DS 08 — Mouvement de particules chargées et induction

Lycée Louis Thuillier - Physique - PCSIB

Travail demandé

Le devoir dure 3h.
Les différentes parties peuvent se traiter indépendamment les unes des autres.
Ayez confiance en vous, vous savez faire plein de choses ! Prenez votre temps à chaque question pour expliquer votre démarche.
La calculatrice est autorisée. Bon courage !

Effet Zeeman et approche perturbative

L'action d'un champ magnétique sur une source de lumière provoque des modifications de la lumière émise. La théorie classique étudie les perturbations des mouvements électroniques dans les atomes émetteurs. Nous allons modéliser ce phénomène qui porte le nom d'effet Zeeman dans la suite du problème.

Données : $e = 1,6\ 10^{-19}$C ; $m = 9,1\ 10^{-31}$kg ; $\lambda_{\text{infra-rouge}} \simeq 10\mu$m ; $c = 3,0\,10^{8}$m.s^{-1}

Emission de la lumière et modèle de l'électron élastiquement lié

Dans la théorie classique, l'émission d'une radiation lumineuse par un atome de centre O, considéré comme fixe, est due aux mouvements de charges autour de son noyau. On admettra qu'une charge possédant un mouvement périodique de période T émets une radiation lumineuse de fréquence ν avec : $\nu = 1/T$. Dans un atome ce sont les électrons qui sont en mouvement autour du noyau. L'électron émetteur, de masse m et de charge $q = -e$, est repéré par le point M étudié dans un système de coordonnées cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
Il est élastiquement lié, c'est-à-dire qu'il se déplace autour du noyau O sous l'action d'une force électrostatique généré par un champ $\vec{E} = E_0 \frac{r}{d} \vec{e}_r$ avec $E_0/d = 2,0\ 10^{17}$kg.m.s^{-1}.
On suppose pour la suite que le mouvement de l'électron est circulaire, de rayon R.

1. Expliquer le terme d'électron "élastiquement" lié.
2. Montrer que le mouvement est uniforme.
3. Donner la vitesse angulaire ω_0 de l'électron élastiquement lié en fonction de e, E_0, d et m.
4. Donner la fréquence f_0 de son émission lumineuse. Faire l'application numérique.
5. La matière émet de la lumière dans le domaine des infrarouges. Retrouve-t-on par notre modèle la constatation expérimentale ?

Influence d'un champ magnétique et effet Zeeman

Pour observer l'effet Zeeman, l'atome est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, avec $B_0 = 1,0\,10^{3}$T. On se place dans le plan xOy et on suppose que le mouvement de l'électron est toujours circulaire de rayon R dans le sens direct. On note ω_1 la nouvelle vitesse angulaire, appelée pulsation Zeeman.

6. Exprimer la force de Lorentz magnétique en fonction de R, ω_1 e, B_0 et les vecteurs de la base.
7. Montrer que ω_1 est donnée par la relation :

$$\omega_1^2 - \frac{eB_0}{m}\omega_1 - \omega_0^2 = 0$$

8. En déduire la pulsation ω_1 et la nouvelle fréquence T_1 de l'émission lumineuse. Faire l'application numérique.
9. Cette nouvelle radiation lumineuse est-elle visible ?

Approche perturbative

On commence à faire des trucs vraiment dur ici, à garder pour la fin ...

La trajectoire circulaire précédente est ce qu'on appelle une trajectoire d'équilibre. On étudie des petits mouvements de la particule au voisinage de cette trajectoire d'équilibre. On se place en coordonnées polaire (r, θ) et on considère des petites variations, représentées par le symbole ε autour des grandeurs d'équilibre trouvées précédemment :

$$r(t) = R + \varepsilon_r(t) \; ; \; \dot{\theta} = \omega_1 + \varepsilon_\omega(t)$$

avec ω_1 la pulsation de Zeeman trouvée précédemment
Le mouvement se réalise toujours en présence du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ précédent.
On travaillera par la suite à l'ordre 1 vis-à-vis des perturbation ε_r et ε_ω c'est-à-dire qu'on négligera tous les termes d'ordre 2 :

$$\varepsilon_r^2 \; ; \varepsilon_\omega^2 \; ; \; \varepsilon_r\varepsilon_\theta \; ; \; \dot{\varepsilon}_r^2 \; ; \dot{\varepsilon}_\omega^2 \; ; \; \dot{\varepsilon}_r\dot{\varepsilon}_\theta \; ; \; ... \; \simeq 0$$

10. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ de la particule en fonction de R, ε_r, $\dot{\varepsilon}_r$, ω_1, ε_ω et les vecteurs de la base.
11. Montrer que l'accélération de la particule s'écrit à l'ordre 1 en ε_r, ε_ω et ε_z :

$$\vec{a} = \left(\ddot{\varepsilon}_r - (R + \varepsilon_r)\omega_1^2 - 2\omega_1 R\varepsilon_\omega\right)\vec{e}_r + (2\omega_1\dot{\varepsilon}_r + R\dot{\varepsilon}_\omega)\,\vec{e}_\theta$$

12. Projeter les équations du mouvement sur les trois axes $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$.
13. Montrer que la projection sur $\vec{e}_\theta$ conduit, en se limitant aux termes d'ordre 1 en ε_ω et ε_r, à la relation suivante :

$$R\dot{\varepsilon}_\omega = \left(2\omega_1 - \frac{eB}{m}\right)\dot{\varepsilon}_r$$

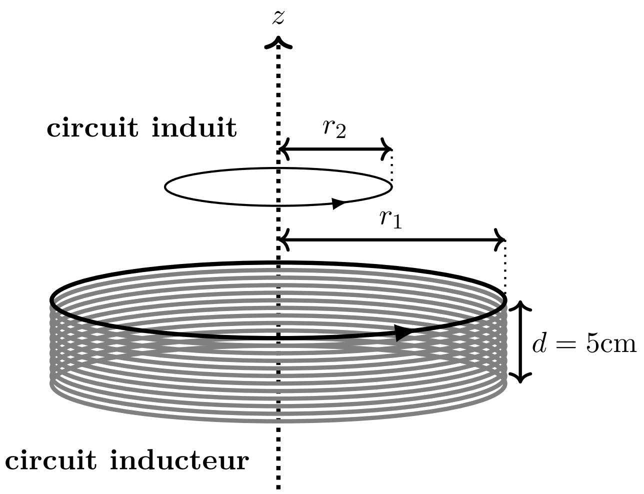
14. En déduire alors que la projection sur $\vec{e_r}$ conduit alors à une équation différentielle d'un oscillateur harmonique en ε_r. On exprimera la pulsation caractéristique.
15. Représenter schématiquement la trajectoire de l'électron.

Chauffage par induction

Dans les plaques dites "à induction", le chauffage du fond métallique des casseroles et autres poêles de cuisson est réalisé par effet Joule via des microscopiques courants induits directement dans le fond de la casserole, appelés courants de Foucault, par un champ magnétique variable.

Chauffage la poêle

Logé dans une table support en céramique, un bobinage, nommé circuit inducteur, est constitué de $N_1 = 20$ spires de cuivre rayon de $r_1 = 15$cm et de résistance électrique totale $R_1 = 18\text{m}\Omega$. On note L_1 le coefficient d'auto-induction.



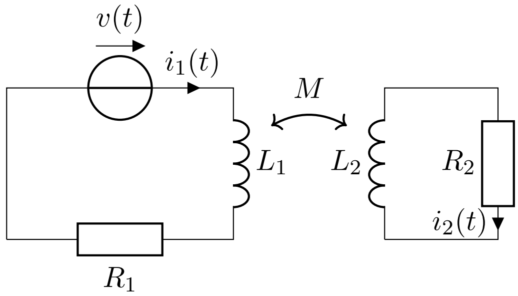
Le circuit inducteur est alimenté par une tension harmonique (*i.e.* sinusoïdale) $v(t)$ de pulsation ω et d'amplitude V_0. On modélise les courants de Foucault au fond de casserole par une unique spire circulaire unique de rayon $r_2 = 5$cm, fermée sur elle-même, appelée circuit induit.

L'induit a une résistance $R_2 = 8,3\text{m}\Omega$ et une auto-inductance $L_2 = 2,5$mH. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par couplage inductif entre l'inducteur et l'induit d'inductance mutuelle M.
On donne $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\text{H.m}^{-1}$.

On modélise le champ magnétique $\vec{B}$ généré par le circuit inducteur comme celui généré par un solénoïde infini parcouru par un courant i_1.

1. Calculer le coefficient d'auto-induction L_1 du circuit inducteur en fonction de μ_0, N_1, d et r_1. Faire l'application numérique.
2. Calculer le coefficient d'inductance mutuelle M ente le circuit inducteur et le circuit induit en fonction de μ_0, N_1, d et r_2. Faire l'application numérique

   On admettra par la suite que $L_1 L_2 > M^2$. On représente le dispositif circuit inducteur-circuit induit par deux circuits électriques couplés.



3. En adoptant une représentation complexe des signaux, montrer que :

$$\underline{i}_1 = -\frac{jL_2\omega + R_2}{jM\omega}\underline{i}_2$$

4. **Attention !** *Question difficile, toute tentative de réponse sera récompensée.*
   En déduire que $\underline{i}_2$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{i}_2 = \frac{K}{1 + \frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{v}$$

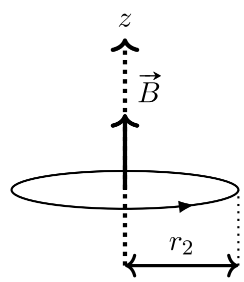
   avec $K = \dfrac{M}{L_1 R_2 + L_2 R_1}$. On exprimera ω_0 et Q en fonction de L_1, L_2, R_1, R_2 et M.
5. Donner alors l'amplitude I_0 de l'intensité i_2.
6. Pour maximiser l'intensité dans le circuit induit, à quelle la pulsation ω doit fonctionner l'alimentation extérieure ? En déduire l'amplitude I_{max} du courant i_2 à cette pulsation en fonction de V_0 et K.
7. A la pulsation de résonance, exprimer la puissance $\mathcal{P}(t)$ dissipée par effet Joule en fonction du temps.

   On admettra que la puissance moyenne est égale à la moitié de l'amplitude de la puissance $\mathcal{P}$.
8. On souhaite avoir une puissance moyenne de $1,0$kW. En déduire l'amplitude V_0 à appliquer aux bornes du générateur. Est-ce réalisable ?

Action mécanique sur la poêle

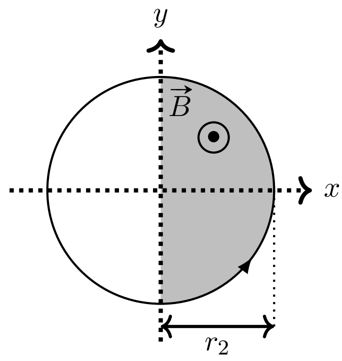
On étudie les actions mécanique que subit la poêle lors du chauffage. Pour simplifier le modèle on supposera le champ magnétique totale $\vec{B}$ uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ et le courant i_2 dans la plaque constant $i_2 = I_0$.

Dans un premier temps la poêle est horizontale.



9. Justifier par un argument de symétrie que la résultante des forces de Laplace sur la poêle est nulle.
10. Montrer que le couple Γ_L des forces de Laplace sur la poêle est nul.
11. On incline la poêle d'un angle α avec la verticale. Donner le nouveau couple Γ_L des forces de Laplace qui s'exerce sur la poêle.

Toujours horizontale, on a mal positionner la plaque : une moitié se trouve dans la zone du champ magnétique, l'autre non.



12. Montrer que la résultante des forces de Laplace sur la poêle est alors :

$$\vec{F}_L = 2r_2 B_0 I_0 \vec{e}_x$$

13. Par combien a-t-on diminuer la puissance dissipée par effet Joule dans la plaque ?