

TD 0 : Les fondamentaux

1 Addition, multiplication

cf Cahier de calcul Fiche de calcul n° 3

✱ *Exercice 1* : On désigne par a, b, c, d quatre réels. Effectuer les calculs suivants :

$$(1) a + b - (c + d) + (a - d) - (b - c + a) + d \quad (2) d - [a - (c - b)] - (a + b - d) - (d - b)$$

✱ *Exercice 2* : a, b, c, x sont des réels. Calculer et simplifier les expressions (en écrivant le moins possible) :

$$(1) E = (a + b + c)(bc + ca + ab) - (b + c)(c + a)(a + b)$$

$$(2) F(x) = (x - 1)(2x + 1) - [(x + 2)(x - 1) + 2x^2 + 3x - 5] + (x + 1)^2.$$

✱ *Exercice 3* : Développer (1) $(a+3b)(a^2+3ab+9b^2)$ (2) $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ (3) $(1+x^2)(2+x-x^2)$
(4) $(1+2x)(1+x\sqrt{3}+x^2)(2-x-x^2)$

2 Sur les fractions

cf Cahier de calcul Fiche de calcul n° 1

➤ Pour les additionner ou les soustraire, choisir un dénominateur commun intelligemment.

✱ *Exercice 4* :

$$\text{Calculer (1) } \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \quad (2) \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} \quad (3) \frac{6x-7}{(x-2)(3x+1)} + \frac{3x+4}{(2x-5)(x-2)} \quad (4) \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}$$

(Rappel : $0! = 1$ et $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ si $n \in \mathbb{N}^*$).

➤ Penser à simplifier dès que possible. ✱ *Exercice 5* : Calculer $\frac{35}{8} \times \frac{24}{25}$ et $\frac{10!}{7!3!}$.

➤ $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1}$, en particulier $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ et $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$ $\triangleleft$ le signe $=$ est en face de la barre de fraction principale.

✱ *Exercice 6* : Calculer (1) $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ (2) $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ (3) $\frac{5}{\frac{7}{2}}$ (4) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{5}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{8}}$.

➤ Attention au signe $-$ devant une fraction. ✱ *Exercice 7* : Simplifier (1) $1 - \frac{x-2}{4}$ (2) $\frac{2x+3}{5x+2} - 1$.

➤ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$. ✱ *Exercice 8* : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{x+1}{x+4} = \frac{2x-3}{4-x}$.

3 Sur les puissances :

cf Cahier de calcul Fiche de calcul n° 2

➤ *Rappel* : $x^a \times x^b = x^{a+b}$, $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} = \frac{1}{x^{b-a}}$, $(x^a)^b = x^{ab}$, $x^a y^a = (xy)^a$.

✱ *Exercice 9* : Simplifier $x^3 \times x^2$, $\frac{x^5}{x^2}$, $\frac{x^2}{x^5}$.

✱ *Exercice 10* : Simplifier l'écriture :

$$(-2a^2b^3)^3 \quad [(ab^2)^3]^5 \quad \left(\frac{a^2}{-b^3}\right)^5 \quad (a^2b^{-3})^{-1} \quad (5a^2b)^2 \times (-ab^2)^3 \quad [(ab^2)^{-2}]^2.$$

4 Sur les racines carrées

cf Cahier de calcul Fiche de calcul n° 4

➤ *Rappel* : Pour a, b deux réels positifs et c un réel $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{c^2} = |c|$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

✱ *Exercice 11* : Ecrire les expressions sous la forme $a\sqrt{b}$ ou $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$.

$$(1) \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50} \quad (2) 2\sqrt{12} - 4\sqrt{75} + 3\sqrt{27} \quad (3) (2 + \sqrt{5})^2 - (2 + \sqrt{5})^2$$

➤ En général, on ne laisse pas de racine carrée au dénominateur : $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

✿ *Exercice 12* : (1) Simplifier $\frac{5}{\sqrt{5}}$ puis $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$

➤ Il est souvent utile de multiplier $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ par $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, et vice-versa pour simplifier des expressions.

✿ *Exercice 13* : (1) Simplifier (a) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ (c) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}$

(2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

✿ *Exercice 14* : Simplifier (1) $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$ (2) $\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}}$ (3) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

5 Factorisation

cf Cahier de calcul Fiche de calcul n°3

➤ *Rappel* : Pour factoriser, on cherche un facteur commun et on pense à utiliser les identités remarquables :
 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

✿ *Exercice 15* : Factoriser au maximum (pour x réel) :

(1) $f(x) = 5x^4 - 45x^2$ (2) $g(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3$ (3) $h(x) = 25x^2 - 4 + (5x + 2)(4x - 7)$

(4) $A(x) = (5x - 1)(x + 3) + 3(25x^2 - 1)$ (5) $B(x) = 49 - 28x + 4x^2 + (7 - 2x)(5 - 3x)$

✿ *Exercice 16* : (1) Factoriser $x^2 - 6x + 9$ et $x^2 - 4$. (2) Simplifier $\frac{x^4 - x^2}{x^4 - 1}$. (3) Simplifier $\frac{n^2 - n}{n^2 - 1}$.

✿ *Exercice 17* : Résoudre sur $\mathbb{R}$:

(1) $(2x - 1)^2 + x(1 - 2x) = 4x^2 - 1$ (2) $(x + 1)(2x + 3) + (x + 1)^2 = 0$ (3) $\frac{1}{x + 2} = \frac{-x}{x^2 - 4}$.

➤ Dans les calculs de limites, il est souvent utile de mettre en facteur les termes prépondérants.

✿ *Exercice 18* : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x - 1}{2x + 3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

6 Valeur absolue

➤ *Rappels* :

$\Leftrightarrow |x| = \max(x, -x)$ $|a - b| = d(a, b)$ distance entre a et b sur l'axe réel.

$\Leftrightarrow$ pour $a > 0$ $|x| = a \Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

$\Leftrightarrow$ pour $\alpha > 0$ $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow \dots$ $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow \dots$

✿ *Exercice 19* : Résoudre

(1) $|x| = 5$ (2) $|x - 3| = |5x + 2|$ (3) $|x - 3| = 2$ (4) $|x| < 4$

(5) $|x - 2| \leq 1$ (6) $|x + 2| \geq 3$ (7) $|x + 2| \leq |2x - 5|$

✿ *Exercice 20* : Simplifier pour x réel l'écriture de $f(x) = |x + 2| + |2x - 5|$.

7 Egalités

➤ Pour résoudre une équation, on raisonne par équivalences.

✿ *Exercice 21* : Résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $2x + 1 = \frac{1}{x}$.

➤ Pour résoudre une équation du second degré il n'est pas toujours nécessaire de calculer le discriminant, on peut chercher des solutions évidentes.

✿ *Exercice 22* : Résoudre sans calculer le discriminant : $x^2 + x = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$.

✿ *Exercice 23* : Résoudre $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}$

8 Inégalités, recherche de signe

➤ *Rappels :*

⇒ si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$ si $a < b$ et $c \leq d$ alors $a + c < b + d$.

⇒ si $a \leq b$ et si $t \geq 0$ alors $ta \leq tb$ si $a \leq b$ et si $t \leq 0$ alors $ta \geq tb$.

⇒ Soit un intervalle I et a, b dans I .

Si une fonction f est croissante sur I , et si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

Si une fonction f est décroissante sur I , et si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

⇒ Si la fonction est **strictement** monotone, alors on a une équivalence.

➤ Pour étudier le signe d'une expression, il vaut mieux avoir des produits ou des quotients que des sommes.

✿ *Exercice 24 :* Étudier le signe de (1) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. (2) $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x+1}$.

➤ Pour comparer deux réels a et b , on peut étudier le signe de $a - b$.

✿ *Exercice 25 :* Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $2x + 1 \leq \frac{1}{x}$.

➤ Attention, pour résoudre une inéquation, on raisonne par équivalences.

✿ *Exercice 26 :* Résoudre $-3\ln(x+1) + 4 \geq 0$.

9 Dérivation

cf Cahier de calcul Fiche de calcul n° 9

➤ *Rappels :*

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u + v$	$u' + v'$
Multiplication	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Et surtout pour une composée $g \circ f$ la dérivée est $f' \times (g' \circ f)$ i.e. en x elle vaut $(g(f(x)))' = f'(x) \times g'(f(x))$

Rappel dans le rappel $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ par définition

✿ *Exercice 27 :* Dériver les fonctions f suivantes définies par :

$$(1) f(x) = 5(3x^2 - x + 7) + \sin x \quad (2) f(x) = (x^2 - 3x + 5)(x - 3) \quad (3) f(x) = \frac{e^x - 1}{4e^x + x}$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{\ln x + 3} \quad (5) f(x) = \cos(5x^2 - 8) \quad (6) f(x) = \cos(e^x) \quad (7) f(x) = (2x + 1)^7 \quad (8) f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

10 Systèmes linéaires simples

cf Cahier de calcul Fiche de calcul n° 15

➤ *Rappels :* En remplaçant une ligne par une combinaison linéaire de lignes où elle est présente on ne change pas l'ensemble des solutions d'un système.

Exemple : pour éliminer y dans le système $\begin{cases} 3x - 4y = 4 & L_1 \\ 5x + 2y = 5 & L_2 \end{cases}$ on peut remplacer la ligne 2 notée L_2 par la combinaison linéaire $2 \times L_2 + 1 \times L_1$.

Cela se note $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$ et le système équivaut alors à $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ 13x = 14 \end{cases}$

✿ *Exercice 28 :* Résoudre (1) $\begin{cases} 3x - 4y = 4 & L_1 \\ 5x + 2y = 5 & L_2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x - 4y = 1 & L_1 \\ 5x + 2y = 5 & L_2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 & L_1 \\ x + 2y = 5 & L_2 \end{cases}$

$$(4) \begin{cases} 2x - 3y = 4 & L_1 \\ -6x + 9y = -12 & L_2 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 2x - 3y = 4 & L_1 \\ -6x + 9y = -14 & L_2 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 3x + y - 2z = -1 & L_1 \\ -4x + 3y + z = 5 & L_2 \\ 2x - 2y + 3z = 7 & L_3 \end{cases}$$