

Travail demandé

Le devoir dure 3h.

- ▷ Les différentes parties peuvent se traiter indépendamment les unes des autres. Ayez confiance en vous, vous savez faire plein de choses ! Prenez votre temps à chaque question pour expliquer votre démarche.
- ▷ Les questions (*) sont plus dures : toute tentative de réponse sera récompensée.
- ▷ **Rappel** : Les erreurs d'homogénéité flagrantes seront sanctionnées. **La réponse à une question prend la forme d'une formule littérale encadrée ou soulignée.**

La calculatrice n'est pas autorisée. Bon courage !

Consigne pour les applications numériques :

Les calculatrices sont interdites. Les applications numériques devront être données avec un chiffre significatif.

On admettra l'approximation : $\pi \simeq 3$, $e^{-5} \simeq 0$ et $\ln 2 \simeq 0,7$.

Sardines et phoques

La baie de Somme abrite des phoques et des sardines. Sachant que les phoques mangent les sardines pour se nourrir, on modélise sommairement la dynamique d'évolution de ces deux populations à l'aide d'un système de deux équations différentielles dans lesquelles $p(t)$ et $s(t)$ désignent respectivement les effectifs des phoques et des sardines. En l'absence de toute intervention extérieure, les équations sont les suivantes :

$$\frac{dp}{dt} = \omega_p(s(t) - S_e) \quad (0.1)$$

$$\frac{ds}{dt} = -\omega_s(p(t) - P_e) \quad (0.2)$$

Données : $P_e = 100$, $S_e = 5000$, $\omega_p = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{rad.mois}^{-1}$, $\omega_s = 1,0 \cdot 10 \text{rad.mois}^{-1}$.

A une date $t = 0$ prise comme origine des temps, une colonie de phoque arrive. On mesure à $t = 0$ un nombre P_0 de phoques et S_0 de sardines.

1. Calculer $\frac{d^2p}{dt^2}$ à l'aide des équations et montrer que alors que le nombre de phoque $p(t)$ est solution d'une équation d'oscillateur harmonique.
2. Montrer de la même façon que $s(t)$ est solution d'une équation d'oscillateur harmonique.
3. Exprimer la période temporelle de variation de ces deux population en fonction des données du problème. Faire l'application numérique (*on donnera le résultat en mois*).
4. Donner l'expression littérale de $p(t)$ en fonction des données du problèmes.
5. Montrer que, étrangement, si le nombres initial de sardine S_0 dépasse une valeur critique S_c qu'on exprimera en fonction de S_e , ω_s , ω_p , P_0 et P_e , les phoques disparaîtront.

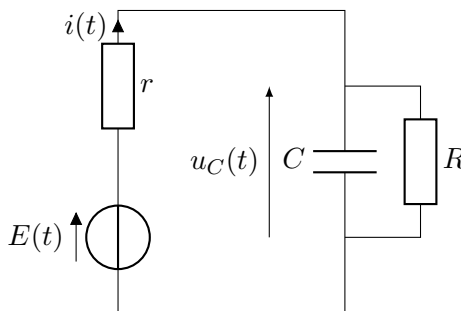
Charge d'une batterie : pertes et optimisation de recharge

Dans toute cette partie on s'intéresse à la charge d'une batterie. On modélise la batterie par un condensateur idéal, de capacité $C = 10\text{F}$, branché en parallèle avec une résistance $R = 50\text{k}\Omega$, appelée résistance de fuite. Le générateur de tension sera modélisé par un générateur de Thévenin de résistance interne $r = 50\Omega$ et de f.e.m. $E(t)$. On retiendra deux critères pour évaluer une façon de charger le condensateur :

- ▷ le temps de charge, noté $\mathcal{T}$
- ▷ le rendement de la charge η défini comme le rapport de l'énergie stockée dans le condensateur sur celle fournie par le générateur

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}_{\text{généré}}}$$

On raisonne sur le circuit ci-contre, le condensateur étant initialement déchargé :



1. Montrer que la tension $u_C(t)$ du condensateur est solution de l'équation différentielle :

$$rC \frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right) u_C = E(t)$$

Charge par un échelon de tension

On choisit dans un premier temps d'appliquer un échelon de tension : $E(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E_0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$

On donne $E_0 = 2\text{V}$.

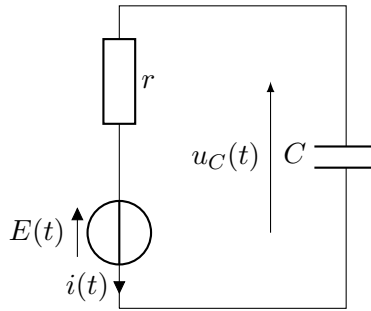
2. Donner l'expression de $u_C(t)$. En déduire la valeur de la tension finale, notée U_∞ , du condensateur.
3. Donner le temps $\mathcal{T}$ au bout duquel le condensateur est chargé. Faire l'application numérique. Est-il possible d'améliorer ce temps ?
4. Donner le temps $t_{1/2}$ au bout duquel le condensateur est chargé de moitié. Comparer $t_{1/2}$ et $\mathcal{T}/2$. Quel pourcentage de la batterie sont les plus longs à charger ?
5. Donner l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_C$ stockée dans le condensateur à la fin de la charge en fonction de C et U_∞ . Faire l'application numérique.
6. Montrer que $i(t) = U_\infty \left(\frac{1}{R} + \frac{e^{-t/\tau}}{r} \right)$.
7. (*) Montrer que l'énergie $\mathcal{E}_{\text{généré}}$ fournie par le générateur entre les instants 0 et $\mathcal{T}$ est égale à :

$$\mathcal{E}_{\text{généré}} = \frac{5r + R}{R} U_\infty^2 C$$

8. En déduire le rendement η de la charge. Faire l'application numérique.
9. *Question ouverte :*
Pourquoi, contrairement à un condensateur idéal, une batterie se décharge progressivement ? Estimer le temps au bout duquel la batterie sera déchargée.

Charge par adaptation de tension

On remarque alors que si $R \gg 5r$, tout se passe comme dans le circuit rC "classique" suivant lors de la charge :



On travaillera désormais avec ce circuit et on admettra sans démonstration que son équation différentielle est :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{rC}u_C = \frac{E(t)}{rC}$$

Pour réduire le temps de charge on applique désormais une tension $E(t) = E_0 (1 + \alpha e^{-t/\Delta t})$, avec α une constante numérique et Δt un temps caractéristique. Ces deux grandeurs peuvent être fixées par l'utilisateur.

10. Justifier pourquoi la tension $u_C(t)$ peut toujours s'écrire comme la somme d'une solution particulière u_P et de la forme générale des solutions $\tilde{u}_C = Ae^{-t/\tau}$ de l'équation homogène associée.
Pourquoi ne peut-on pas chercher u_P sous la forme d'une constante dans le cas étudié ici ?

On cherchera u_P de la forme : $u_P(t) = C_1 + C_2 e^{-t/\Delta t}$

11. (*) En injectant u_P dans l'équation différentielle et évaluant l'expression en $t = +\infty$ et $t = 0$, montrer que

$$C_1 = E_0 \quad \text{et} \quad C_2 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta t - rC} E_0$$

12. Exprimer la constante d'intégration A en fonction de α , E_0 , Δt et rC .
13. Montrer qu'en choisissant une valeur particulière pour le coefficient α , on peut annuler la constante d'intégration A .
14. Donner alors la nouvelle expression de u_C et en déduire le nouveau temps de charge $\mathcal{T}$ en fonction de rC et α .
15. Comment peut-on alors en jouant sur le temps Δt réduire le temps de charge de la batterie ? Quels problèmes peuvent alors survenir ?
16. On peut montrer (*non demandé ici mais les plus audacieux peuvent essayer*) que le rendement est alors :

$$\eta = \frac{rC - \Delta t}{3\Delta t\alpha}$$

Conclure sur l'optimisation de la charge d'une batterie.