

Travail demandé

Le devoir dure 3h.

Les deux parties peuvent se traiter indépendamment les unes des autres. Ayez confiance en vous, vous savez faire plein de choses ! Prenez votre temps à chaque question pour expliquer votre démarche.

Rappel : Les erreurs d'homogénéité flagrantes seront sanctionnées. **La réponse à une question prend la forme d'une formule littérale encadrée ou soulignée.**

La calculatrice est autorisée. Bon courage !

Force subie dans un fluide

Lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (ou bien lorsqu'un fluide s'écoule autour d'un solide), il subit de la part du fluide une force F qui peut, suivant les situations, prendre plusieurs formes et donc avoir différentes origines physiques. L'objectif de cette partie est d'étudier ces différentes formes.

L'action d'un fluide sur un solide dépend de deux caractéristiques principales :

- ▷ sa masse volumique, notée ρ
- ▷ sa viscosité dynamique, notée η . On donne celle de l'eau et du miel : $\eta_{\text{eau}} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{Pa.s}$ et $\eta_{\text{miel}} = 5,0 \cdot 10^2 \text{Pa.s}$

Remarque : la viscosité d'un fluide traduit le côté visqueux/poisseux d'un fluide.

1. Donner les dimensions de la masse volumique ρ et de la viscosité dynamique η .

La force exercée par un fluide sur un objet dépend *a priori* de quatre paramètres : η , ρ , R la taille de l'objet et v sa vitesse. On écrit la force sous la forme suivante :

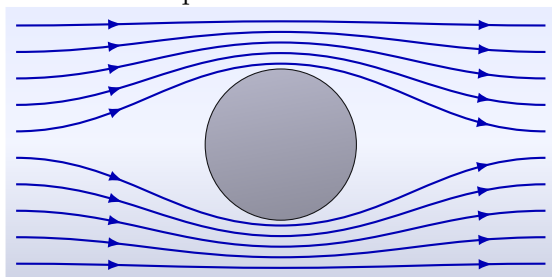
$$F = K \times \eta^\alpha \rho^\beta R^\gamma v^\delta$$

avec K une constante numérique sans dimension.

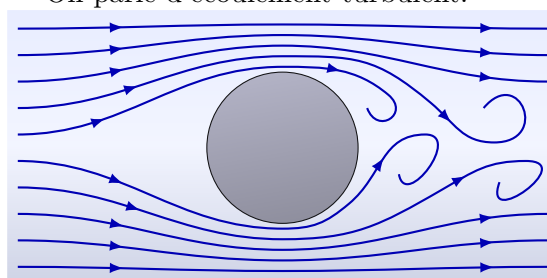
2. Par analyse dimensionnelle, exprimer les coefficients β , γ et δ en fonction de α .

On peut alors construire deux modèles de force :

- ▷ un modèle où la force est due à la viscosité $\alpha = 1$. On parle d'écoulement laminaire.



- ▷ un modèle où la force est due à l'inertie du fluide, la viscosité ne jouant aucun rôle $\alpha = 0$. On parle d'écoulement turbulent.



3. Donner l'expression de la force F dans le cas laminaire $\alpha = 1$ et turbulent $\alpha = 0$. On discutera l'impact de la vitesse dans chacune des deux expressions.

On mesure la force subie par une sphère dans un écoulement d'eau pour différentes vitesses d'écoulement. On obtient les mesures suivantes :

Force (kN)	0,69	6,2	17	34	44	70	104
Vitesse (km/h)	10	30	50	70	80	100	120

4. En discutant la dépendance de la force vis-à-vis de la vitesse d'écoulement v , proposer une analyse des données pour savoir si l'écoulement de l'eau est laminaire ou turbulent autour de la sphère.

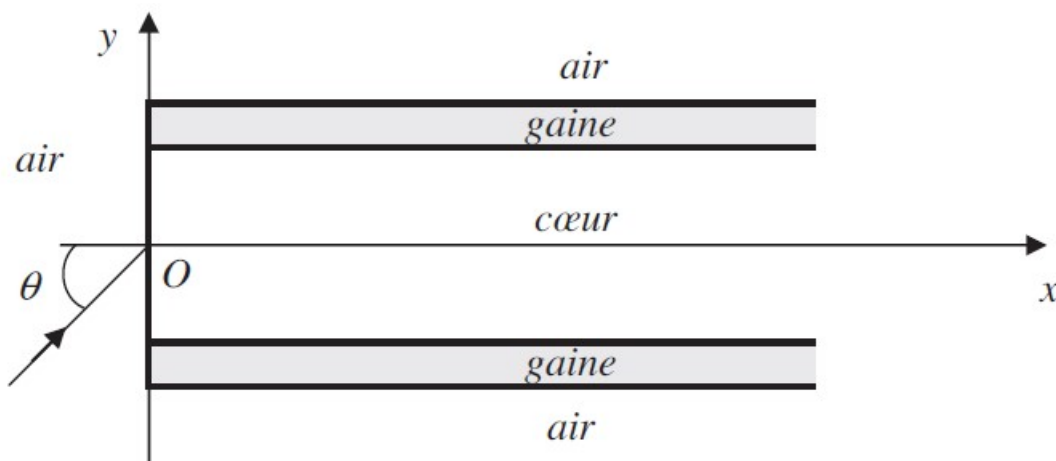
Fibre à saut d'indice et fibre à gradient d'indice

On s'intéresse dans cette partie à la propagation de rayons lumineux dans une fibre optique. On s'intéressera à deux types de fibre optique : la fibre optique à saut d'indice et la fibre optique à gradient d'indice.

Données : $n_c = 1,50$; $n_g = 1,48$; $n_a = 1,00$; $r_c = 1,0\text{mm}$

Fibre optique à saut d'indice

On s'intéresse dans un premier temps à une fibre optique à saut d'indice. Cette dernière est composée d'un cœur cylindrique transparent de rayon r_c et d'indice optique n_c entouré d'une gaine elle aussi transparente d'indice n_g . On note (Ox) l'axe de révolution de la fibre optique. L'indice optique de l'air est pris égal à l'unité.



Fibre optique droite

- Sur la feuille en annexe, représenter la trajectoire du rayon lumineux dans le cas où ce dernier est confiné dans le cœur. On notera I le premier point de réflexion sur la gaine.
- A quelle condition sur l'angle d'incidence en I le rayon reste confiné dans le cœur ?
- Montrer que le rayon reste confiné dans le cœur de la fibre si l'angle d'entrée θ est inférieur à un angle limite θ_L qu'on exprimera en fonction de n_a , n_c et n_g .
- Calculer la valeur de θ_L . Que se passe-t-il si $\theta > \theta_L$?

Malheureusement, on envoie un rayon lumineux avec un angle d'incidence $\theta_0 = 20^\circ$ supérieur à θ_L . A chaque réflexion sur la gaine, une fraction $T = 1\%$ de l'intensité du rayon est réfracté dans la gaine et donc perdue.

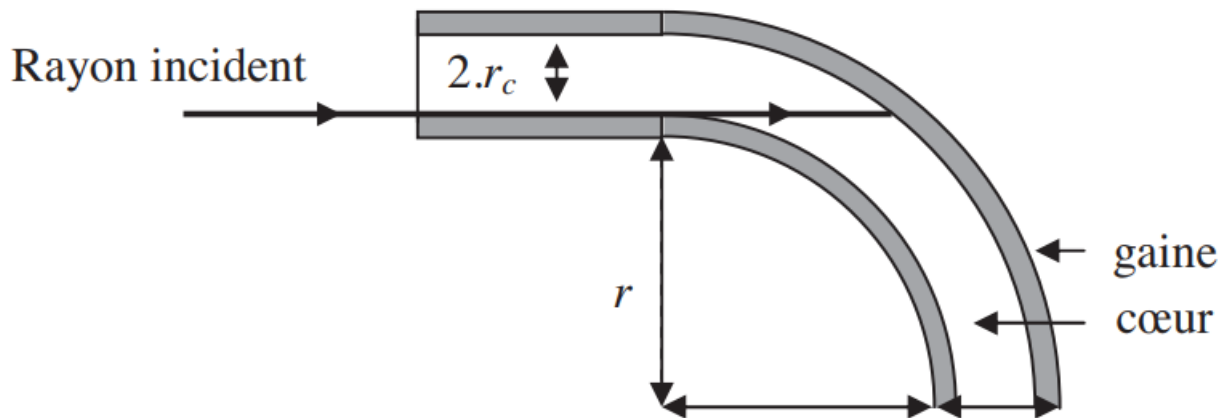
5. Montrer qu'à chaque réflexion sur la gaine, le rayon parcourt une distance d le long de l'axe de la fibre égal à :

$$d = 2r_c \frac{\sqrt{n_c^2 - n_a^2 \sin^2 \theta_0}}{n_a \sin \theta_0}$$

6. Estimer sur une fibre optique de longueur $L = 86\text{cm}$ la fraction de l'intensité du signal qu'on récupère en sortie.

Tordre une fibre optique

Pour des raisons pratique, une fibre optique n'est pas toujours droite : il arrive qu'on soit obligé de la tordre. On étudie alors la trajectoire d'un rayon lumineux se propageant suivant l'axe de la fibre.



7. Montrer que le rayon incident reste confiné si :

$$r > r_{\min} = \frac{2n_g}{n_c - n_g} r_c$$

(🔴🔴🔴 **Attention !** Tout début de réponse sera valorisée, on pourra s'aider du schéma à compléter en annexe)

8. Faire l'application numérique et discuter la valeur de r , la courbure qu'on peut imposer à une fibre optique. .

Fibre à gradient d'indice

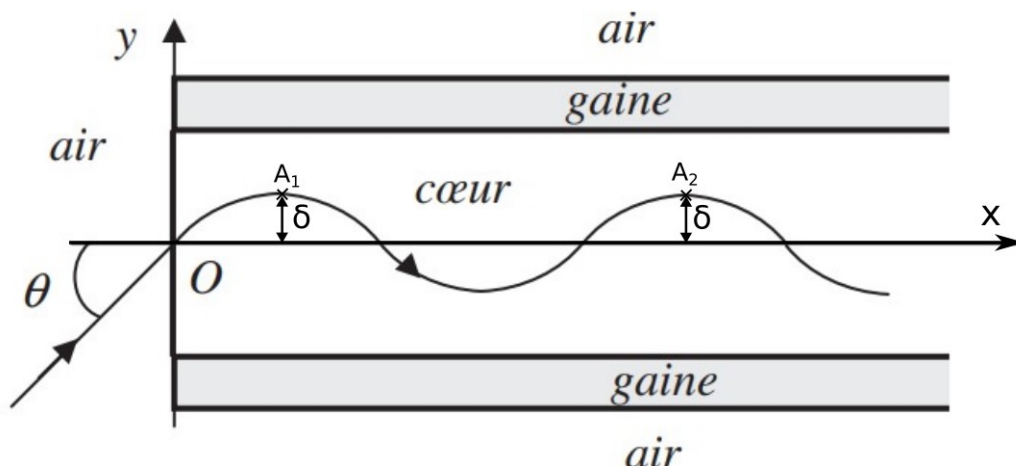
On s'intéresse dans cette partie à un autre type de fibre capable de guider la lumière : les fibres à gradient d'indice. Dans une fibre à gradient d'indice, l'indice optique du cœur n'est plus constant mais dépend de la distance y au centre de la fibre. L'indice optique est alors une fonction de la position y considérée : $n[y]$.

9. Comment appelle-t-on ce genre de milieu ? Citer un autre exemple de milieu où n varie de façon continue.

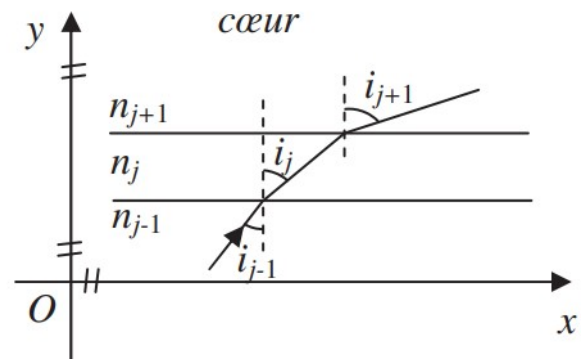
On se place dans un cas où :

$$n[y] = n_c - (n_c - n_g) \left(\frac{y}{r_c} \right)^2$$

avec r_c le rayon du cœur de la fibre. Dans ces conditions, la trajectoire du rayon lumineux est la suivante :



On note i l'angle que fait le rayon lumineux avec **la verticale**. On considère par la suite le cœur comme un milieu stratifié, *i.e.* constitué de couche parallèles horizontales, d'indice $n_0, \dots, n_{j-1}, n_j, n_{j+1}$.



10. Montrer que l'angle i avec la verticale au niveau du point d'entrée O , noté i_0 , vérifie :

$$\sin i_0 = \sqrt{1 - \frac{n_a^2}{n_c^2} \sin^2 \theta}$$

11. Donner une relation liant n_j, n_{j+1}, i_j et i_{j+1} . En déduire que la grandeur $n_j \sin i_j$ est constante tout au long de la traversée des dioptries.
12. Montrer alors que, quelque soit y :

$$n[y] \sin i[y] = n_c \sin i_0$$

On appelle A_n les points où le rayon lumineux fait "demi-tour" et δ leur distance au centre du cœur (*voir trajectoire*).

13. Que vaut l'angle i au niveau des points A_n ? En déduire alors une expression de $n[y = \delta]$ en fonction de i_0 et n_c .
14. Montrer que :

$$\delta = r_c \sqrt{\frac{1 - \sin i_0}{n_c - n_g} n_c}$$

15. A quelle condition sur δ le rayon reste confiné dans la fibre ?
16. Donner alors une condition sur i_0 puis sur θ pour que la lumière reste confinée dans la fibre.

ANNEXE

NOM prénom :

