

Sardines et phoques

1. On dérive l'équation sur $p(t)$:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \omega_p \left(\frac{ds}{dt}(t) - 0 \right) = -\omega_p \omega_s (p(t) - P_e)$$

On trouve alors une équation d'oscillateur harmonique : $\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega_p \omega_s p(t) = \omega_s \omega_p P_e$.

2. Avec un raisonnement similaire on trouve : $\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_p \omega_s s(t) = \omega_s \omega_p S_e$.

3. On identifie $\omega_0 = \sqrt{\omega_p \omega_s}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_p \omega_s}}$.

A.N. $T_0 = \frac{2 \times 6}{\sqrt{1,0 \cdot 10^{-1} \times 1,0 \cdot 10}} = 12 \text{ mois.}$

4. On décompose p en sa solution homogène et sa solution particulière : $p(t) = p_P + \tilde{p}$

▷ p_P sous la forme d'une constante : $p_P = P_e$

▷ $\tilde{p} = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

CI $p(0) = P_0$ et $\frac{dp}{dt}(0) = \omega_p (S_0 - S_e)$.

On trouve $A = P_0 - P_e$ et $B = \frac{\omega_p}{\omega_0} (S_0 - S_e)$.

$$p(t) = P_e + (P_0 - P_e) \cos \omega_0 t + \frac{\omega_p}{\omega_0} (S_0 - S_e) \sin \omega_0 t$$

On passe directement en forme amplitude et phase à l'origine :

$$p(t) = P_e + \sqrt{(P_0 - P_e)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (S_0 - S_e)^2} \cos \omega_0 t + \varphi_0$$

Réflexe : on identifie au dessus l'amplitude = $\sqrt{(P_0 - P_e)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (S_0 - S_e)^2}$.

5. Les phoques disparaissent si leur population passe dans les négatifs soit si :

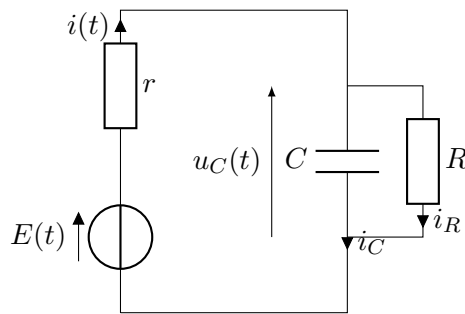
$$P_e - \sqrt{(P_0 - P_e)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (S_0 - S_e)^2} < 0 \Rightarrow P_e^2 < (P_0 - P_e)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} (S_0 - S_e)^2$$

Donc :

$$(S_0 - S_e)^2 > \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} (P_e^2 - (P_0 - P_e)^2) \Rightarrow S_0 > S_e + \sqrt{\frac{\omega_s}{\omega_p} P_0 (2P_e - P_0)}$$

Charge d'une batterie : pertes et optimisation de recharge

1.



- ▷ **Loi des mailles** : $E(t) = u_r + u_C$
- ▷ **Loi des noeuds** : $i = i_C + i_R$
- ▷ **Loi des dipôles** $u_r = ri$; $U_C = Ri$; $i_C = C \frac{du_C}{dt}$

On trouve alors : $E(t) = ri + u_C = r(i_C + i_R) + u_C$ donc $E(t) = r \left(C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} \right) + u_C$ soit :

$$rC \frac{du_C}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R} \right) u_C = E(t)$$

Charge par un échelon de tension

2. On passe sous forme canonique : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1 + \frac{r}{R}}{rC} u_C = \frac{E_0}{rC}$ et on trouve $\tau = \frac{rC}{1 + \frac{r}{R}}$.

On décompose u_C en sa solution homogène et sa solution particulière : $u_C(t) = u_P + \tilde{u}$

▷ u_P sous la forme d'une constante : $u_P = \frac{E_0}{rC} \tau = \frac{R}{R+r} E_0$

▷ $\tilde{p} = Ae^{-t/\tau}$

CI $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé.

On trouve $A = -\frac{R}{R+r} E_0$ soit : $u_C(t) = \frac{R}{R+r} E_0 (1 - e^{-t/\tau})$. On identifie $U_\infty = \frac{R}{R+r} E_0$.

3. Le régime transitoire, et donc la charge de la batterie, se termine pour $\mathcal{T} = 5\tau = 5 \frac{rC}{1 + \frac{r}{R}}$.

A.N. $\mathcal{T} = 5 \frac{50 \times 10}{1 + \frac{50}{50 \times 10^3}} = 5 \times 50 \times 10 = 2500s$, environ 40 minutes.

Pour réduire se temps il faudrait réduire :

▷ r : difficile à réaliser car c'est un composant interne du générateur et fixé par des normes internationales

▷ réduire C : c'est réalisable mais on réduirait la capacité de la batterie

Il est donc impossible en l'état de réduire le temps de charge.

4. On cherche $u_C(t_{1/2}) = \frac{U_\infty}{2}$ soit :

$$1 - e^{t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln 2$$

On remarque alors que $t_{1/2} = 0,7rC < 1,5rC = \mathcal{T}/2$: la batterie est à moitié chargée avant la moitié du temps de charge. La charge des 50 premier pour cents prend moins de temps que celle des 50 derniers.

5. On calcule $\mathcal{E}_C = \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{P}_C dt$ soit :

$$\mathcal{E}_C = \int_0^{\mathcal{T}} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C u_C^2(t) \right] dt = \left[\frac{1}{2} C u_C^2(t) \right]_0^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} C u_\infty^2 - 0$$

A.N. $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} 10 \times \underbrace{\left(\frac{50 \times 10^3}{50 + 50 \times 10^3} \right)}_{\simeq 1} \times 2^2 = 20J$.

6. Avec la loi des mailles : $i = i_C + i_R = C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R}$ soit :

$$i(t) = -C \frac{U_\infty}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{U_\infty}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{U_\infty}{R} + \left(\frac{C}{\tau} - \frac{1}{R} \right) e^{-t/\tau}$$

On calcule : $\frac{C}{\tau} - \frac{1}{R} = \frac{1+r/R}{r} - \frac{1}{R} = \frac{R+r-r}{rR} = \frac{1}{r}$

On a bien : $i(t) = U_\infty \left(\frac{1}{R} + \frac{e^{-t/\tau}}{r} \right)$.

7. On calcule $\mathcal{E}_{\text{généré}} = \int_0^T \mathcal{P}_{\text{généré}} dt$ soit :

$$\mathcal{E}_{\text{généré}} = \int_0^T E_0 i(t) dt = E_0 U_\infty \int_0^T \left(\frac{1}{R} + \frac{e^{-t/\tau}}{r} \right) dt$$

On trouve :

$$\int_0^T \left(\frac{1}{R} + \frac{e^{-t/\tau}}{r} \right) dt = \left[\frac{t}{R} \right]_0^{5\tau} + \frac{1}{r} \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^{5\tau} = \frac{5\tau}{R} + \frac{\tau}{r} = 5 \frac{rC}{R+r} + \frac{C}{1+\frac{r}{R}} = \frac{5r+R}{r+R} C$$

On a alors $\mathcal{E}_{\text{généré}} = (5r+R) U_\infty \times \underbrace{\frac{E_0}{r+R}}_{=U_\infty/R} C$.

On trouve bien $\mathcal{E}_{\text{généré}} = \frac{5r+R}{R} U_\infty^2 C$.

8. Le rendement est alors : $\eta = \mathcal{E}_C / \mathcal{E}_{\text{généré}} = \frac{1}{2} \frac{R}{5r+R}$.

Avec toujours le constat que $R \gg r$, on trouve $\eta = 0,5$.

9. Lorsqu'on débranche la batterie une fois chargé, à cause de la résistance de fuite, le condensateur va se "vider" dans la résistance R . On a alors un circuit "RC classique" avec un temps caractéristique $\tau = RC$. La batterie aura fini de se vider au bout d'un temps $\mathcal{T} = 5RC = 5 \times 50 \cdot 10^3 \times 10 = 2,5 \cdot 10^6$ s, soit environ un mois.

Charge par adaptation de tension

10. La décomposition de la solution est toujours possible car l'équation différentielle est linéaire. De plus l'équation homogène reste la même, la forme générale des solutions homogènes ne changent pas. Comme le membre de droite n'est plus une constante, en cherchant u_P sous cette forme il est impossible de trouver une solution.

On cherchera u_P de la forme : $u_P(t) = C_1 + C_2 e^{-t/\Delta t}$

11. (*) On trouve :

$$-\frac{C_2}{\Delta t} e^{-t/\Delta t} + \frac{C_1}{\tau} + \frac{C_2}{\tau} e^{-t/\Delta t} = \frac{E_0}{rC} + \frac{\alpha E_0}{rC} e^{-t/\Delta t}$$

▷ Pour $t = +\infty$ on trouve : $0 + \frac{C_1}{\tau} + 0 = \frac{E_0}{rC} + 0$ donc $C_1 = E_0$.

▷ Pour $t = 0$ on trouve : $-\frac{C_2}{\Delta t} + \frac{C_1}{\tau} + \frac{C_2}{\tau} = \frac{E_0}{rC} + \frac{\alpha E_0}{rC}$.

Avec la valeur de C_1 on trouve : $C_2 \left(-\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{\alpha E_0}{rC}$

Finalement $C_2 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta t - rC} E_0$

12. Constante d'intégration $\Rightarrow$ **CI!!!**

$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (condensateur déchargé et tension continue; et $u_C(0) = A + E_0 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta t - rC} E_0$

On a alors $A = -E_0 \left(1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta t - rC} \right)$

13. On cherche $A = 0$ soit :

$$1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta t - rC} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{rC - \Delta t}{\Delta t}$$

14. Dans ce cas précis, la tension u_C est égale à sa solution particulière (comme $A = 0$) donc :

$$u_C(t) = E_0 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta t - rC} E_0 e^{-t/\Delta t}$$

On remarque alors que le nouveau temps caractéristique n'est plus τ mais Δt . Le temps de charge est alors $\mathcal{T} = 5\Delta t$

15. L'intérêt de la manœuvre est que le temps caractéristique de la charge est alors contrôlé par l'utilisateur. On peut, si on le souhaite, appliquer une tension $E(t)$ avec $\Delta t = 1s$ pour charger la batterie en $5s$. Attention néanmoins, en réduisant énormément la valeur de Δt on augmente celle de α et donc la tension du générateur. A trop vouloir réduire le temps de charge, on risque d'endommager les appareils avec des tensions trop fortes.

16. Avec cette nouvelle expression de u_C on trouve $i = \frac{-C\alpha}{\Delta t - rC} E_0 e^{-t/\Delta t}$ et donc :

$$\mathcal{E}_{\text{gén}} = \int_0^{5\Delta t} E(t)i(t)dt = \int_0^{5\Delta t} E_0 \left(1 + \alpha e^{-t/\Delta t}\right) \frac{-C\alpha}{\Delta t - rC} E_0 e^{-t/\Delta t} dt$$

$$\mathcal{E}_{\text{gén}} = E_0^2 \frac{C\alpha}{rC - \Delta t} \int_0^{5\Delta t} E_0 \left(e^{-t/\Delta t} + \alpha e^{-2t/\Delta t}\right) dt = E_0^2 \frac{C\alpha}{rC - \Delta t} (\Delta t + \Delta t/2)$$

On a $\mathcal{E}_{\text{gén}} = \frac{3}{2} \frac{CE_0^2 \Delta t}{rC - \Delta t} \alpha$: l'énergie dépensée pour charger la batterie augmente avec le coefficient α .

Le rendement est alors : $\frac{rC - \Delta t}{3\Delta t \alpha}$

Par conséquent :

- ▷ si on veut réduire le temps de charge, il faut augmenter α
- ▷ mais ce faisant, on augmente l'énergie dépensée et donc on réduit le rendement