

Travail demandé

Le devoir dure 3h.

Les deux parties peuvent se traiter indépendamment les unes des autres. Ayez confiance en vous, vous savez faire plein de choses ! Prenez votre temps à chaque question pour expliquer votre démarche.

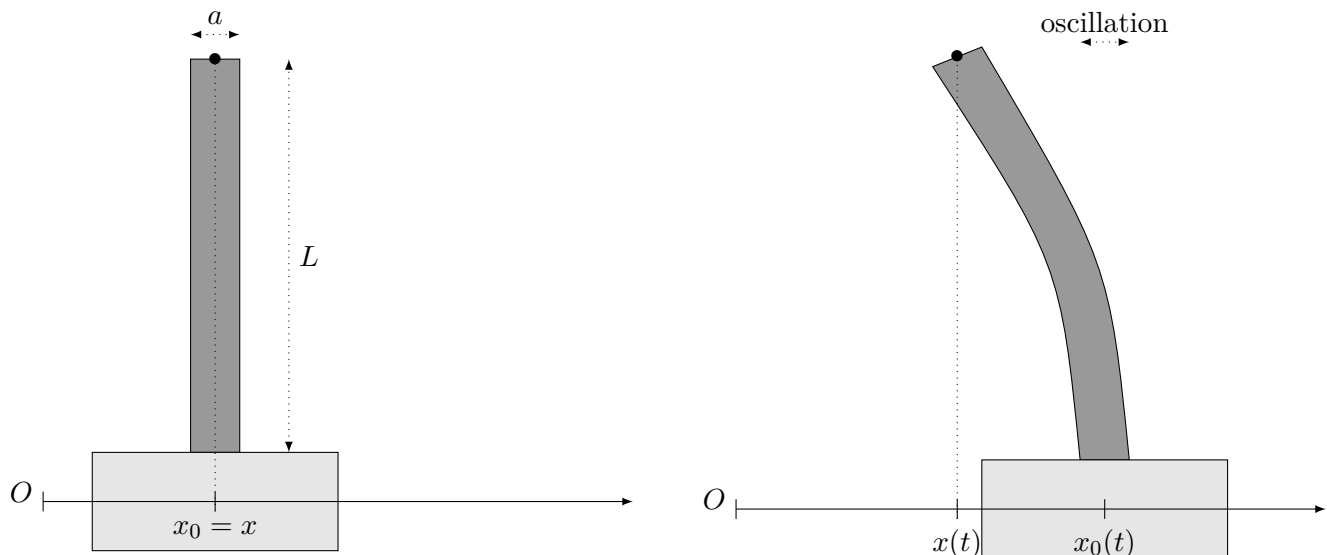
Rappel : Les erreurs d'homogénéité flagrantes seront sanctionnées. **La réponse à une question doit être justifier et doit prendre la forme d'une formule littérale encadrée ou soulignée.**

La calculatrice est autorisée. Bon courage !

Vibrations forcées d'une barre

Une barre rigide (*gris foncé*) est fixée sur un support (*gris clair*). On repère la position du centre du support mobile par son abscisse x_0 et celle de l'extrémité de la barre par son abscisse x . Au repos, la barre est droite $x = x_0$ (*figure de gauche*).

Le support peut être mis en mouvement et se déplacer suivant l'axe horizontale. La barre va alors légèrement se tordre et son extrémité ne sera plus aligné avec sa base $x \neq x_0$ (*figure de droite*). On impose au support un mouvement sinusoïdale $x_0(t) = X_0 \cos \omega t$. Ce dispositif permet de modéliser en laboratoire et à échelle réduite la réponse d'un immeuble à une vibration du sol, comme celle générée par un tremblement de terre ou le passage d'un train.



On peut montrer que le mouvement de l'extrémité de la barre est solution de l'équation différentielle suivante.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{4L^3}{Ea^4} (x - x_0) - \alpha \frac{dx}{dt}$$

où m est la masse de la barre, L sa longueur, a sa largeur, E son module d'Young (représentant sa rigidité) et α un coefficient représentant les pertes d'énergie lié aux frottement au sein de la barre.

On cherche alors le mouvement de la barre aux temps long sous la forme : $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$

1. Introduire proprement le formalisme complexe pour les signaux $\underline{x}_0$ et $\underline{x}$. On notera $\underline{X}$ l'amplitude complexe de x .
2. Montrer que $\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega\underline{x}$. En déduire $\frac{d^2\underline{x}}{dt^2}$.
3. Montrer que l'amplitude complexe $\underline{X}$ du mouvement de la barre peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{X} = \frac{X_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec ω_0 et Q qu'on exprimera à partir de m , L , a , E et α

4. En déduire l'amplitude X des oscillations de l'extrémité de la barre ainsi que son déphasage φ par rapport au mouvement du sol.
5. Pour quelle pulsation ω le mouvement du support et de l'extrémité de la barre sont en quadrature de phase.
6. Montrer qu'il existe un phénomène de résonance seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$.
On se place pour la suite dans le cas où il existe une résonance.
7. Donner l'expression de la pulsation de résonance en fonction de ω_0 et Q .
On mesure en laboratoire une pulsation propre $\omega_0 = 302$ rad/s et une bande passante $\Delta\omega = [292, 310]$ rad/s.
8. Donner le facteur de qualité Q du système.
9. En déduire qu'on peut approximer $\omega_r = \frac{2}{a^2} \sqrt{\frac{L^3}{mE}}$
10. Donner l'amplitude des oscillations à la pulsation de résonance.
11. Expliquer pourquoi les oscillations dues à un séisme, bien que de quelques centimètres en amplitude, peuvent endommager voir détruire des immeubles.

On a réalisé une maquette d'un immeuble en utilisant les mêmes matériaux (même valeur de E et α) mais à l'échelle 1/100 (valeur de a et L 100 fois plus grandes dans la réalité). On notera par un tilde les grandeurs dans la réalité.

12. Montrer qu'il existe un facteur 0, 1 entre la pulsation de résonance réelle $\tilde{\omega}_r$ et celle mesurée en laboratoire ω_r , $\tilde{\omega}_r = 0, 1\omega_r$.
13. Même question pour le facteur de qualité réel $\tilde{Q}$.
14. Calculer la fréquence de résonance $\tilde{f}_r$ d'un immeuble ainsi que son facteur de qualité. Faire les applications numériques.

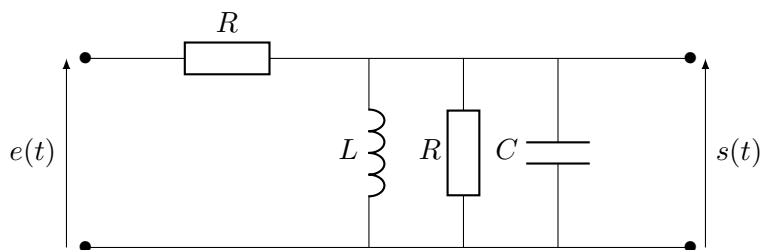
On donne en annexe l'enregistrement du mouvement de la terre lors d'un séisme.

15. Mesurer la période T du signal et en déduire sa fréquence f .
16. Compléter les valeurs des fréquences des différentes harmoniques du signal sur le spectre donné en annexe.
17. Observera-t-on un phénomène de résonance ? Justifier.

Etude d'un filtre

On considère le quadripôle suivant, étudié en boucle ouverte. Le signal $e(t)$ est une tension sinusoïdale de la forme $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$.

On se place en régime sinusoïdal forcé. On prendra comme valeur $L = 10\text{mH}$.



Etude fréquentielle du filtre

1. Faire le circuit équivalent du filtre à basses et hautes fréquences. En déduire la nature du filtre.
2. Montrer que :

$$\underline{s} = \frac{j \frac{L}{R} \omega}{1 - LC\omega^2 + 2j \frac{L}{R} \omega} \underline{e}$$

3. En déduire que la fonction de transfert $\underline{H}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On explicitera les valeurs de Q , H_0 et ω_0 en fonction des données du problème.

4. Donner le gain, le gain en décibel G_{dB} ainsi que le déphasage φ du filtre.
5. Quelle fréquence est la moins atténuée par le filtre ? Justifier.

On donne en annexe le diagramme de Bode en gain de deux filtres où les valeurs de R et C ont été modifiées.

6. Sur chacun, représenter la bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ ainsi que la pulsation de coupure ω_0 . En déduire que les deux filtres ont la même valeur de capacité C .
7. Donner pour chacun des deux filtres le facteur de qualité Q ainsi que la valeur de la résistance R utilisée.
8. Donner les équations des asymptotes du filtres pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$. On précisera leur pentes.
9. Montrer qu'à basses fréquences, le filtre possède un effet dérivateur.
10. Montrer qu'à hautes fréquences, le filtre possède un effet intégrateur.

Traitement d'un signal par le filtre

Filtrage d'un signal simple

11. On alimente le filtre 2 avec le signal d'entrée :

$$e(t) = e_0 + e_0 \cos 3\omega_0 t + \frac{e_0}{2} \cos \omega_0 t + 2e_0 \cos \frac{\omega_0}{10} t$$

avec $e_0 = 1,0\text{V}$. Représenter le spectre en amplitude du signal d'entrée. (l'axe des abscisses n'a pas besoin d'être à l'échelle)

12. Donner l'expression du signal de sortie et représenter son spectre en amplitude. (l'axe des abscisses n'a pas besoin d'être à l'échelle). On donnera l'expression des amplitudes des harmoniques.

Filtrage d'un enregistrement sonore

On veut isoler dans un enregistrement audio les voix d'une conversation. Le spectre de la voix humaine (en **fréquence**) est $[100\text{Hz}, 2000\text{Hz}]$.

13. Justifier qu'un filtre passe-bande est le mieux adapté pour ce qu'on veut faire.
14. Donner la bande-passante ainsi que la fréquence de coupure du filtre à utiliser. En déduire le facteur de qualité Q du filtre.
15. Donner des valeurs de R et C qui permettraient de filtrer au mieux l'enregistrement.

► Filtrage d'un bruit blanc

Zéro calculs pour ces 2 questions

Un bruit blanc est un signal qui contient toutes les fréquences réparties de façon uniforme, *i.e.* toutes les fréquences ont la même amplitude A_0

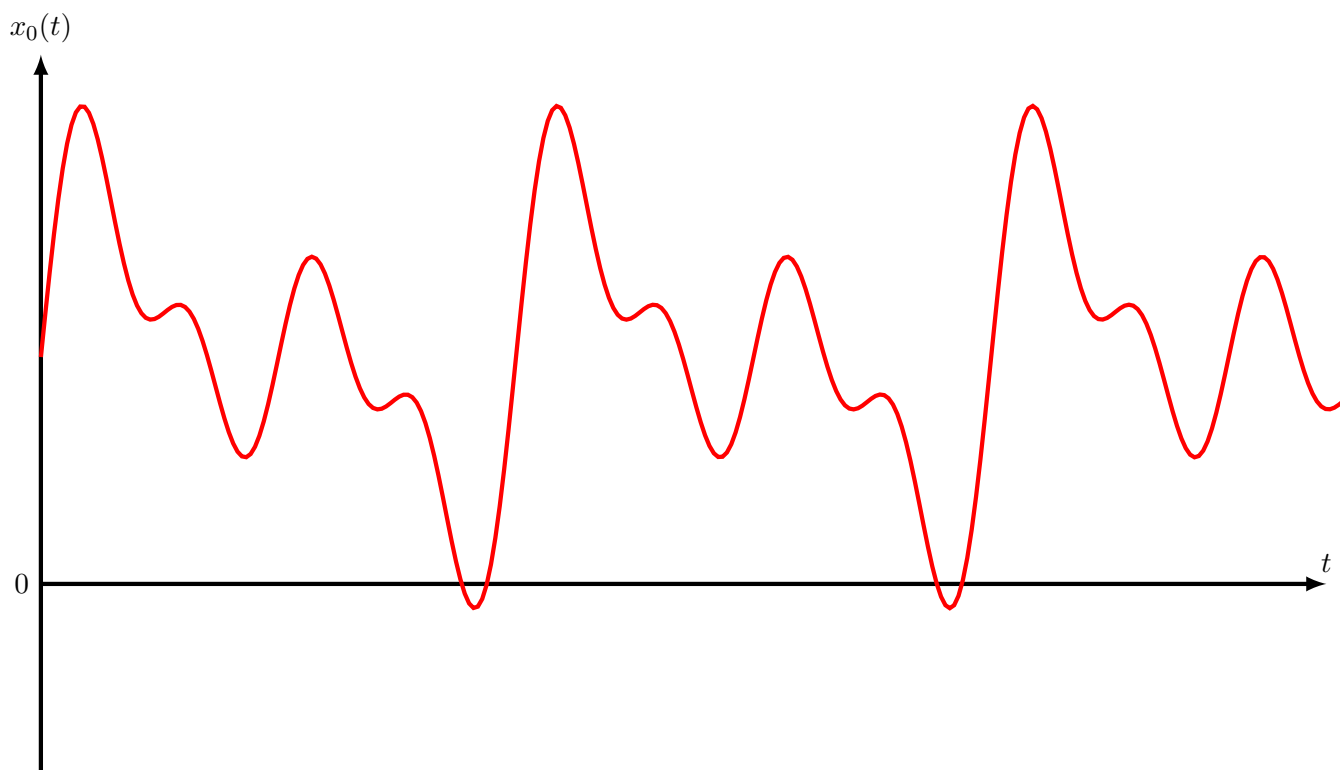
16. Représenter le spectre en amplitude d'un bruit blanc.
17. On envoie comme signal d'entrée du filtre un bruit blanc. Quel graphe bien connu retrouve-t-on si on trace le spectre du signal de sortie ?

Annexe

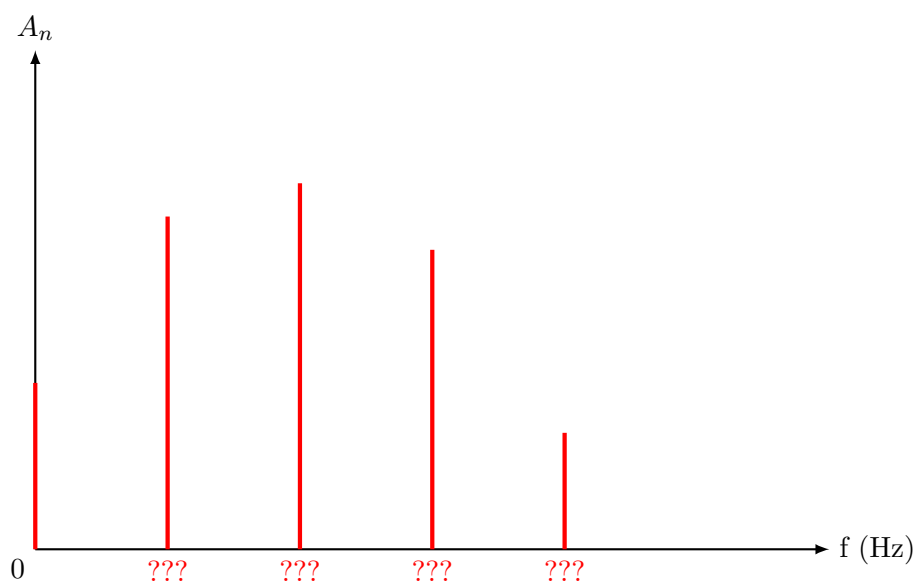
Vibration forcées d'une barre

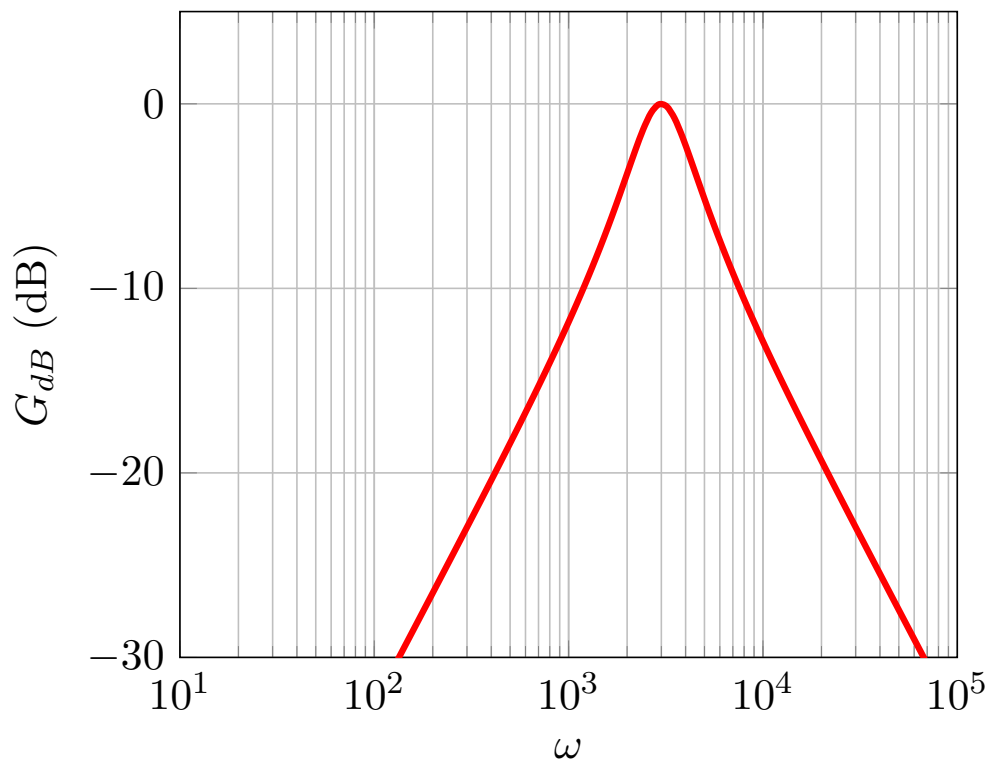
Déplacement vertical du mur

Échelle horizontale : 1cm $\leftrightarrow$ 100ms; Échelle verticale : 1cm $\leftrightarrow$ 5mm



Spectre de x_0



Etude d'un filtre**Filtre 1****Filtre 2**