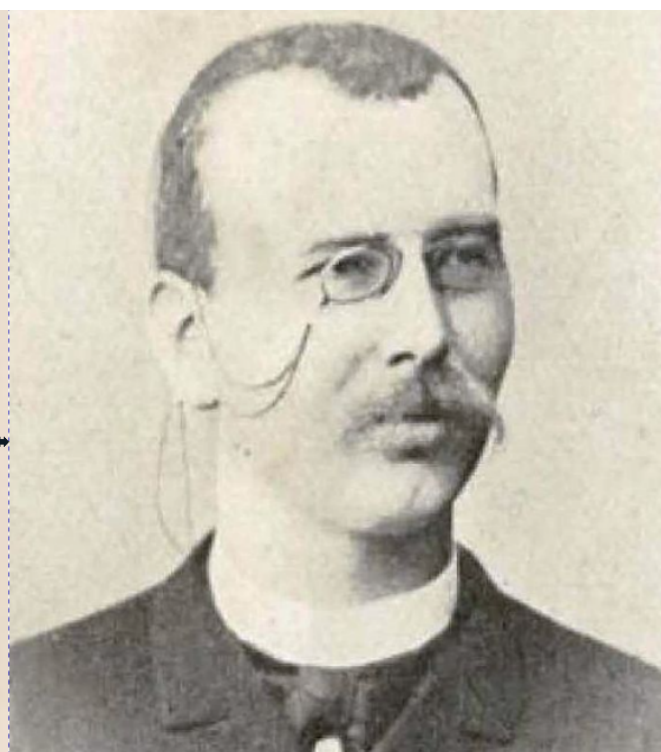


Table des matières

1 Les dimensions en physique-chimie	3
1.1 Notion de dimension	3
1.2 Équation aux dimensions	4
1.3 Règle de calcul des dimensions	4
1.4 Dimensions et opérateur mathématiques	5
1.5 Les sept dimensions du système international et autre cas particulier	5
1.6 Cas particulier de l'électricité	7
2 Construire une expression par analyse dimensionnelle	8
2.1 Construire une expression par analyse dimensionnelle	8
2.2 Discuter l'influences des grandeurs physiques	9



Savoirs ♥

- ▷ ♥ vocabulaire : grandeur physique, dimension, équation aux dimensions, SI
- ▷ ♥ les 7 dimensions du système internationales et les unités associés
- ▷ ♥ les conventions d'écritures ($[X]$, M/L/T/...) d'une équation aux dimensions
- ▷ ♥ les règles de calculs sur les dimensions :
 - ▷ somme
 - ▷ multiplication
 - ▷ division
 - ▷ puissance
 - ▷ dérivée
 - ▷ intégrale
 - ▷ fonction mathématiques

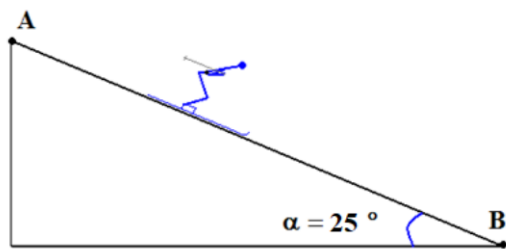
Savoir Faire

-  *Vérifier si l'expression d'une grandeur physique est homogène.*
-  *Retrouver les unités/dimensions d'une grandeur physique.*
-  *Trouver une expression d'une grandeur physique à l'aide des dimensions.*

Problématique

L'analyse dimensionnelle est une méthode/un truc/une astuce qui peut s'appliquer à n'importe quel domaine scientifique qui utilise des **unités** (*adieu les maths donc ...*). Pour comprendre sa portée prenons un exemple.

Skieur glissant sur une pente inclinée :



A la fin d'une question d'un exercice de mécanique je trouve que la vitesse atteinte par un skieur glissant sans frottement sur une pente inclinée d'angle α est :

$$v = \sqrt{2gL \sin \alpha}$$

avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur, $L = AB = 100 \text{ m}$ la longueur parcourue par le skieur et $\alpha = 30^\circ$ l'angle de la pente.

Une question légitime alors : **mon expression trouvée est-elle juste ? Et puis-je le vérifier ?**

Rédaction d'une réponse

Une grandeur physique est la caractéristique d'un système, d'un processus ou d'un évènement qui peut être **mesurée**. Deux approche alors :

- ▷ **Analyse théorique** : dans le cadre d'un modèle physique, on obtient une expression littérale. Une application numérique permet d'obtenir une valeur pour la grandeur physique.

Définition. Expression littérale

Une expression littérale d'une grandeur est une expression mathématiques où tous les paramètres sont représentés par des lettres/symboles.

- ▷ **Analyse expérimentale** : dans le cadre d'une expérience, on mesure la grandeur physique, le résultat s'accompagnant d'incertitudes de mesure

L'objectif est de mettre en regard ces deux résultats pour vérifier si le modèle théorique colle, ou non, aux expériences.

Ecriture d'une réponse

Pour notre question de skieur, on proposera une réponse type suivante (*inutile de lire en détail ni de comprendre*), la seule chose à remarquer est que la valeur de g , de L , de α et de toute autre données du problème n'apparaît **JAMAIS** dans mes calculs ou sur ma feuille. C'est juste pour ma calculatrice.

Exemple 1 : Théorème de l'énergie mécanique :

▷ point A : $z_A = 0$ et $v_A = 0$

▷ point B : $z_B = h \sin \alpha$ et $v_B = v$

Pas de perte énergétique donc $E_m(B) - E_m(A) = 0$ soit :

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh \sin \alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \sin \alpha \Rightarrow v^2 = 2gh \sin \alpha$$

On a alors $v = \sqrt{2gh \sin \alpha}$.

AN : $v = 15,6 \text{ m.s}^{-1}$.

On pensera sur une copie à mettre en évidence la formule littérale trouvée en l'encadrant ou en la surlignant.

1 Les dimensions en physique-chimie

1.1 Notion de dimension

Définition. Dimension d'une grandeur physique

La dimension d'une grandeur physique renseigne sur sa **nature physique**. Deux grandeurs physiques de même dimension (*i.e.*) de même nature peuvent être comparées.

Exemple 2 :

▷ ma taille est une **Longueur**, tout comme le périmètre de la Terre, la distance Terre Soleil mais aussi la longueur d'onde de la lumière.

🔴🔴🔴 **Attention !** il n'est pas évident que la longueur d'onde, égale au ratio $\frac{\text{vitesse de la lumière}}{\text{fréquence}}$ soit une longueur.

🔴🔴🔴 **Attention !** Une grandeur physique peut être purement numérique : c'est le cas par exemple d'un nombre. Elle est alors dite *sans dimension* ou *adimensionnée*.

1.2 Équation aux dimensions

Définition. Équation aux dimensions

L'équation aux dimensions est une équation parallèle associée à une équation physique qui met en termes de dimension (ou les unités) des grandeurs manipulées en utilisant les sept dimensions du système internationale. La dimension de la grandeur X est notée $[X]$.

On peut à chaque fois passer du "monde réel" à celui des dimensions :

$$X = \dots \xrightarrow{\text{dimension}} [X] = [\dots]$$

Exemple 3 : On note m ma masse, ρ ma masse volumique et V mon volume. On peut alors écrire :

$$\rho = m/V \xrightarrow{\text{dimension}} [\rho] = [m/V]$$

1.3 Règle de calcul des dimensions

Il y a alors quelques règles de calculs à connaître sur les dimensions. La plupart des règles de calcul des dimensions sont assez intuitives

Propriété. Règle de calcul sur les dimensions/unités

▷ **produit, quotient, puissance, somme :**

$$[XY] = [X][Y] \text{ et } [X/Y] = [X]/[Y] \text{ et } [X^\alpha] = [X]^\alpha$$

▷ **somme et soustraction**

$$[X + Y] = [X] \text{ ou } [Y] \text{ et } [2X] = [X]$$

🔴🔴🔴 **Attention !** jamais **JAMAIS DE SOMME/NOMBRES AVEC LES DIMENSIONS :**

$$[X + Y] \neq [X] + [Y] \text{ et } [2X] \neq 2[X]$$

Exemple 4 :

▷ une aire est un produit de deux longueurs donc :

$$A = \text{longueur} \times \text{longueur} \xrightarrow{\text{dimension}} [A] = [\text{longueur}] \times [\text{longueur}] = [\text{longueur}]^2$$

▷ un volume est un produit de trois longueurs donc :

$$V = \text{longueur} \times \text{longueur} \times \text{longueur} \xrightarrow{\text{dimension}} [V] = [\text{longueur}] \times [\text{longueur}] \times [\text{longueur}] = [\text{longueur}]^3$$

Exemple 5 : On peut retrouver la dimension/unité d'une masse volumique :

$$\rho = m/V \xrightarrow{\text{dimension}} [\rho] = [m/V] = [m]/[V] = \frac{[\text{masse}]}{[\text{volume}]} = \frac{[\text{masse}]}{[\text{longueur}]^3}$$

Méthode en DS. Gérer une équation :

une équation du type $m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v$ donne 2 informations d'un point de vue dimensionnelle

$$\triangleright \left[m \frac{dv}{dt} \right] = [mg]$$

$$\triangleright \left[m \frac{dv}{dt} \right] = [\alpha v]$$

Suivant ce qu'on cherche, on utilisera l'une ou l'autre

1.4 Dimensions et opérateur mathématiques

Propriété. Dérivée et intégrale

$$\left[\frac{dx}{dt} \right] = \frac{[x]}{[t]} \text{ et } \left[\int v dt \right] = [v] [t]$$

Exemple 6 : La vitesse est la dérivée de la position

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \xrightarrow{\text{dimension}} [\vec{v}] = \left[\frac{d\vec{OM}}{dt} \right] = \frac{[\vec{OM}]}{[t]} = \frac{\text{longueur}}{\text{temps}}$$

Application 1 : Donner la dimension d'une accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

.....

Propriété. Fonction mathématiques

(*cos*, *sin exp*, *log*, ...) prend en argument un nombre *x* **sans dimension** et renvoie un nombre *y* **sans dimension**.

Exemple 7 : Une tension $u(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Dans ce cas :

- ▷ $[u] = [V_0]$ donc $[V_0] = \text{tension}$
- ▷ $[\omega t] = 1$ donc $[\omega] = 1/[t] = \frac{1}{\text{temps}}$

Propriété. Vecteur ou pas vecteur

La dimension d'une grandeur vectorielle est la même que la grandeur scalaire : $[\vec{X}] = [X]$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est de la même dimension que v $[\vec{v}] = [v] = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$.

1.5 Les sept dimensions du système international et autre cas particulier

Afin de mettre tout le monde d'accord, il a été décidé d'utiliser un système de dimension fondamentale commun. Ce sont les 7 dimensions du système internationale et toute dimension peut s'exprimer à partir de cette dernière.

Propriété. Dimension et Unités du Système Internationale (SI)

La dimension de n'importe quelle grandeur physique peut toujours s'exprimer en fonction des sept dimensions du système international. Il est constitué des dimensions suivantes (avec leur notation littérale standard) :

- ▷ la longueur L en mètre m ;
- ▷ le temps T en seconde s ;
- ▷ la masse M en kilogramme kg ;
- ▷ la température θ en Kelvin K ;
- ▷ la quantité de matière N en mole mol ;
- ▷ l'intensité électrique I en Ampère A ;
- ▷ l'intensité lumineuse J (*inutile!!*).

▷ 🚫🚫🚫 **Attention !** La température ce n'est pas T , ça c'est le temps !

▷ 🚫🚫🚫 **Attention !** Ne pas confondre M (symbole de la masse) et m (unités des longueurs).

▷ 🚫🚫🚫 **Attention !** Une force, une pression, une énergie, une tension (*liste non-exhaustive*) ne sont pas des dimensions du système internationale. Il faut donc les ré-exprimer à partir de ces dernières.

Lorsqu'on manipule des dimensions, on peut utiliser :

- ▷ les dimensions et leurs symboles : $[X] = \text{une expression de } L, T, M, \theta, N, I$
- ▷ les unités : $[X] = \text{une expression de } m, s, kg, K, mol, A$

Astuce : on est meilleur à toujours faire la même chose, choisissez une approche et conserver là.

► Comment trouver la dimension d'une grandeur *a priori* inconnue ?

Les grandeurs physiques sont reliées entre elles :

- ▷ par des équations qui les définissent
- ▷ par des principes de bases de modèle physique

Méthode en DS. Retrouver les unités/dimension d'une grandeur

Pour retrouver la dimension d'une grandeur, on utilise l'équation aux dimensions associées à une loi physique simple où cette grandeur apparaît.

Exemple 8 : Une force $\vec{F}$ se retrouve :

▷ sa définition, par exemple le poids $m\vec{g}$

▷ une loi, le PFD $m\vec{a} = \sum \vec{F}$.

Dans un cas comme dans l'autre on trouve :

$$F = ma \xrightarrow{\text{dimension}} [F] = [m][a] = \text{kg.m.s}^{-2}$$

Application 2 : Retrouver la dimension et les unités SI d'une énergie $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et d'une pression P définie comme une force sur une surface $P = F/S$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Application 3 : Soit τ un temps, v une vitesse et d une distance. Donner la dimension des grandeurs : τv ; $(\tau/d)^2$; $\sqrt{dv}$; $\sqrt{\frac{d}{v\tau}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Application 4 : Vérifier que la grandeur $v = \sqrt{2gh \cos \alpha}$ obtenue précédemment est bien une vitesse.

.....

.....

.....

.....

Application 5 : Donner la dimension d'une puissance définie comme la dérivée d'une énergie $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

.....

.....

.....

.....

Définition. Homogénéité

Une équation est dite homogène si les termes de chaque côté de l'égalité possèdent la même dimension.

Propriété. Règle d'or

Une formule non homogène est nécessairement fautive

Dans les premières questions, on prendra le temps de vérifier rapidement la dimension de ses résultats. Si on avait trouvé par exemple $v = \sqrt{2g \cos \alpha / h}$ on aurait eu :

$$v = \sqrt{2g \cos \alpha / h} \xrightarrow{\text{dimension}} [v] = [\sqrt{2g \cos \alpha / h}] \Rightarrow \text{m.s}^{-1} = \left(\frac{\text{m.s}^{-2}}{\text{m}} \right)^{1/2} = \text{s}^{-1}$$

C'est non-homogène donc faux nécessairement.

1.6 Cas particulier de l'électricité

Les dimensions du système international ne sont pas pratique quand on fait de l'électricité. En effet les tension (ou les Volt) ne font pas partie du système SI.

Exemple 9 : Une puissance $\mathcal{P} = u \times i$ donc

$$\mathcal{P} = u \times i \xrightarrow{\text{dimension}} [\mathcal{P}] = [u][i] \Rightarrow [u] = \text{kg.m.s}^{-3}.\text{A}^{-1}$$

Pas pratique du tout ...

Propriété. Système d'unité en électricité

Lorsqu'on fait de l'électricité, on utilisera le système de dimension "pratique" suivant :

- ▷ l'intensité électrique I en Ampère A ;
- ▷ la tension électrique U en Volt V ;
- ▷ l'intensité électrique T en seconde s ;

Exemple 10 : Dans ce cas là, une puissance a la dimension de : $\mathcal{P} = ui \xrightarrow{\text{dimension}} [\mathcal{P}] = [u][i] = A.V$

Application 6 : Donner la dimension en système électrique d'une résistance R , d'une inductance L , d'une capacité C .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Construire une expression par analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle (*i.e.* utiliser les dimensions) permet de retrouver l'expression d'une grandeur X (*i.e.* "retrouver la formule") si on sait :

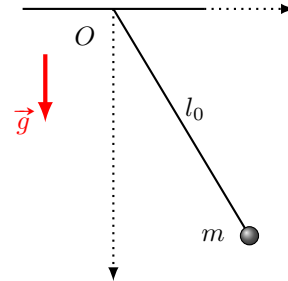
- ▷ quelle est la dimension de X
- ▷ quelles sont les autres grandeurs qui interviennent dans l'expression de X

Nous allons étudier la méthode de résolution à travers un exemple.

Période d'oscillation d'un pendule simple

Une masse m est attachée au bout d'un fil sans masse de longueur l_0 . La masse oscille librement sous l'action de la pesanteur g . Elle possède un mouvement périodique, de période T .

Donner une expression de la période à une constante numérique près.



2.1 Construire une expression par analyse dimensionnelle

Méthode en DS. Construire une expression à l'aide des dimensions

- ▷ Préciser les dimensions des différentes grandeurs : celle recherchée et celles utiles
- ▷ Ecrire l'expression sous la forme d'un produit d puissances, les puissances étant *a priori* inconnues
- ▷ Passer aux dimensions et construire un système d'équations avec les puissances
- ▷ Résoudre le système et retrouver l'expression

On va mettre ça en place !

- ▷ Préciser les dimensions des différentes grandeurs

- ▷ Écrire l'expression

- ▷ Passer aux dimensions et construire un système

▷ Résoudre le système

*** **Attention !** Cette méthode permet de retrouver la forme générale de la formule mais pas le facteur numérique devant.

Application 7 : Une masse m tombe d'une hauteur h sous l'effet de la pesanteur g . À l'aide de l'analyse dimensionnelle, estimer le lien entre la vitesse qu'aura la masse au moment de toucher le sol et ces différentes grandeurs.

Application 8 : On rappelle que l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps de masse m_1 et m_2 séparé par une distance d est :

$$F = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

1. Montrer que la dimension de $\mathcal{G}$ est $[\mathcal{G}] = M^{-1}L^3T^{-2}$ et en déduire ses unités.
2. La vitesse d'un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre est susceptible de dépendre de la masse de la Terre M_T , du rayon de l'orbite R , et de la constante de gravitation $\mathcal{G}$. En donner une expression plausible.

2.2 Discuter l'influence des grandeurs physiques

On peut alors discuter l'influence des différentes grandeurs.

▷ influence de la masse :

▷ influence de la longueur :

Exemple 11 : Par combien faut-il multiplier la longueur du fil pour obtenir une période 10 fois plus grande ?

.....

.....

.....

.....

.....

Application 9 : Sur Terre ($g_T = 9,81\text{m.s}^{-2}$), je mesure avec mon pendule une période d'oscillation de $T = 2,5\text{s}$. J'embarque dans un vaisseau pour Mars ($g_M = 3,71\text{m.s}^{-2}$). Donner la nouvelle période d'oscillation du pendule.