DS 04 Physique ondulatoire

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Travail demandé

Le devoir dure 3h.

Les deux parties peuvent se traiter indépendamment les unes des autres. Ayez confiance en vous, vous savez faire plein de choses ! Prenez votre temps à chaque question pour expliquer votre démarche.

Rappel : Les erreurs d'homogénéité flagrantes seront sanctionnées. **La réponse à une question doit être justifier et doit prendre la forme d'une formule littérale encadrée ou soulignée.**

La calculatrice est autorisée. Bon courage !

Vibration d'une corde d'un instrument de musique

Le clavecin est un instrument à corde pincées alors que le piano est un instrument à corde frappée. Les deux instruments produisent leur son de la même façon : c'est la vibration d'une corde de longueur L attachée à ses deux extrémité qui génère le son. La différence entre les deux instruments provient de la façon de générer la vibration : soit en la pinçant, pour un clavecin, soit en la frappant, pour un piano.

Une corde de musique est modélisée par un fil de longueur L et de masse m. Sa masse linéique μ est le rapport de sa masse sur sa longueur. La tension T de la corde est la force (en Newton) nécessaire pour que la corde reste tendue. Dans sa position d'équilibre, la corde est supposée horizontale. Chaque point de la corde est repéré par son abscisse x et son élongation verticale y dans un repère $(\mathrm{O}xy)$.

1. Par analyse dimensionnelle, trouver l'expression de la célérité c des ondes se propageant sur la corde en fonction de μ et de sa tension T.

Étude des modes propres

Dans toute la suite du problème, la position de la corde (fixée à ses deux extrémités) à l'abscisse x et au temps t sera notée $y(x,t)$. On s'intéresse au mode propres de vibrations de la corde d'expression :

$$y_n(x,t) = A_n \cos\left(\omega_n t + \Psi_n\right) \cos\left(k_n x + \varphi_n\right)$$

On prendra comme valeur pour toute les cordes $c = 640\mathrm{m/s}$.

2. Représenter les trois premiers modes propres de vibration. On précisera pour chacun sa longueur d'onde λ_n. Proposer alors une expression pour le fondamentale f de la corde vibrante.
3. A l'aide des conditions aux limites, montrer que les vecteur d'onde k_n sont des multiples d'un même vecteur d'onde : $k_n = nk$. On précisera l'expression de k.
4. En déduire l'expression des fréquences f_n des modes propres en fonction de n, L et c. Exprimer alors le fondamentale f de vibration de la corde.
5. Une des cordes d'un piano possède une longueur $L = 73\mathrm{cm}$. A quelle note correspond-elle ?

   Considérons une note jouée au piano et au clavecin. On donne dans le tableau suivant les amplitudes des fréquences apparaissant dans le spectre des deux notes.

6. Joue-t-on la même note dans les deux cas ? Justifier.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f **(Hertz)**	440	880	1320	1760	2200	2640	3080	3520
Amplitude en % (piano)	100	50	33	22,5	20	16,6	14,3	12,5
Amplitude en % (clavecin)	100	0	11,1	0	4,0	0	2,5	0

Tab. 1 – Spectre de deux son joués par un piano et un clavecin.

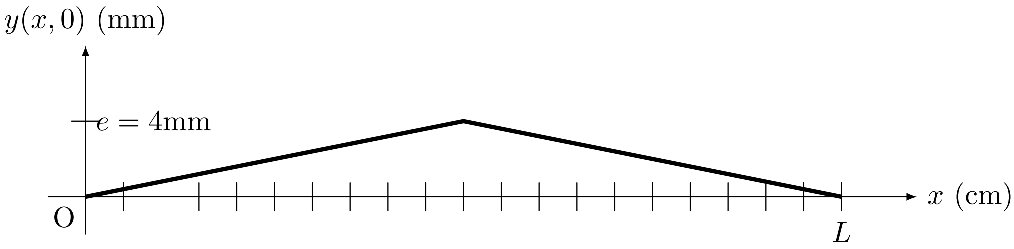
On cherche à comprendre comment à partir de la façon dont la vibration est générée (pincée ou frappée) on obtient de telles différences. On étudie la vibration $y(x,t)$ d'une corde pincée. On décompose la vibration de la corde suivant tous ses modes propres de vibration :

$$y(x,t) = \sum_n A_n \cos(2\pi fnt + \Psi_n) \sin(nkx)$$

avec f et k les grandeurs trouvées précédemment.
On va chercher à expliciter les A_n et Ψ_n à l'aide des conditions initiales.

Corde pincée : le clavecin

Pour une corde pincée de clavecin, à $t = 0$:
- ▷ la corde est déformée, on donne ci-dessous le profile de la corde à $t = 0$
- ▷ la corde est immobile $y'(x,0) = 0$.



7. Calculer $y'(x,t)$. En déduire alors les valeurs des Ψ_n.
8. Justifier à l'aide du profil de la corde pourquoi tous les mode pairs sont nuls.

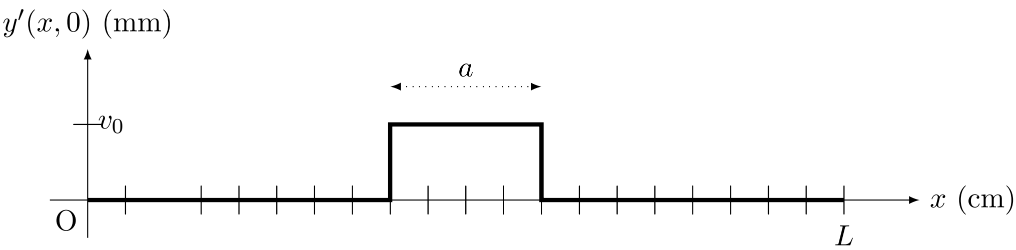
La transformée de Fourier spatiale d'un signal triangulaire F d'amplitude e donne :

$$F[x] = \sum_{n \text{ impair}} \frac{8e}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi fnt) \sin(nkx)$$

9. En déduire l'expression des A_n.
10. A l'aide d'une régression linéaire (*on précisera sur la feuille les axes du graphe*), vérifier que l'expression théorique de A_n est en accord avec les observations expérimentales.

Corde frappée : le piano

Pour une corde frappée de piano, à $t = 0$:
- ▷ la corde est non-déformée, $y(x,0) = 0$
- ▷ la corde est mis en mouvement , on donne ci-dessous le profile de vitesse de la corde à $t = 0$



11. A l'aide de la condition initiale sur la position $y(x,0)$, donner les valeurs de Ψ_n.

    On donne la transformée de Fourier spatiale d'un signal créneau d'amplitude v_0 et de largeur a :

$$F[x] = \sum_n \frac{2v_0 a}{L} \cos(2\pi f n t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} n x\right)$$

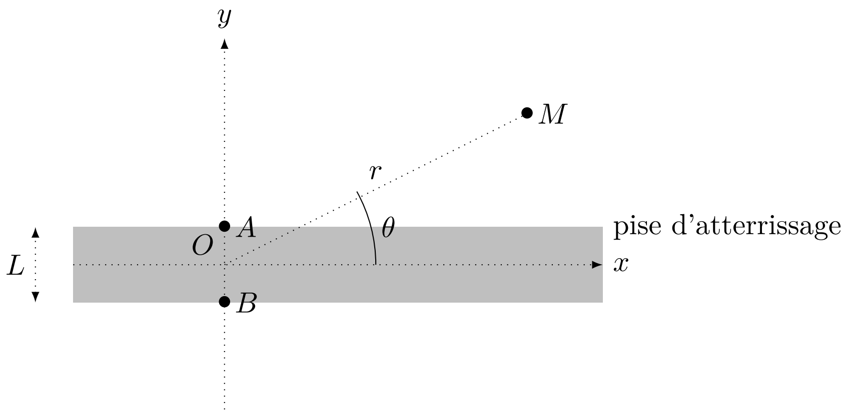
12. A l'aide de la dérivée de $y'(x,0)$, montrer que :

$$A_n = \frac{v_0 a}{\pi L f n}$$

13. Plus un son a d'harmonique, plus il est mélodieux à l'oreille. Justifier que le piano à supplémenter le clavecin. On donnera deux arguments liés aux harmoniques.

Guidage d'un avion par interférences

Sur une piste d'atterrissage, deux sources d'ondes radio S_1 et S_2 sont situées sur deux antennes de guidage aux points A et B, de part et d'autre d'une piste d'atterrissage. Elles sont séparées de $L = 45$m. Les deux sources émettent deux signaux radio sinusoïdaux, en phase, de même fréquence $f = 10,0$ MHz. Un avion se dirige vers la piste, en visant le milieu O des 2 antennes. On repère sa position par l'angle θ avec l'axe de la piste. L'objectif de l'avion est d'arriver dans la direction de la piste d'atterrissage, avec un angle $\theta = 0$.
On notera $r = OM$ la distance entre le centre de la piste et l'avion.



1. La longueur d'onde des ondes radios émises est de 30m. En déduire la valeur de leur vitesse de propagation c dans l'air.
2. Un détecteur d'onde radio possède un temps de réponse τ de 10^{-10}s. Justifier qu'un détecteur d'onde radio mesure le signal de l'onde et non son intensité moyennée comme pour le cas d'un détecteur de lumière.

L'avion est très éloigné des antennes : $r \gg L$.

3. **On se place dans le cas où l'avion est sur la bonne trajectoire : $\theta = 0$.**
   (a) Quel type d'interférences observe-t-on ? Justifier.
   (b) En supposant que l'avion est initialement bien orienté ($\theta = 0$), comment le pilote peut-il faire en sorte de rester sur la bonne trajectoire ?

4. **On se place dans le cas où l'avion est très mal orienté : $\theta = \pi/2$.**
   (a) Déterminer l'amplitude du signal reçu par le pilote de l'avion.
   (b) En déduire alors l'intérêt de la valeur de L choisi pour l'espacement entre les deux antennes radios.

   On se place dans le cas où l'avion est sur une trajectoire quelconque : $\theta \in [0, \pi/2]$.

5. Montrer que :

$$BM = \sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4} + rL\sin\theta}$$

6. Montrer que pour $r >> L$ la différence de marche au point M s'écrit $\delta = L\sin(\theta)$.
   On rappelle que $\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon/2$ si $\varepsilon << 1$.
7. En déduire les angles θ_n pour lesquelles l'amplitude du signal reçu est maximale.
8. Combien il y a-t-il d'axes sur lesquels l'amplitude du signal est maximale ? Les représenter sur un schéma.
9. Pour guider les avions aux mieux, combien faudrait-il qu'il y ait d'axe sur lesquels l'amplitude du signal est maximal ? En déduire la fréquence f à appliquer aux ondes.

Trajectoire de l'avion

On étudie dans cette partie une trajectoire d'approche de l'avion. Initialement l'avion est à une distance D du centre de la piste et se dirige droit vers le centre de la piste, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$.
L'avion décrit ensuite une courbe plane d'équation, en coordonnées polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$r(t) = De^{-t/\tau} \text{ et } \theta(t) = \theta_0 - \xi t^2/2$$

1. On donne en annexe la trajectoire de l'avion. Représenter dessus le système de coordonnées polaire. On fera apparaitre les vecteurs de la base ainsi que le deux coordonnées r et θ.
2. Exprimer la trajectoire $r[\theta]$ de l'avion.
3. Exprimer les vecteurs position et vitesse de l'avion en fonction de D, τ, t, ξ et des vecteurs de la base.
4. Vérifier que la vitesse initiale de l'avion est bien orientée vers O.
5. Exprimer la vitesse $v(t)$ de l'avion au cours du temps. Montrer que $\tau = D/v_0$.
6. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ de l'avion.

Annexe