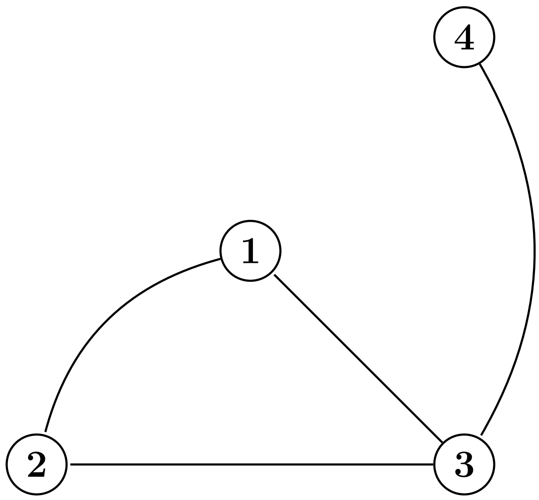
Cours III Graphes

Lycée Louis Thuillier - Informatique - PCSIB -

Table des matières

1 Introduction à la notion de graphes

1.1 Vocabulaire sur les graphe non-orientés



Voici un graphe non-orienté. Il est composé

- **de sommets**, numérotés ici de 1 à 4
- arêtes qui relient ensemble deux sommets

On le qualifie de non-orienté car les arêtes ne possèdent pas de sens.

Définition. Graphe non-orienté
Un graphe non-orienté, noté G, est un couple de deux grandeurs :
- S, un ensemble fini dont les éléments sont appelés **sommets**
- A, un ensemble de paires $\{x, y\}$ où x et y sont deux sommets de S, dont les éléments sont appelés **arêtes**.

On le note alors $G = (S, A)$.

> *Exemple 1 : Donnons S et A du graphe introductif.*
> - *S, ensemble des sommets :$S = \{1, 2, 3, 4\}$*
> - *A, ensemble des arêtes : $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \}$*

> *Exemple 2 :*
> *Représenter le graphe associé à $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et*
> *$A = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{6, 6\}\}$.*

▶ **Vocabulaire :**

▷ **Sommets voisins :**
Si deux sommets sont reliés par une arête, ils sont qualifiés de voisins.

▷ **Degré d'un sommet**
Le degré d d'un sommet s, noté $d(s)$ est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet.

> **Exemple 3 :** *Dans le graphe introductif :* $d(1) = 3$ *et* $d(4) = 2$.

▷ **Chaîne**
Une chaîne, appelé aussi chemin, est une suite d'arêtes consécutives La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
Un cycle est une chaîne ayant le même sommet de départ que d'arrivée.

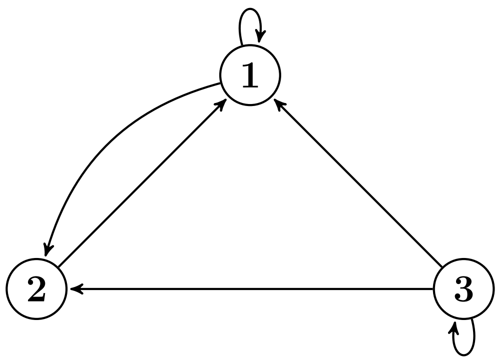
> **Exemple 4 :** *Dans le graphe introductif, la chaîne* $(\{1,3\},\{3,4\})$, *qu'on peut noter* $(1,3,4)$ *est de longueur* 2.
> *Il y a un cycle* $(1,2,3)$.

▷ **Graphe connexe**
Un graphe est connexe, si on peut relier tout couple de sommets par une chaîne.

> **Exemple 5 :** *Le graphe introductif est connexe.*
> *Créer un graphe non-connexe et préciser ses ensembles* S *et* A.

1.2 Graphes orientés et graphes pondérés

▶ **Graphe orientés**



Un graphe orienté est un graphe dont les sommets ne sont plus reliés pars des arêtes mais par des arcs : un arc est similaire à une arête mais il possède un sens de parcours, représenté par un flèche.

Un arc est représenté par un couple (x, y) de sommets.

Attention ! pour une arrête $\{x, y\}$ ou $\{y, x\}$ avait le même sens, ce n'est plus vrai pour des arcs $(x, y) \neq (y, x)$.

> **Exemple 6 :** *Donnons les ensembles* S *et* A *du graphe orienté ci-dessus.*
> ▷ *Sommets :* $S = \{1, 2, 3\}$
> ▷ *Arcs :* $A = \{(1, 2), (1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 1), (3, 3)\}$

Degré sortant et degré entrant

- le degré sortant d_+ d'un sommet s, noté $d_+(s)$, est le nombre d'arcs sortant de s
- le degré entrant d_- d'un sommet s, noté $d_-(s)$, est le nombre d'arcs entrant de s

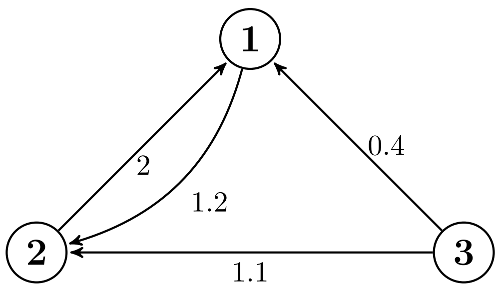
Le degré d'un sommet $d(s)$ est le nombre d'arc reliés à ce sommet. On a alors $d(s) = d_+(s) + d_-(s)$.

Attention ! Cas des boucles !
Les sommets 1 et 3 possèdent deux arcs qui rebouclent sur le sommet. La boucle compte pour 1 dans les degrés sortant et 1 dans les degrés entrant.
Une boucle compte pour deux dans le degré d'un sommet !

Chemin

On peut alors, comme pour les arêtes définir des chemins, la longueur d'un chemin, ...
Attention ! Un chemin ne peut se réaliser qu'en suivant le sens des arcs. Dans l'exemple le chemin $(1, 2, 3)$ n'est pas possible.

▶ Graphe pondéré



Un graphe pondéré est un graphe, qui peut être orienté ou non-orienté, dont les arêtes ou arcs qui relient les sommets son affectés d'un nombre réel appelé poids.

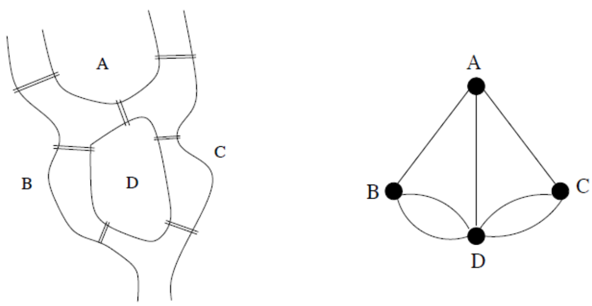
Le poids d'un chemin est alors la somme des poids des différents arcs ou chemin qui le compose.

> *Exemple 7 : Le chemin* $(3, 2, 1, 2)$ *est de poids* $1.1 + 2 + 1.2 = 4.3$.

1.3 A quoi ça sert ?

▶ Un peu d'histoire

La théorie des graphes est née en 1736 quand Euler démontra qu'il était impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville russe de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) une fois exactement et de revenir au point de départ. Les ponts enjambent les bras de la Pregel qui coulent de part et d'autre de l'île de Kneiphof.



Les 7 ponts de Königsberg

Pour cela, il représenta chaque rive par un sommet et les ponts reliant les rives entre elle par des arcs.

▶ Applications

Un graphe permet de représenter simplement la structure, les connexions, les cheminements possibles d'un ensemble complexe comprenant un grand nombre de situations, en exprimant les relations entre ses éléments. On peut citer

- **Réseau de transports** : chaque villes ou gare est représentée par un sommet, les arêtes représentent les voie qui les relient, les poids de chaque arête peuvent représenter la distance ou le temps de parcours.

- **Réseau informatique** : chaque ordinateurs ou serveurs est représenté par un sommet, les arêtes les moyens de communiquer, les arcs peuvent représenter des droits d'accès et les poids la connexion et le nombre de données transmises par seconde.

- **Réseau sociaux** : chaque utilisateur est représenté par un sommet, les arêtes représentent les lien d'amitiés, les poids des arêtes peuvent représenter le nombre de messages échangés par mois.

2 Représenter un graphe

2.1 Liste d'adjacence

▶ Rappel sur les dictionnaires

En Python un dictionnaire est "une liste de paires". C'est un ensemble d'associations entre
- une **clé**
- et une **valeurs**, associées à la clé

Un dictionnaire se définit entre accolade {} :

dico = { clé_1 : valeur_1 , clé_2 : valeur_2 }

On note {} le dictionnaire vide.
Attention ! aux deux points et aux virgules!!!

```
>>> edt={"Math" : 10 , "Physique" : 8 , "Chimie" : 4}
```

- je peux accéder à la **valeur** (ex : valeur_1) associé à une **clé** (ex : clé_1)

  dico[*clé*_1]

  La clé joue un rôle similaire à l'indice dans une liste.

- je peux modifier la **valeur** associé à une **clé**

```
>>> edt["Math"]
10

>>> edt["Physique"]=edt["Physique"]+50

>>> edt
{'Math': 10, 'Physique': 58, 'Chimie': 4}
```

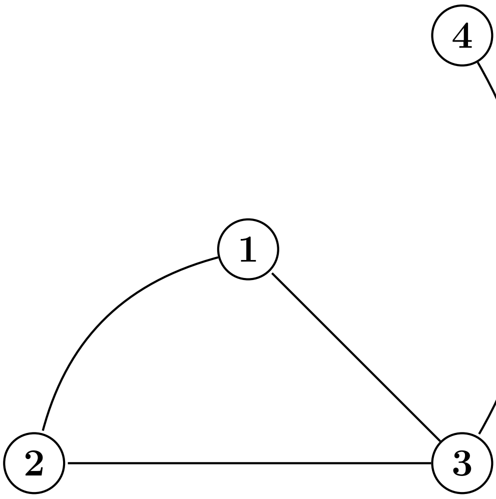
- je peux ajouter un élément en précisant la **clé** et sa valeur associée

```
>>> edt["SI"]=4

>>> edt
{'Math': 10, 'Physique': 58, 'Chimie': 4, 'SI': 4}
```

▶ Liste d'adjacence d'un graphe

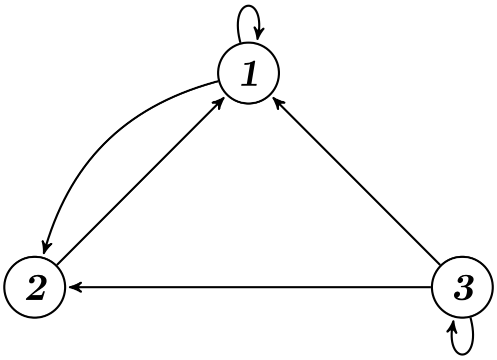
On peut représenter un graphe à l'aide d'un dictionnaire où
- chaque clé est un sommet du graphe
- les valeurs associées à chaque clé sont la liste de ses voisins, c'est-à-dire la liste des sommets reliés par une arête.
  Pour un graph orienté, on représentera la liste des sommets reliés par un arc sortant.



Exemple 8 :

```
Graphe = {1 : [2,3] , 2 : [1,3] , 3 : [1,2,4] , 4 : [3] }
```

Exemple 9 : Donner le dictionnaire représentant la liste d'adjacence du graphe suivant :



Cette représentation devient vite illisible pour un graphe avec un grand nombre de sommet et n'est pas très adapté aux graphes pondérés.

Remarque : *On peut représenter un graphe pondéré en remplaçant les listes des sommets par des dictionnaires associant aux voisins du sommet le poids des arêtes correspondantes.*

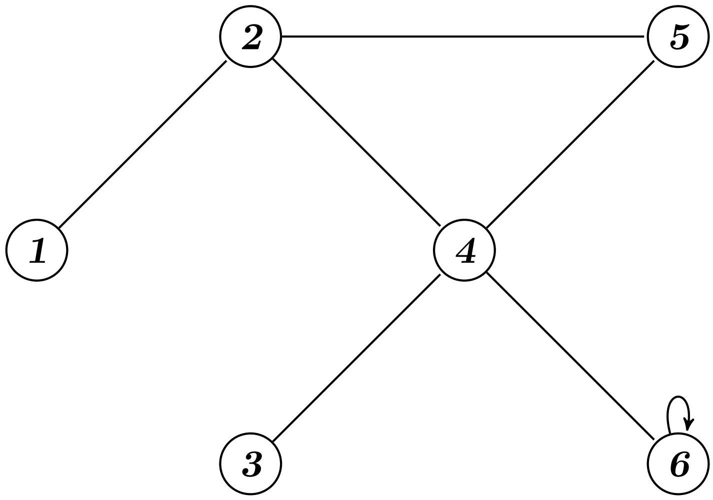
2.2 Matrice d'adjacence

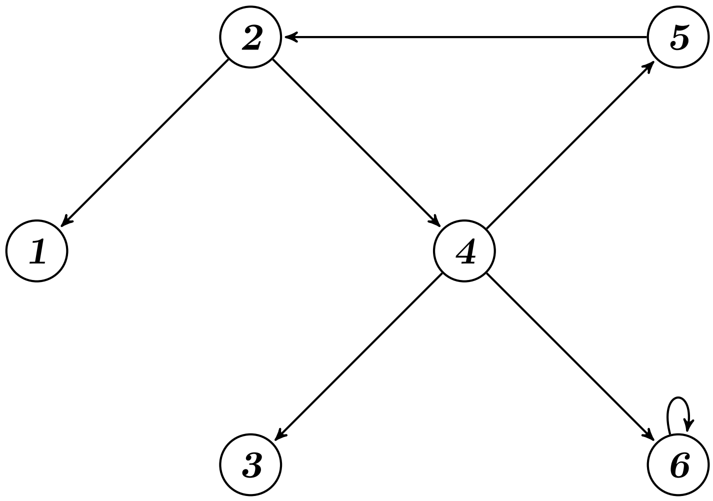
▶ Graphe non-pondéré

On peut représenter un graphe par une matrice M appelée la matrice d'adjacence du graphe où ses éléments m_{ij} sont définies comme suit :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête/arc sortant reliant } i \text{ à } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 10 : Donner la matrice d'adjacence des graphes suivants :





Quelle propriété possède la matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté ?

Propriété. Nombre de chemin entre deux sommets et matrice d'adjacence
Le nombre de chemin de longueur p reliant les sommets i et g est donné par le coefficient d'indice (i, j) de la matrice M^p.

▶ Graphe pondéré

Pour représenter un graphe pondéré, on utilise la notion de matrice d'adjacence mais désormais :

$$m_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{poids de l'arrête /arc sortant reliant } i \text{ à } j \text{ s'il existe} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple 11 : Donner la matrice d'adjacence du graphe pondéré suivant.