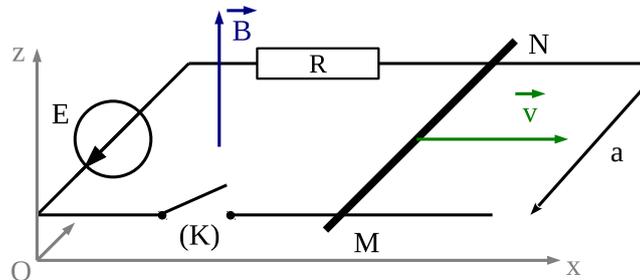
4. Si on néglige l'auto-induction : $L = 0$ et on a alors :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma - \frac{B^2l^4}{R}\dot{\theta} \sin^2 \theta$$

3 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

3.1 Rails de Laplace en mode moteur

Le principe de la conversion d'énergie électrique-mécanique est qu'un même système peut servir à la fois de générateur de courant ou de moteur électrique. On a précédemment étudié les rails de Laplace en mode générateur : en fournissant un effort mécanique via \vec{f} on créait un courant électrique. Avec le même dispositif, on peut imaginer un moteur électrique : en fournissant une puissance électrique via un générateur (⚡⚡⚡ **Attention !** un "vrai générateur, pas une f.e.m. induite par Faraday), on peut déplacer une barre.

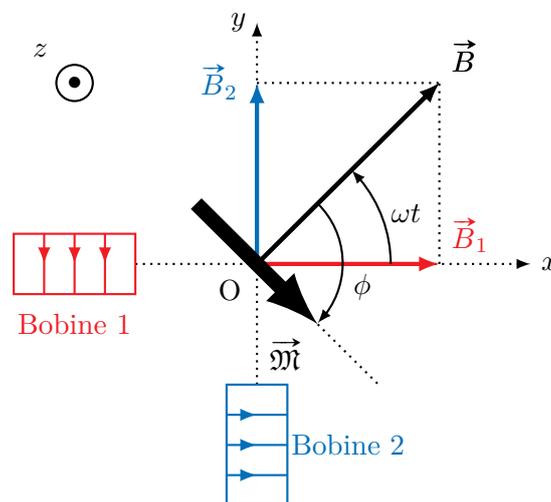


Ce dispositif est étudié plus en avant dans le μDM .

3.2 Machine à courant continu dans un entrefer plan

► Retour sur le moteur synchrone

Nous avons déjà vu un moyen simple pour créer un moteur électrique : il suffit de placer un dipôle magnétique (aimant ou spire parcourue par un courant) dans un champ \vec{B} tournant. Le moment magnétique est soumis à un couple qui tend à l'aligner avec le champ magnétique, celui-ci va se mettre en rotation. C'est le principe d'un moteur synchrone : le champ et l'aiguille tournent à la même vitesse.



Défaut :

indépendamment de la difficulté à créer un champ magnétique tournant, le moteur synchrone possède un gros défaut : il tourne à vitesse angulaire ω fixe. En effet la vitesse de rotation est fixée par le champ tournant \vec{B} , typiquement 3000 tours par minute à 50 Hz ; elle n'est donc pas facilement modifiable.

Avantages :

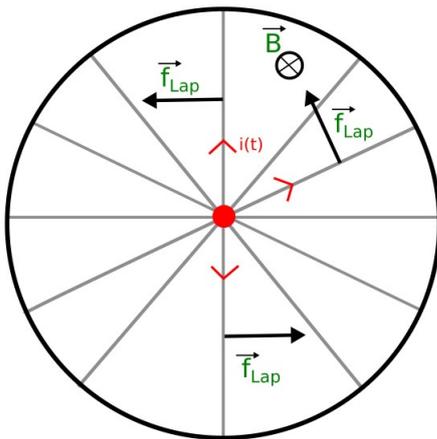
adapté aux fortes puissances, le moteur synchrone est utilisé dans des véhicules de transport, comme par exemple le TGV.

► Moteur à courant continu

Pour obtenir des moteurs de petite taille, permettant un démarrage et un arrêt rapides, ainsi qu'une vitesse de rotation facilement et rapidement modifiable, variant sur une gamme étendue (typiquement de 1 à 4000 tours par minute), il faut faire appel à un tout autre type de dispositif, appelé **moteur à courant continu**. Alimenté par un générateur continu dont la f.é.m. contrôle la vitesse de rotation, il est moins puissant que le moteur synchrone mais parfaitement adapté dans des domaines comme la robotique, qui nécessitent des mouvements de rotation de grande précision.

Modélisation

Bien que la constitution réelle du moteur soit complexe, son fonctionnement peut être décrit grâce à un modèle simplifié. Une "roue de vélo" d'axe (O, z) est constituée de N rayons. Elle est plongée dans un champ de pesanteur \vec{B} orienté suivant son axe de rotation.



Un générateur impose une différence de tension U entre le centre de la roue et le tour extérieur, créant ainsi un courant I qui part du centre de la roue et se répartit dans les différents rayons créant dans chacune des barres une intensité $i = I/N$.

Il apparaît alors sur chaque roue une force de Laplace \vec{f}_L qui apparaît, mettant en rotation la roue.

Avantages :

- ▷ la vitesse de rotation dépend de l'intensité des forces de Laplace, qui est proportionnelle à $i \Rightarrow$ en augmentant l'intensité, j'augmente la vitesse de rotation
- ▷ pas besoin de courant alternatif pour générer une rotation. A l'inverse, ce dispositif en mode générateur permet de créer un courant continu.

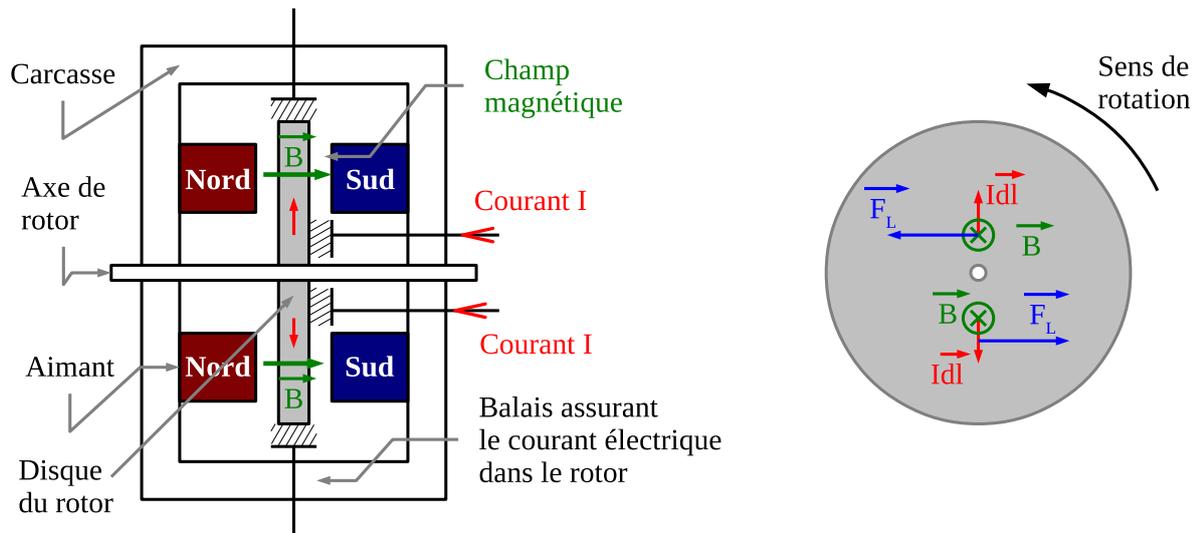
Exemple 2 :

1. Exprimer la puissance élémentaire des forces de Laplace dans chacun des rayons.
2. Montrer que pour un rayon, la puissance totale des forces de Laplace est :

$$\mathcal{P}_L = \frac{R^2}{4} B \omega i(t)$$

3. Rappeler le lien entre puissance des forces de Laplace et puissance de la fem. En déduire la force électromotrice $e(t)$.

► Dispositif réel simplifié (pour les SI)



- ▷ La partie fixe du moteur (**le stator**), se compose d'une carcasse cylindrique munies d'aimants permanents ; ceux-ci créent à l'intérieur du stator un champ magnétique stationnaire et approximativement uniforme, dirigé selon l'axe de révolution du dispositif.
- ▷ Dans la zone de faible épaisseur située entre les aimants, appelée **l'entrefer**, se trouve un disque conducteur, lié à un arbre de transmission. Il constitue la partie tournante du moteur (**le rotor**).

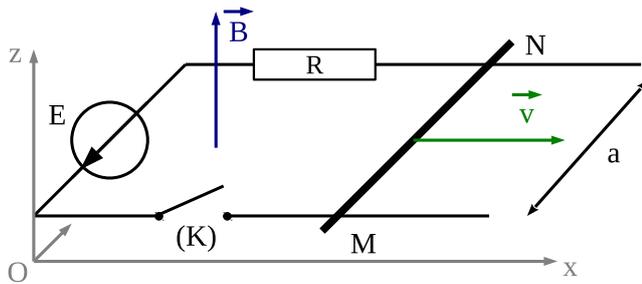
Le fonctionnement est obtenu en faisant passer un courant électrique depuis le centre du rotor vers sa périphérie, le long de deux rayons, grâce à un générateur continu situé dans un boîtier de commande extérieur au stator. La connexion électrique entre le disque du rotor et le circuit extérieur est assurée par des "**balais**" en carbone : deux sont situés, au voisinage de l'axe de rotation, deux autres en périphérie. Ces balais sont conçus pour permettre le passage du courant tout en minimisant la friction.

La loi de Faraday ne permet pas ici de déterminer le rôle de l'induction dans ce fonctionnement. Cependant, avec les outils adéquats, on peut montrer que l'évolution temporelle du dispositif fait apparaître une f.é.m. induite liée à la rotation. Or, d'après la loi de Lenz, cette f.é.m. induite s'oppose à celle du générateur qui est à l'origine du mouvement : elle prélève donc de l'énergie électrique au circuit. C'est bien évidemment cette énergie qui est convertie en énergie mécanique, via les actions de Laplace, et se retrouve dans le mouvement de rotation. Nous assistons donc, comme dans toutes les situations d'induction étudiées dans ce chapitre, à un couplage électromécanique au sein du dispositif et, d'un point de vue énergétique, à une **conversion de puissance électrique en puissance mécanique**.



Un moteur électrique très basique

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB



On étudie le problème du rail de Laplace dites moteur. La tige est initialement immobile et l'interrupteur (K) ouvert. On appelle R la résistance totale du circuit supposé fixe. Le champ magnétique \vec{B} est créé par un système extérieur et est supposé uniforme et stationnaire.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur (K). Lorsque la tige se déplace elle subit une force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.

Dans un premier temps, on néglige tout phénomène d'auto-induction.

1. Réaliser l'étude électrique, mécanique et magnétique du système.
2. Montrer la vitesse $v(t)$ de la tige est solution de

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{aBE}{R} - \left(\frac{a^2 B^2}{R} + \alpha \right) v$$

On identifiera les termes "moteur" et les termes "de frottement".

3. Exprimer la vitesse $v(t)$ au cours du temps. Donner la vitesse maximale que va atteindre la tige.
4. Réaliser un bilan de puissance. Montrer qu'une partie de l'énergie électrique injectée est convertie en mouvement et que l'autre est dissipée. Discuter **les 2 origines** des pertes énergétiques.
5. (*) En prenant en compte cette fois-ci l'auto-induction
 - (a) Montrer que v est solution de :

$$\frac{mL}{aB} \frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{\alpha L}{aB} + \frac{RM}{aB} \right) \frac{dv}{dt} + \left(\frac{\alpha R}{aB} + aB \right) v = E$$

- (b) Vérifier que pour $L = 0$, on retrouve bien l'équation de la question 2.
- (c) Quel système bien connu retrouve-t-on ? Quels régimes peut-on observer ?
- (d) Montrer que la vitesse au temps long est la même que dans le cas précédent.

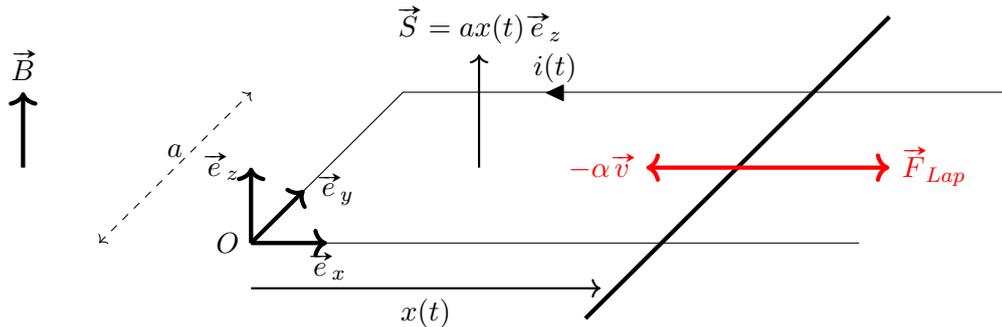


Un moteur électrique très basique

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

1. 2 DEUX II deux ni due dos schémas

Schéma mécanique (repère, forces, ...) **et induction** (vecteur surface!)



Vecteurs cinématiques :

- ▷ position : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x$
- ▷ vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x = v(t)\vec{e}_x$
- ▷ accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \frac{dv}{dt}\vec{e}_x$

Forces

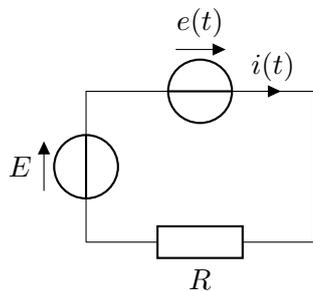
- ▷ poids $-mg\vec{e}_z$
- ▷ réaction du support (en M et N) : $\vec{R} = R\vec{e}_z$
- ▷ force de frottement fluide : $-\alpha\vec{v} = -\alpha v(t)\vec{e}_x$
- ▷ force de Laplace :

$$\vec{F}_{Lap} = i(t)\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z a = aBi(t)\vec{e}_x$$

Le **PFD** projeté sur \vec{e}_x donne : $m\frac{dv}{dt} = aBi(t) - \alpha v(t)$.

🚫🚫🚫 **Attention !** On ne peut pas résoudre car on en connaît pas $i!$ Pour marquer cela, c'est une bonne idée de préciser $i(t)$.

Schéma électrique



Loi des mailles : $E + e(t) = Ri(t)$.

Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \phi_p + \phi_{ext}$.
On néglige ici l'auto-induction donc :

$$\phi \simeq \phi_{ext} = \vec{S} \cdot \vec{B} = ax(t)\vec{e}_z \cdot B\vec{e}_z = aBx(t)$$

Finalement $e(t) = -aBv(t)$.

2. On remplace $e(t)$ puis on exprime $i(t)$:

$$i(t) = \frac{E - aBv(t)}{R} \text{ donc } m\frac{dv}{dt} = aB\frac{E - aBv(t)}{R} - \alpha v(t)$$

On trouve bien : $m\frac{dv}{dt} = \frac{aBE}{R} - \left(\frac{a^2B^2}{R} + \alpha\right)v$.

- ▷ $\frac{aBE}{R} > 0$: cela fait augmenter $v(t)$. C'est un terme moteur, du au générateur de tension E .

- ▷ $\left(\frac{a^2 B^2}{R} + \alpha\right) v < 0$: cela fait diminuer $v(t)$. C'est un terme de frottement qui a deux composantes :
- (a) une composante du au frottement fluide via α
 - (b) une composante du à l'électricité et à la f.e.m. induite

3. On résout en introduisant le temps caractéristique $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2 + \alpha R}$.

$$v(t) = v_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad v_\infty = \frac{aBE}{a^2 B^2 + \alpha R}$$

La vitesse maximale est alors v_∞ . (c'est la solution particulière de l'équation!).

4. Bilan de puissance : on somme PFD $\times v(t)$ et Loi des mailles $\times i(t)$ de sorte à faire disparaître les $v(t)i(t)$!!

$$\begin{cases} mv(t) \frac{dv}{dt} = aBv(t)i(t) - \alpha v^2(t) \\ Ei(t) - aBv(t)i(t) = Ri^2(t) \end{cases} \Rightarrow mv(t) \frac{dv}{dt} + Ri^2(t) = Ei(t) - \alpha v^2(t)$$

Ensuite on range d'un côté ce qu'on "paie/fourni", de l'autre le résultat. Ici :

$$Ei(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}mv^2(t) \right] + Ri^2(t) + \alpha v^2(t)$$

On remarque que la puissance payée par le générateur sert à mettre en mouvement la tige mais une partie est dissipée :

- ▷ sous forme de pertes électriques : par effet Joule $Ri^2(t)$
 - ▷ sous forme de pertes mécaniques : frottement fluide $\alpha v^2(t)$
5. (*)
- (a) On refait tout pareil sauf que cette fois-ci : $\phi = Li(t) + \vec{S} \cdot \vec{B}$. Donc $e(t) = -L \frac{di}{dt} - abv(t)$.

La loi des mailles donne alors $E = L \frac{di}{dt} + aBv(t) + Ri(t)$

On dérive le PFD :

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = -\alpha \frac{dv}{dt} + aB \frac{di}{dt} \Rightarrow m \frac{d^2 v}{dt^2} = -\alpha \frac{dv}{dt} + \frac{aB}{L} (E - aBv(t) - Ri(t))$$

On a alors :

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = -\alpha \frac{dv}{dt} + \frac{aBE}{L} - \frac{a^2 B^2}{L} v(t) - \frac{aBR}{L} i(t)$$

et on réutilise le PFD mais pour donner $i(t)$: $i(t) = \frac{m}{aB} \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{aB} v(t)$.

Finalement :

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = -\alpha \frac{dv}{dt} + \frac{aBE}{L} - \frac{a^2 B^2}{L} v(t) - \frac{aBR}{L} \left(\frac{m}{aB} \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{aB} v(t) \right)$$

On met en forme :

$$\frac{mL}{aB} \frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\frac{\alpha L}{aB} + \frac{Rm}{aB} \right) \frac{dv}{dt} + \left(\frac{\alpha R}{aB} + aB \right) v = E$$

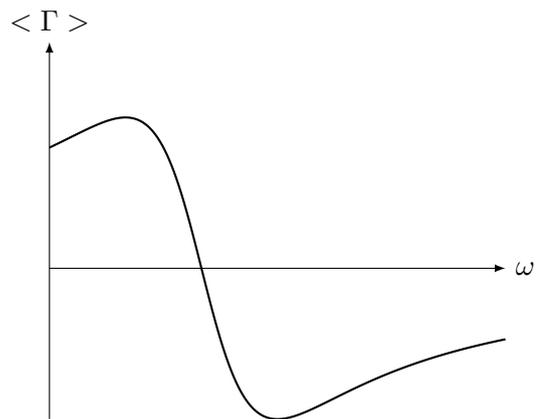
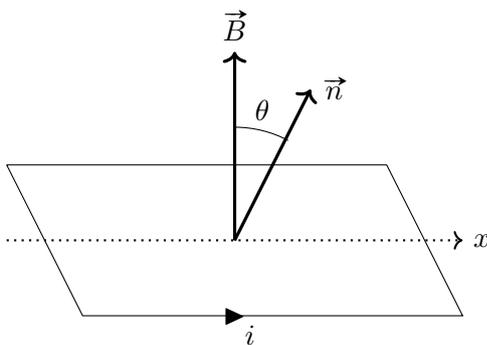
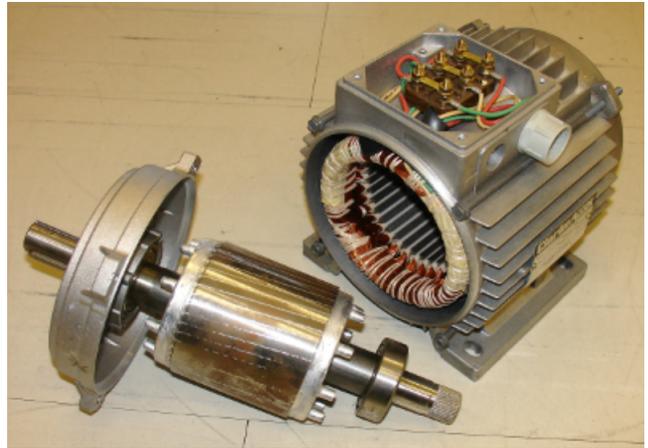
- (b) ... OK Astuce à faire pour ce genre d'exercice : est-ce qu'on retrouve le cas particulier précédent. Si non, on a fait une erreur.
- (c) C'est un oscillateur amorti sur $v(t) \Rightarrow$ on introduit ω_0 et Q ! On a trois régime : pseudo périodique, apériodique et critique suivant la valeur du facteur de qualité.
- (d) Au temps longs $v(t) = v_\infty$ donc l'équation devient :

$$\left(\frac{\alpha R}{aB} + aB \right) v_\infty = E \Rightarrow v_\infty = \frac{aBE}{a^2 B^2 + \alpha R}$$

On étudie dans ce μDM un troisième type de moteur (après les moteurs synchrones et les machines à courant continu) : le moteur asynchrone. Il est similaire au moteur synchrone : un circuit appelé stator génère un champ magnétique tournant. Un second circuit, appelé rotor, est entraîné par le champ magnétique. Mais, contrairement au moteur synchrone, le moteur asynchrone ne nécessite le rotor, la spire tournante, soit alimentée afin de générer un couple. Une conséquence immédiate est que le rotor ne tourne pas à la même vitesse que le champ \vec{B} , d'où le nom du dispositif.

Le bobinage du rotor d'une machine asynchrone peut être modélisé par une spire unique de résistance R , d'inductance L et de surface S tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe (Ox) . La normale \vec{n} à la spire est contenue dans le plan (Oyz) .

Cette spire est plongée dans un champ \vec{B} généré par le stator, localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz) , de norme constante, tournant à vitesse angulaire constante ω' autour de (Ox) . Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne le rotor.



On note θ l'angle entre \vec{B} et \vec{n} . On suppose pour simplifier les notations qu'à $t = 0$, $\theta(0) = 0$. Le couple généré par le champ magnétique sur le rotor est noté Γ . On trace ci-dessus l'évolution de sa moyenne $\langle \Gamma \rangle$ en fonction de ω , la vitesse de rotation du stator.

1. Dans le cas où $\omega \neq \omega'$, expliquer qualitativement pourquoi un courant apparaît dans la spire et donc pourquoi un couple Γ s'exerce.
2. Comment varie le flux magnétique si $\omega = \omega'$? En déduire alors que ω ne peut pas être égale à ω' .
3. Exprimer θ en fonction du temps et $\Omega = \omega' - \omega$ appelée vitesse de glissement.
4. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans le rotor. On fera apparaître la vitesse de glissement Ω .

5. On se place en régime permanent et on adopte une représentation complexe des signaux.

(a) Montrer que l'amplitude complexe du courant est :

$$\underline{I}_0 = \frac{\Omega SB}{R + jL\Omega} e^{-j\pi/2}$$

(b) En déduire alors $i(t)$ en fonction de Ω , L , R , B , S . On l'écrira sous la forme $\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t$.

6. Exprimer le couple Γ des forces de Laplace.

7. La valeur moyenne d'un signal $X(t)$ de période T est :

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

Montrer que $\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = 0$ et $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2}$.

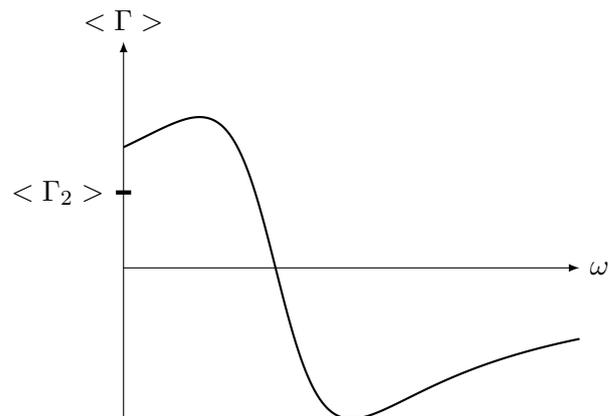
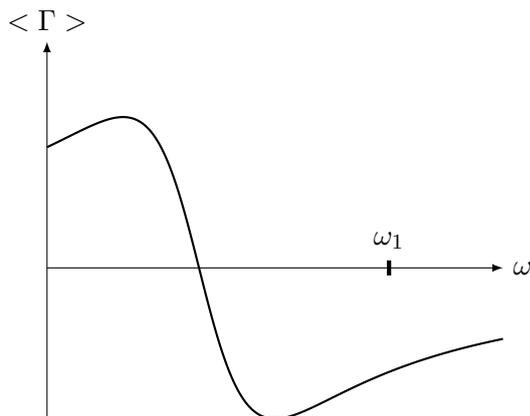
$$\text{Astuce : } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

8. En déduire : $\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega (SB)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}$.

9. Au vu de l'allure de la courbe de $\langle \Gamma \rangle$, le moteur peut-il démarrer seul ?

10.(a) On veut que le moteur tourne à vitesse angulaire ω_1 . Représenter graphiquement le couple Γ_1 que fournira le moteur. Pour quelle vitesse angulaire le couple fournit sera maximale ?

(b) On veut que le moteur fournisse un couple Γ_2 . Représenter graphiquement la ou les vitesses angulaires à laquelle le moteur va tourner.

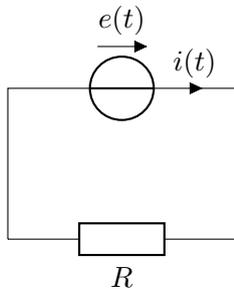




Moteur asynchrone

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

1. Si $\omega \neq \omega'$, dans le référentiel de la spire, le champ \vec{B} tourne et donc son flux varie. Via la fem de Faraday, un courant apparait dans la spire et donc des forces de Laplace qui vont exercer un couple.
 2. Si $\omega = \omega'$, dans le référentiel de la spire, le champ \vec{B} ne tourne pas et donc son flux est constant ; Il n'y a pas apparition d'une fem de Faraday et donc pas de courant. Sans courant, il n'y a pas de force de Laplace ni de couple.
- ☞☞☞ **Attention !** Contrairement à un moteur synchrone, il n'y a aucune source de courant dans la spire. Le courant i n'est du dans le moteur asynchrone qu'à des phénomènes d'induction et disparaît lorsque le moteur s'arrête.
3. On trouve $\theta = (\omega' - \omega) t = \Omega t$.



4.

☞☞☞ **Attention !** On prend en compte ici l'autoinduction !!

$$e(t) = Ri$$

$$\text{avec } e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ et } \Phi = \Phi_p + \Phi_{ext}$$

$$\Phi = Li + SB \cos \theta = Li + SB \cos \Omega t$$

$$\text{Finalement } e(t) = -L \frac{di}{dt} + SB\Omega \sin \Omega t$$

5. On se place en régime permanent et on adopte une représentation complexe des signaux.
- (a) ☞☞☞ **Attention !** La pulsation ici est Ω !! De plus en complexe $\sin \Omega t \rightarrow e^{j(\Omega t - \pi/2)} = -je^{j\Omega t}$.

En complexe, l'équation électrique donne :

$$-j\Omega L \underline{i} + SB\Omega e^{j(\Omega t - \pi/2)} = R \underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{SB\Omega e^{-j\pi/2}}{R + j\Omega L} e^{j\Omega t} \Rightarrow \underline{I}_0 = \frac{\Omega SB}{R + jL\Omega} e^{-j\pi/2}$$

(b) On obtient alors :

$$I_0 = |\underline{I}_0| = \frac{\Omega SB}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \text{ et } \varphi = \arg \underline{I}_0 = 0 - \arctan \frac{L\Omega}{R} - \pi/2$$

$$\text{Donc } i(t) = \frac{\Omega SB}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \underbrace{\cos(\Omega t + \varphi)}_{\cos \varphi \cos \Omega t - \sin \varphi \sin \Omega t} .$$

$$i(t) = \frac{\Omega SB}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \cos \varphi \cos \Omega t - \frac{\Omega SB}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}} \sin \varphi \sin \Omega t$$

avec

$$\cos \varphi = \cos \left(-\arctan \frac{L\Omega}{R} - \pi/2 \right) = \sin \left(-\arctan \frac{L\Omega}{R} \right) = -\frac{L\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$$

$$\sin \varphi = \sin \left(-\arctan \frac{L\Omega}{R} - \pi/2 \right) = -\cos \left(-\arctan \frac{L\Omega}{R} \right) = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Omega^2}}$$

$$i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} L\Omega \cos \Omega t + \frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} R \sin \Omega t$$

6. Le couple $\Gamma = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \cdot \vec{e}_x = iSB \sin \theta = iSB \sin \Omega t$.

$$\Gamma = -\frac{\Omega S^2 B^2}{R^2 + L^2 \Omega^2} L \Omega \cos \Omega t \sin \Omega t + \frac{\Omega S^2 B^2}{R^2 + L^2 \Omega^2} R \sin^2 \Omega t$$

7.

$$\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin \Omega t \cos \Omega t dt = \frac{1}{2\Omega} [\sin^2 \Omega t]_0^T = 0$$

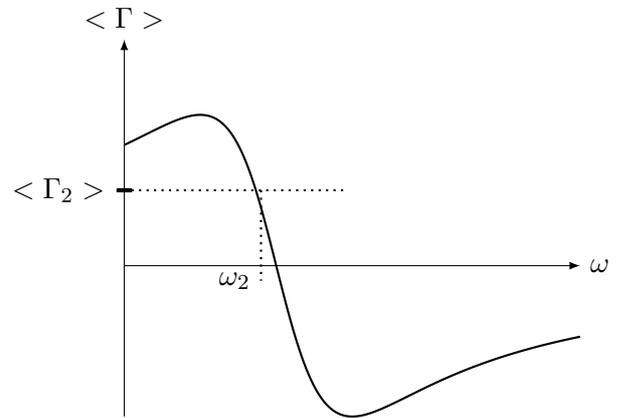
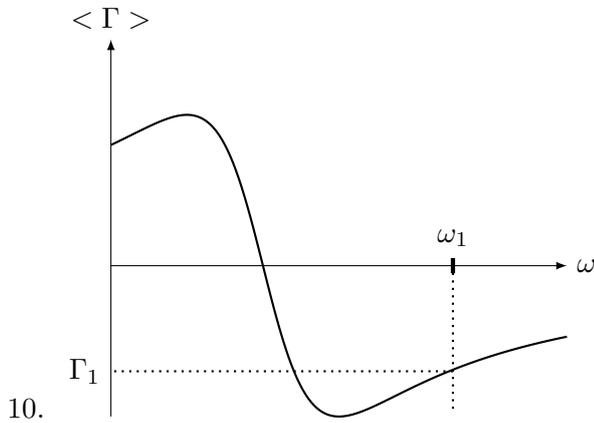
$$\langle \sin^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \Omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\Omega t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\Omega t dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} [\sin 2\Omega t]_0^T = \frac{1}{2}$$

8.

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\Omega S^2 B^2}{R^2 + L^2 \Omega^2} L \Omega \langle \cos \Omega t \sin \Omega t \rangle + \frac{\Omega S^2 B^2}{R^2 + L^2 \Omega^2} R \langle \sin^2 \Omega t \rangle$$

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{R \Omega (SB)^2}{2(R^2 + L^2 \Omega^2)}$$

9. On remarque que pour $\omega = 0$ (moteur à l'arrêt), le couple Γ est non-nul; le moteur peut se mettre en mouvement quand il est à l'arrêt.

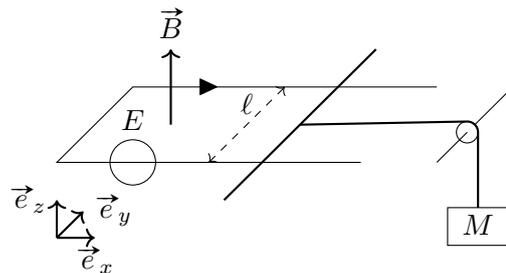


Exercice 1 - Treuil électromécanique :

On considère un dispositif des rails de Laplace, sur la figure.

plongé dans un champ magnétique \vec{B} dans lequel on a inséré un générateur de tension continue de f.é.m. E . On note R la résistance totale du circuit ainsi formé et L son coefficient d'auto-induction. La barre mobile est reliée par l'intermédiaire d'un fil et d'une poulie à une masse M .

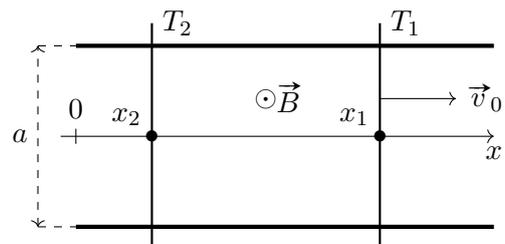
On admettra que, comme M est très supérieure à la masse de la barre, la tension du fil est égale au poids de la masse M , quelle que soit l'accélération de celle-ci. Le circuit est orienté dans le sens défini



- Déterminer le signe du courant ainsi que la valeur minimale de E nécessaire pour que le dispositif puisse soulever la masse.
- Déterminer les équations électrique et mécanique du système lorsqu'il soulève la masse.
- On néglige le phénomène d'auto-induction. Donner les nouvelles équations électriques et mécanique.
- Déterminer la vitesse $v(t)$ de la masse M . Quelle est sa valeur limite v_1 ?
- Faire un bilan de puissance dans le cas où la vitesse de la masse est constante $v = v_1$.

Exercice 2 - Rail avec deux tiges :

Deux tiges T_1 et T_2 identiques (masse m et résistance R) sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles distants de a situés dans un plan horizontal. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et vertical. On repère T_1 par sa position x_1 et T_2 par sa position x_2 . On met en mouvement la tige T_1 avec une vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. On néglige les phénomènes d'autoinduction.



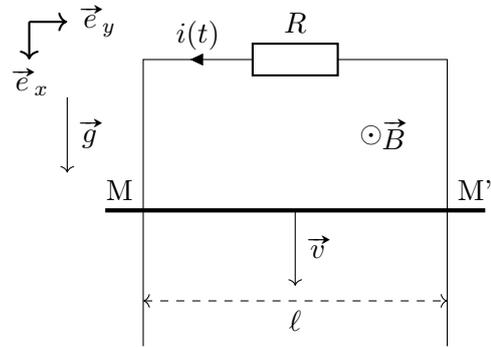
- Expliquer qualitativement l'évolution du système.
- Déterminer la f.é.m en fonction de B , a , $v_2(t)$ et v_0 .
- Écrire les équations mécaniques et électriques régissant la tige T_2 .
- En déduire l'expression de $v_2(t)$, la vitesse de la tige 2. Interpréter.
- On prend désormais en compte la résistance des rails entre T_1 et T_2 . Cette dernière est proportionnelle à l'écart entre T_1 et T_2 , modélisé par $\tilde{R} = 2rT_1T_2$. Donner l'équation différentielle dont x_2 est solution.

Exercice 3 - Rails de Laplace verticaux :

Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de ℓ , glisse sans frottement une tige horizontale MM' , de masse m , grâce à deux contacts glissants M et M' . On considère que l'axe Ox du repère est parallèle aux tiges verticales et l'axe Oy est parallèle à la tige MM' .

On négligera les résistances de la tige MM' et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits.

On produit un champ magnétique \vec{B} uniforme et permanent, normal au plan du circuit formé par la tige MM' et les rails et dirigé suivant \vec{e}_z . On note $\vec{g} = g\vec{e}_x$ l'accélération de la pesanteur.

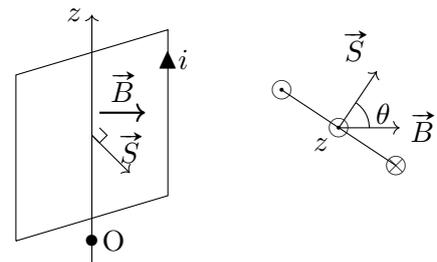


Les extrémités supérieures des rails sont reliées à un résistor de résistance R . La tige MM' est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$. On désignera par $v(t)$ la norme de la vitesse de la tige et $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit à l'instant t .

1. Étudier qualitativement l'évolution du système.
2. Déterminer la force électromotrice e induite dans la tige MM' . En déduire l'équation électrique du montage.
3. Établir l'équation mécanique du système. En déduire l'équation différentielle en $i(t)$ puis celle en $v(t)$. Montrer que i et v tendent vers une valeur limite que l'on précisera.
4. Déterminer la puissance des forces de Laplace et l'exprimer en fonction de $i(t)$. Quel est le lien avec la perte d'énergie potentielle? Conclure sur la conversion électromagnétique.

Exercice 4 - Freinage par induction :

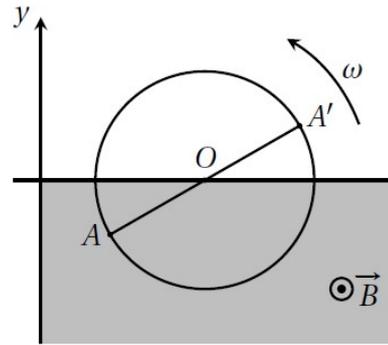
On considère une spire conductrice de surface S , de résistance R et d'inductance propre négligeable, mobile en rotation sans frottement autour d'un axe Oz . Cette spire est de plus plongée dans un champ magnétique \vec{B} uniforme, stationnaire et perpendiculaire à l'axe de rotation. On note J son moment d'inertie par rapport à Oz . À $t = 0$, l'angle $\theta = (\vec{B}, \vec{S})$ entre le champ magnétique et le vecteur surface de la spire est nul et la vitesse de rotation a la valeur ω_0 .



1. Rappeler la relation existant entre ω et l'angle θ .
2. Déterminer la f.é.m. induite dans la spire en fonction de B , S et ω et en déduire l'intensité du courant induit.
3. Déterminer le moment Γ_L du couple des forces de Laplace s'exerçant sur la spire par rapport à l'axe de rotation.
4. On suppose que ω varie peu sur un tour. En déduire le moment moyen sur un tour en fonction de B , S , R et ω . Dans la suite de l'exercice on considèrera cette valeur moyenne et non la valeur instantanée du moment.
5. Déterminer l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. On pourra poser $\tau = 2RJ/(BS)^2$. En déduire $\omega(t)$ en fonction de ω_0 et τ .

Exercice 5 - Roue tournante dans un champ magnétique (*) :

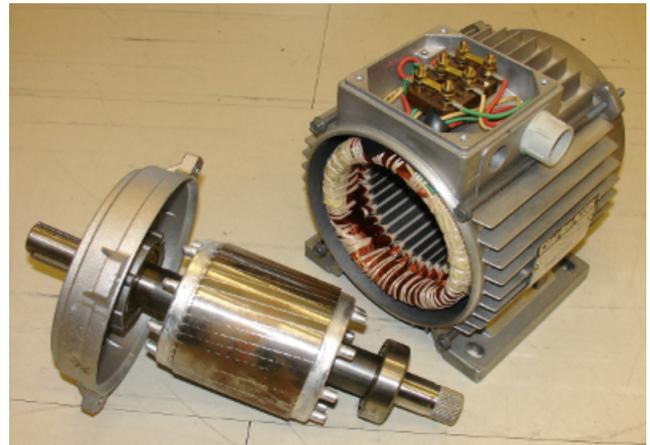
La circonférence et le diamètre d'une roue de rayon a sont conducteurs et ont la même résistance R . La roue est mobile autour de l'axe (Oz) , avec une vitesse de rotation ω . Un champ magnétique permanent $\vec{B} = B\vec{u}_z$ est imposé sur la moitié inférieure de la roue ($y < 0$), le champ magnétique étant nul pour ailleurs ($y > 0$).



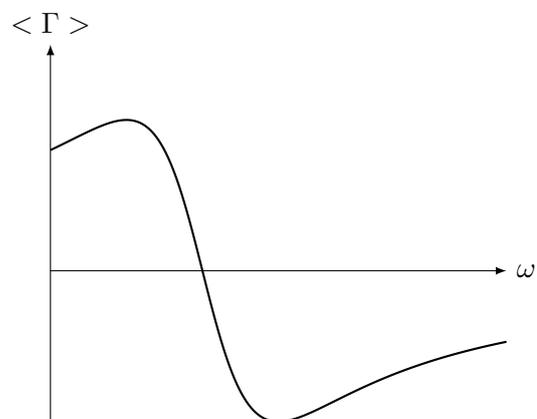
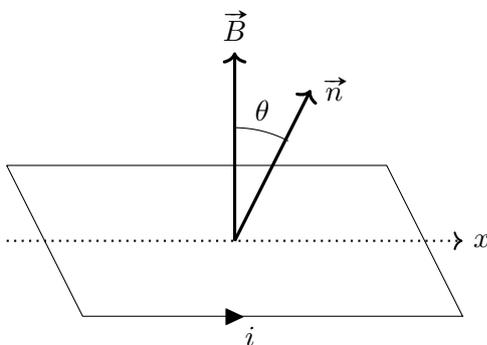
1. Peut-on utiliser la loi de Faraday dans cet exemple ?
2. Exprimer les forces de Laplace infinitésimal sur le cadre circulaire.
3. Exprimer la vitesse d'un point M sur le cadre circulaire et en déduire que la puissance des forces de Laplace est nulle sur le tour de la roue.
4. Exprimer la puissance des actions de Laplace sur le rayon qui se trouve dans le champ magnétique. En déduire la puissance de la f.e.m. qui s'applique sur le rayon de la barre conductrice et donc la valeur de $e(t)$.
5. Exprimer les différent courants qui circulent dans la roue.

Exercice 6 - Moteur asynchrone :

Le bobinage du rotor d'une machine asynchrone peut être modélisé par une spire unique de résistance R , d'inductance L et de surface S tournant à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe (Ox) . La normale \vec{n} à la spire est contenue dans le plan (Oyz) .



Cette spire est plongée dans un champ \vec{B} généré par le stator, localement uniforme, contenu dans le plan (Oyz) , de norme constante, tournant à vitesse angulaire constante ω' autour de (Ox) . Ce dispositif est utilisé en moteur électrique : le champ magnétique entraîne le rotor.



On note θ l'angle entre \vec{B} et \vec{n} . On suppose pour simplifier les notations qu'à $t = 0$, $\theta(0) = 0$. Le couple généré par le champ magnétique sur le rotor est noté Γ . On trace ci-dessus l'évolution de sa moyenne $\langle \Gamma \rangle$ en fonction de ω , la vitesse de rotation du stator.

1. Dans le cas où $\omega \neq \omega'$, expliquer qualitativement pourquoi un courant apparaît dans la spire et donc pourquoi un couple Γ s'exerce.
2. Comment varie le flux magnétique si $\omega = \omega'$? En déduire alors que ω ne peut pas être égale à ω' .
3. Exprimer θ en fonction du temps et $\Omega = \omega' - \omega$ appelée vitesse de glissement.
4. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution du courant dans le rotor. On fera apparaître la vitesse de glissement Ω .
5. On se place en régime permanent et on adopte une représentation complexe des signaux.
 - (a) Montrer que l'amplitude complexe du courant est :

$$I_0 = -\frac{j\Omega SB}{R + jL\Omega}$$

(b) En déduire alors $i(t)$ en fonction de Ω, L, R, B, S . On l'écrira sous la forme $\alpha \cos \Omega t + \beta \sin \Omega t$.

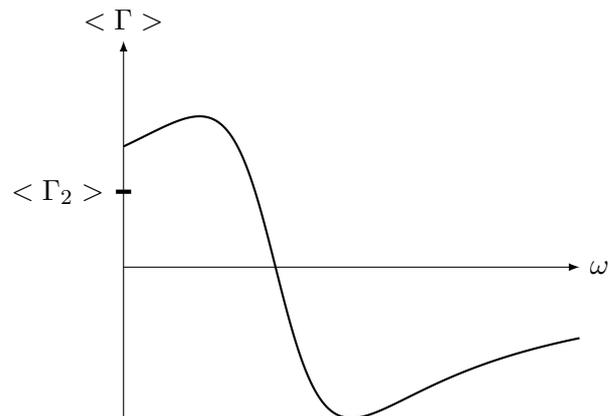
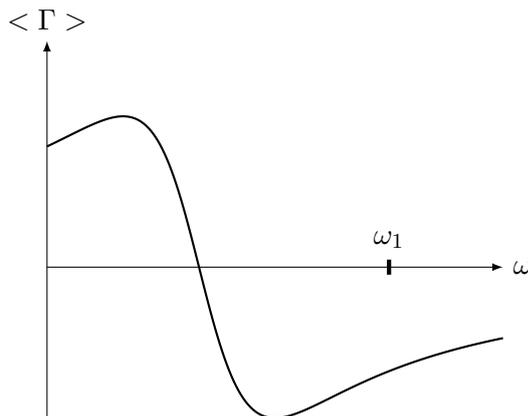
6. Exprimer le couple Γ des forces de Laplace.
7. La valeur moyenne d'un signal $X(t)$ de période T est :

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

Montrer que $\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = 0$ et $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = \frac{1}{2}$.

Astuce : $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

8. En déduire : $\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega (SB)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}$.
9. Au vu de l'allure de la courbe de $\langle \Gamma \rangle$, le moteur peut-il démarrer seul ?
- 10.(a) On veut que le moteur tourne à vitesse angulaire ω_1 . Représenter graphiquement le couple Γ_1 que fournira le moteur. Pour quelle vitesse angulaire le couple fournit sera maximale ?
- (b) On veut que le moteur fournisse un couple Γ_2 . Représenter graphiquement la ou les vitesses angulaires à laquelle le moteur va tourner.



Exercice 1 - Treuil électromécanique :

Petit rappel de mécanique du solide avec les poulie et les fil!!

☛☛☛ **Attention !** Cet exercice a (en autre) pour but de revoir un point "classique" de la mécanique des solides : la force que subit la barre, en plus des forces des rails de Laplace classique ($m\vec{g}$, \vec{R} et \vec{F}_{Lap}) est la **tension du fil** pas le poids de la masse M !!

Pour trouver cette tension du fil, on applique le PFD à la masse M :

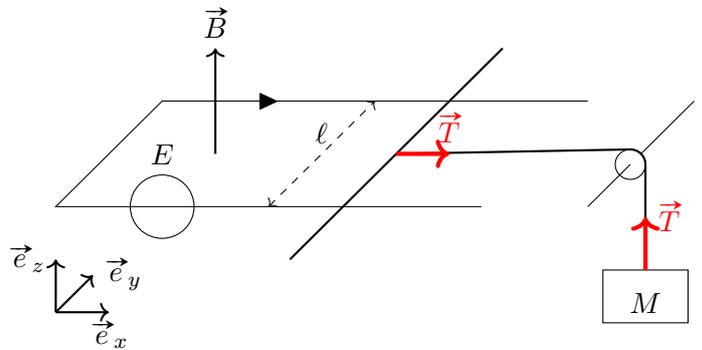
$$M\ddot{z} = T - Mg$$

donc $T = M(\ddot{z} + g)$.

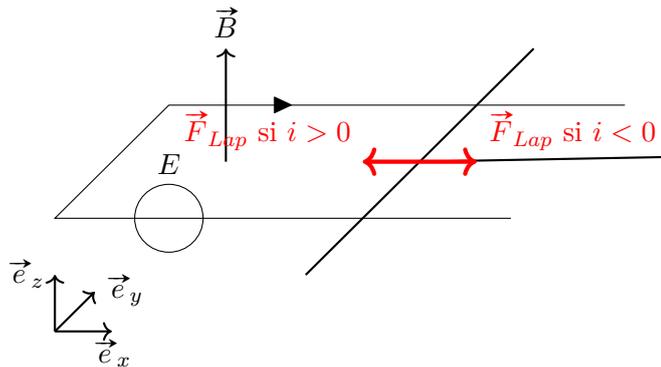
Il faut ensuite relier \ddot{z} (de la masse M) et \ddot{x} (de la barre) : quand la masse descend, la barre bouge vers la droite

$$\ddot{z} = -\ddot{x}$$

Finalement : $T = M(g - \ddot{x})$.



1. On représente le sens des forces de Laplace suivant le signe du courant avec la règle de la main droite :



Pour contrebalancer la tension du fil, $i > 0$.

2. On n'oublie pas de faire les deux schémas mécanique et électrique!!

On trouve (cf μDM pour le détail) :

$$\begin{cases} \text{PFD : } m \frac{dv}{dt} = -lBi(t) + M \left(g - \frac{dv}{dt} \right) \\ \text{Loi des mailles+Faraday : } E = Ri(t) + lBv(t) + L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

3. On néglige l'auto-induction $L = 0$ donc la loi des mailles devient $E = Ri(t) + lBv(t)$. Le PFD reste inchangé..

4. On exprime $i(t)$ avec l'équation électrique $i(t) = \frac{E - lBv(t)}{R}$ et on injecte dans le PFD :

$$(m + M) \frac{dv}{dt} = +Mg - lB \frac{E - lBv(t)}{R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{l^2 B^2}{(m + M)R} v(t) = \frac{Mg}{M + m} - \frac{lBE}{R(M + m)}$$

On définit $\tau = \frac{(m + M)R}{l^2 B^2}$ et on décompose $v(t)$ en :

▷ solution particulière $v_P = v_\infty$ (vitesse au temps longs) $= \frac{MgR}{l^2 B^2} - \frac{E}{lB}$.

▷ solution homogène : $\tilde{v}(t) = Ae^{-t/\tau}$.

CI $v(0) = 0$ donc $A = -v_\infty$ et $v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})$.

5. Avec $v = v_\infty$ on a :

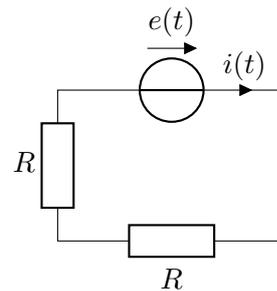
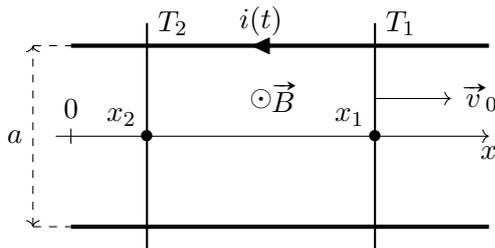
$$\begin{cases} \text{PFD : } 0 = -lBi_\infty + Mg \\ \text{Loi des mailles+Faraday : } E = Ri_\infty + lBv_\infty \end{cases}$$

On multiplie le PFD par v_∞ et la loi des mailles par i_∞ et on somme en annulant les $i_\infty v_\infty$:

$$Ei_\infty = Ri_\infty^2 + Mgv_\infty$$

La puissance fournie par le générateur sert à monter la masse en luttant contre la pesanteur et une partie est dissipée par effet Joule.

Exercice 2 - Rail avec deux tiges :



1. En mettant en mouvement la tige T_1 on modifie la surface du système. Il apparaît alors une f.e.m. induite par loi de Faraday, générant un courant dans le système. La tige T_2 va alors être soumise à une force de Laplace. Par loi de Lenz, cette force va s'opposer à la déformation du circuit, donc F_{Lap} va tirer la tige T_2 vers la droite, pour qu'elle "suive" T_1 .

2. Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \phi_{ext} + \phi_p \simeq \phi_{ext}$ car on néglige l'auto-induction.

$\phi_{ext} = \vec{S} \cdot \vec{B} = (x_1 - x_2)aB$ donc $e(t) = -(v_0 - v_2(t))aB$.

3. **PFD** : $m \frac{dv_2}{dt} = -aBi(t)$; **Loi des mailles** : $-(v_0 - v_2(t))aB = 2Ri(t)$.

4. On trouve $i(t)$ et on a $m \frac{dv_2}{dt} = -aB \frac{-(v_0 - v_2(t))aB}{2R}$ soit :

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{a^2 B^2}{2mR} v_2 = \frac{a^2 B^2}{2mR} v_0$$

D'où $v_2(t) = v_0 (1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = \frac{2mR}{a^2 B^2}$.

5. On aurait alors dans l'équation électrique : $-(v_0 - v_2(t))aB = 2Ri(t) + 2r(v_0 t - x_2(t))i$ et donc :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{a^2 B^2}{2m(R + r(v_0 t - x_2))} \frac{dx_2}{dt} = \frac{a^2 B^2}{2m(R + r(v_0 t - x_2))} v_0$$

Exercice 3 - Rails de Laplace verticaux :

Correction rapide, on a déjà fait ça 10 fois. Ça doit fuser!!

1. Loi de Lenz ... tout ça ...
2. Faraday : $e(t) = -lBv(t)$ et $-lBv(t) = Ri(t)$
3. **PFD** $m \frac{dv}{dt}(t) = mg + lBi(t)$. On veut remplacer $v(t)$ dans l'équation électrique mais on n'a que $\frac{dv}{dt}$ dans celle mécanique \Rightarrow on dérive!!

$$R \frac{di}{dt} = -lB \frac{dv}{dt} \Rightarrow R \frac{di}{dt} = -lB \frac{mg + lBi(t)}{m} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{l^2 B^2}{mR} i(t) = -\frac{lBg}{R}$$

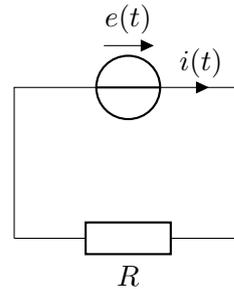
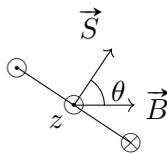
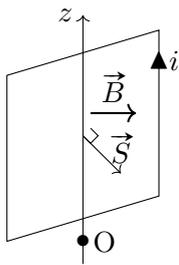
Pour l'équation mécanique on remplace $i(t)$ dans le PFD comme d'habitude. Pour les valeurs limites on cherche les solutions particulière de chaque équation.

4. $\mathcal{P}_{Lap} = lBi(t)v(t) = -\frac{l^2 B^2}{R} i^2(t)$. Dans le bilan de puissance mécanique :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 \right] = \mathcal{P}_{Lap} - \frac{dE_p}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} [E_c + E_p] = \mathcal{P}_{Lap}$$

En régime permanent, la variation d'énergie cinétique est nulle et la puissance des forces de Laplace est égale à la variation d'énergie potentielle : à partir du travail mécanique du poids, on a bien créé un courant électrique qui fournit une puissance. C'est une conversion mécanique \rightarrow électrique.

Exercice 4 - Freinage par induction :



1. $\theta = \omega t$ **Attention ! VRAI** vrai si seulement ω est constant ! $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ sinon !!

2. Loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = \phi_{ext} + \phi_p \simeq \phi_{ext} = \vec{S} \cdot \vec{B} = BS \cos \omega t$.

On a alors $i(t) = \frac{BS}{R} \omega \sin \omega t$

3. **Moment du couple des forces de Laplace** : $\Gamma_L = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_\Delta$. Ici :

$$\Gamma_L = (i(t)S (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_x) \cdot \vec{e}_z = -BSi(t) \sin \omega t$$

On a alors $\Gamma = -\frac{B^2 S^2}{R} \sin^2 \omega t < 0$, il s'oppose à la rotation, c'est la loi de Lenz.

4. On calcule la moyenne sur $t : 0 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{B^2 S^2}{R} \sin^2 \omega t dt = -\frac{1}{T} \frac{B^2 S^2}{R} \int_0^T \sin^2 \omega t dt$$

Un peu de trigo (**Attention ! calcul classique à savoir refaire !!**) :

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{2} \left(T - \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T \right) = \frac{T}{2}$$

puisque $\sin 2\omega T = \sin 2\frac{2\pi}{\omega} T = 0$. On a alors $\langle \Gamma_L \rangle = -\frac{B^2 S^2}{2R}$.

5. Avec le **TMC** : $J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2 S^2}{2R}$. Finalement $\omega(t) = \omega_0 - \frac{B^2 S^2}{2JR} t$.

Exercice 5 - Roue tournante dans un champ magnétique (*) :

1. C'est la cas typique où on ne peut pas l'utiliser simplement. La loi de Faraday stipule $e(t) = -d\phi/dt$ avec ici $\phi = \vec{S} \cdot \vec{B}$. Problème, comment définir \vec{S} ? On pourrait prendre la partie du circuit qui se trouve dans le champ \vec{B} (i.e. un demi-cercle) mais elle est constante au cours du temps \Rightarrow il n'y aurait pas de phénomène d'induction.

Il va falloir ruser ...

2. Sur le cadre circulaire, quelque soit l'orientation du sens du courant le vecteur directeur $\vec{u} = \pm \vec{e}_\theta$.
Donc : $d\vec{F}_L = i \pm \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z a d\theta = \pm i a B d\theta \vec{e}_r$.

3. La vitesse d'un point M sur le cadre circulaire est $\overrightarrow{OM} = a \vec{e}_r \Rightarrow v(M) = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$.

La puissance des force de Laplace est donc $d\mathcal{P}_L = d\vec{F}_L \cdot \vec{v}(M) = \pm i a^2 B \dot{\theta} d\theta \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$

4. On fait pareil sur le rayon (en prenant un sens de courant orienté suivant \vec{e}_r) :

▷ force infinitésimale : $d\vec{F}_L = i \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z dr = -i B dr \vec{e}_\theta$

▷ vitesse d point : $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}(M) = r \omega \vec{e}_\theta$.

🔴🔴🔴 **Attention !** pas de $\dot{r} \vec{e}_r$: la position d'un point M sur le cadre ne varie pas au cours du temps!!

▷ puissance infinitésimale : $d\mathcal{P} = -i B \omega r^2 dr$.

On intègre pour $r : 0 \rightarrow a$:

$$\mathcal{P}_L = \int_0^a -i B \omega r dr = -i B \omega \frac{a^2}{2}$$

Propriété importante :

la puissance des force de Laplace sur un circuit est égale à l'opposé de celle de la *f.e.m.* induite!!

$$\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_{fem} \Rightarrow -i B \omega \frac{a^2}{2} = e i \Rightarrow e = -B \omega \frac{a^2}{2}$$