DS 05 Mécanique du point

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Travail demandé

Le devoir dure 3h.

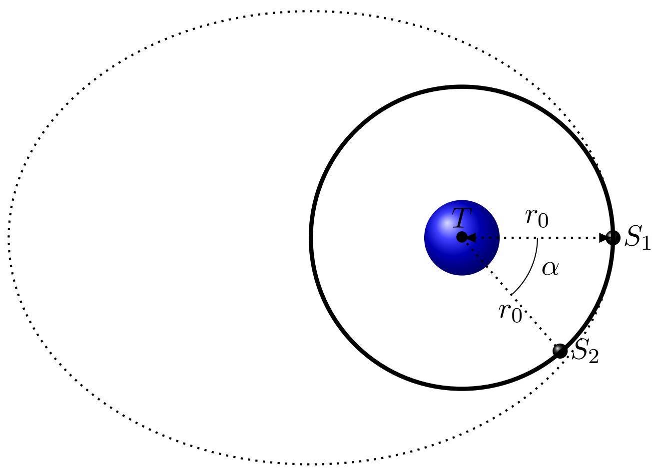
Les deux parties peuvent se traiter indépendamment les unes des autres. Ayez confiance en vous, vous savez faire plein de choses ! Prenez votre temps à chaque question pour expliquer votre démarche.

Rappel : Les erreurs d'homogénéité flagrantes seront sanctionnées. **La réponse à une question doit être justifier et doit prendre la forme d'une formule littérale encadrée ou soulignée.**

La calculatrice est autorisée. Bon courage !

Rattraper un satellite

On s'intéresse au mouvement d'un satellite S_1, de masse m_1, en orbite autour de la Terre, masse M_T. On désigne par $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle et on appelle r la distance Terre-satellite, mesurée depuis le centre de la planète.
On introduit un système de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ lié au satellite S_1. Toute l'étude se fera dans le référentiel terrestre.



Mouvement du satellite S_1

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation universelle. Justifier que c'est une force centrale conservative et exprimer son énergie potentielle E_p.
2. Montrer que le mouvement du satellite est plan.
3. Montrer que la grandeur $r^2\dot{\theta}$ est constante, notée C.
4. Montrer l'énergie potentielle E_m du satellite S_1 peut s'écrire comme :
$$E_m = \frac{m_1}{2}\dot{r}^2 + E_{p,eff}[r]$$
où $E_{p,eff}[r]$ est une énergie potentielle effective qu'on exprimera en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m_1, C et r.
5. Représenter schématiquement le graphe de $E_{p,eff}$ et discuter les différents mouvements possibles du satellite en fonction de la valeur de son énergie mécanique.

On suppose par la suite que le satellite S_1 possède un mouvement circulaire de rayon r_0.

6. Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la vitesse v_0 du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r_0.
7. Estimer la constante des aires C du satellite, ainsi que sa période T_0 de révolution en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r_0.
8. Donner le rayon R_T d'une trajectoire géostationnaire.

Faire rencontrer deux satellites

Un autre satellite S_2, de m_2, est sur la même orbite circulaire de rayon r_0 que S_1 mais le satellite S_2 possède un retard angulaire α avec le satellite S_1 (*cf schéma*).

9. Justifier sans calcul que le satellite S_2 possède la même vitesse que S_1.

On souhaite faire se rencontrer ces deux satellites. Pour cela, on augmente quasi-instantanément la vitesse du satellite S_1 de v_0 à la vitesse $v_1 = Kv_0$ avec $K > 1$.

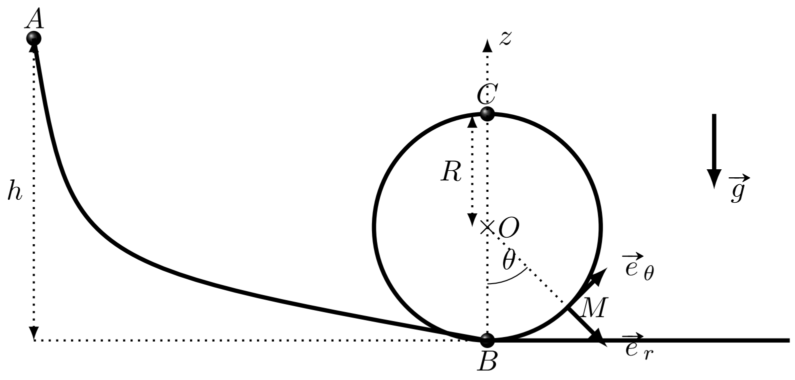
10. Montrer que la nouvelle trajectoire est elliptique uniquement si $K < \sqrt{2}$. Que se passe-t-il si $K > \sqrt{2}$?

On cherche la valeur de K de sorte à ce que les satellites S_1 et S_2 puissent se rencontrer après une révolution sur leur trajectoire respective. On suppose alors que $K < \sqrt{2}$.

11. Exprimer le demi grand-axe a de la trajectoire de S_1 en fonction de K et r_0.
12. Montrer que le temps mis par S_2 pour se retrouver à la position initiale de S_1 **après une révolution** est :
$$\Delta t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{\mathcal{G}M_T}}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$$
On rappelle la longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle α : $R\alpha$.
13. En déduire que pour que le deux satellites se rencontrent, K doit vérifier la relation suivante :
$$\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)(2-K^2)^{3/2} = 1$$
On remarque alors que dans l'espace, pour être rattrapé par un retardataire, il faut accélérer.
14. Sans calcul, mais avec l'aide d'un schéma, proposer une méthode pour que S_2 rattrape S_1 mais en faisant varier cette fois-ci la vitesse de S_2.

Looping

On lâche une bille de masse m sans vitesse initiale depuis le haut d'un circuit de bille, point A. La bille va accélérer le long d'une rampe jusqu'au point B puis effectuer un looping de rayon R. On se demande à quelle condition sur h le looping est réussi.
La position de la bille sera repérée par le point mobile M et on introduit un système de coordonnée polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ pour suivre le mouvement de la bille lors du looping. On note v la vitesse de la bille au cours du mouvement.



On adopte dans un premier temps un modèle sans frottement (ni solide ni fluide).

Hauteur minimale pour réussir un looping

1. Exprimer la vitesse de la bille en B en fonction de g et h.
2. Exprimer l'accélération de la bille lors du looping en fonction de v, de sa dérivée, du rayon R du looping et des vecteurs de la base
3. Projeter le Principe Fondamentale de la Dynamique sur les vecteurs de la base polaire. En déduire une expression de N, la norme de la réaction du support, en fonction de v, R, m, g et θ.
4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur de la bille en fonction de g, R et θ.
5. Montrer alors que :
$$v[\theta] = \sqrt{v_B^2 + 2gR\left(\cos\theta - 1\right)}$$
6. En déduire une expression de N en fonction de m, g, h, R et de l'angle θ.
7. Donner une condition sur N pour que le looping soit réussi. Montrer alors que la bille réussi le looping si elle est lâchée depuis une hauteur $h > \frac{5}{2}R$.
8. Pourquoi a-t-on trouvé la hauteur h minimale pour réussir le looping ?

Prise en compte des frottements fluides

Dans une seconde partie, on va chercher à prendre en compte les forces de frottement fluide qui ralentissent la bille. En raison de la vitesse de cette dernière, on choisit une force de frottement quadratique $\overrightarrow{F} = -\kappa v \overrightarrow{v}$.

9. Donner les unités du coefficient κ.
10. Montrer que l'équation du PFD projeté suivant $\overrightarrow{e}_\theta$ s'écrit alors :
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\kappa}{m}v^2 = -g\sin\theta$$
11. On pose la fonction $u(\theta)$ définie par $u = v^2$. Par un changement de variable, montrer que :
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 2R\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
12. Montrer qu'on obtient alors une équation différentielle de la forme :
$$\frac{du}{d\theta} + \alpha u = -2gR\sin\left(\theta\right)$$
Préciser l'expression de α en fonction des données du problème.
13. Donner la forme générale u_h des solutions de l'équation homogène. On l'exprimera à une constante près.
14. On cherche une solution particulière sinusoïdale de la forme :
$$u_\mathrm{p}(\theta) = A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$$
En injectant cette solution dans l'équation différentielle précédente, et en évaluant l'expression aux angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$, donner l'expression de A et B en fonction de g, R, α et α^2.
15. A l'aide de la condition initiale, donner l'expression de $u(\theta)$.
16. En déduire une nouvelle expression de la réaction normale N du support et une nouvelle condition sur R pour que le looping soit réussi.
(Oui oui c'est très moche ...)