

# Ch 2 : Fonctions usuelles

## Partie 2/7 : Fonctions trigonométriques circulaires (sinus, cosinus, tangente)

### 1 Fonction sinus

Dans le livre scolaire : <https://www.lelivrescolaire.fr/page/15588001>

#### Propriétés de la fonction :

1. *Régularité* La fonction sinus est définie, continue, dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos x$
2. *Dérivées successives* La fonction sinus est en fait infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$   
 (on dit qu'elle est **de classe**  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ) et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^{(n)}(x) =: \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
3. *Parité, périodicité* Sinus est une application impaire et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .
4. En utilisant aussi le fait qu'on a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$  on peut restreindre l'étude de sinus à l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  et on a le tableau de variations suivant :
5. *Monotonie ou variations*  
 Sinus est strictement croissante sur tout intervalle du type  $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .  
 Sinus est strictement décroissante sur tout intervalle du type  $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .
6. *Bornitude*  $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$  et on verra que  $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1]$ , ce qui est plus fort.
7. *Convexité* la fonction sinus est concave sur tout intervalle du type  $[k\pi, (k+1)\pi]$  et convexe sur tout intervalle du type  $[(k+1)\pi, (k+2)\pi]$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 Les points dont l'abscisse est du type  $k\pi$  sont des points d'inflexion de la courbe.
8. *Restriction* Sinus est continue et strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  donc la **restriction** de sinus à  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  réalise une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  sur  $\sin\left([-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]\right) = [-1; 1]$ .  
 Son application réciproque se nomme Arcsinus et sera l'objet d'une autre partie.

**Propriétés algébriques :**  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$  etc *cf Ch6 Trigonométrie*

**Limite usuelle à connaître :**  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

NB : on notera  $\sin x \sim x$  ; remarquer que  $y = x$  est une équation de la tangente à la fonction sinus au point d'abscisse 0

#### Inégalités souvent rencontrées en exercice :

$$(1) \quad \forall x > 0 \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

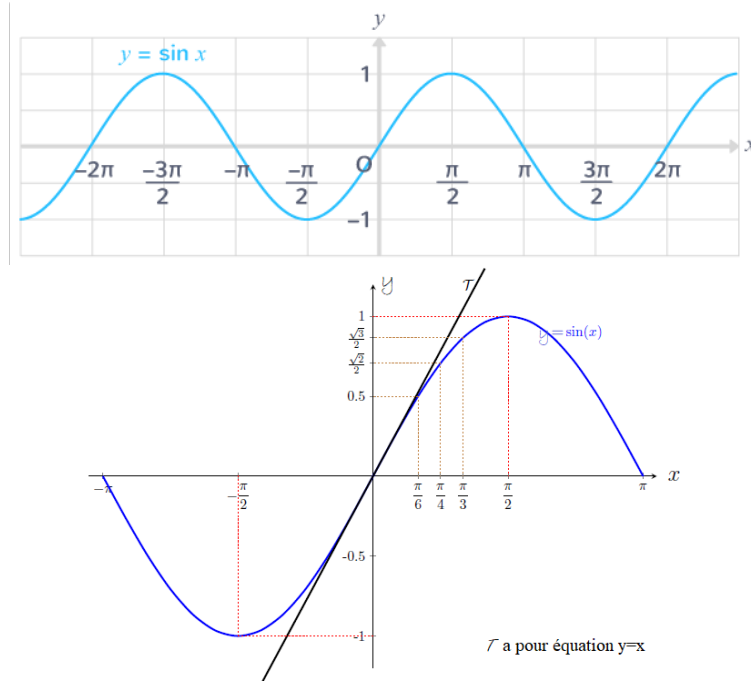
NB : la fonction sinus est donc encadrée sur  $\mathbb{R}_+^*$  par ses polynômes de Taylor en 0 d'ordre 1 et d'ordre 3

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$$

**Résolutions :** pour  $a, b$  réels :  $\sin a = \sin b \iff (a \equiv b[2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b[2\pi])$

Cas particulier :  $\sin a = 0 \iff a \equiv 0[\pi]$

**Graphes**



## 2 Fonction cosinus

Dans le livre scolaire : <https://www.lelivrescolaire.fr/page/15588001>

**Propriétés de la fonction :**

1. *Régularité* La fonction cosinus est définie, continue, dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = -\sin x$
2. *Dérivées successives* La fonction cosinus est en fait infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$   
et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
3. *Parité, périodicité* Cosinus est une application paire et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .
4. En utilisant aussi le fait qu'on a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$  on peut restreindre l'étude de cosinus à l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  et on a le tableau de variations suivant :
5. *Monotonie ou variations*  
Cosinus est strictement décroissante sur tout intervalle du type  $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Cosinus est strictement croissante sur tout intervalle du type  $[(2k+1)\pi; (2k+2)\pi]$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .
6. *Bornitude*  $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$  et on verra que  $\cos(\mathbb{R}) = [-1; 1]$ , ce qui est plus fort.
7. *Convexité* la fonction cosinus est concave sur tout intervalle du type  $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$  et convexe sur tout intervalle du type  $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Les points dont l'abscisse est du type  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  sont des points d'inflexion de la courbe.

8. *Restriction* Cosinus est continue et strictement croissante sur  $[0; \pi]$  donc la **restriction** de cosinus à  $[0; \pi]$  réalise une bijection de  $[0; \pi]$  sur  $\cos([0; \pi]) = [-1; 1]$ .  
Son application réciproque se nomme Arccosinus et sera l'objet d'une autre partie.

**Propriétés algébriques :**  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  etc *cf Ch6 Trigonométrie*

**Limite usuelle à connaître :**  $\frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  NB : on notera  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$

**Inégalités souvent rencontrées en exercice :**

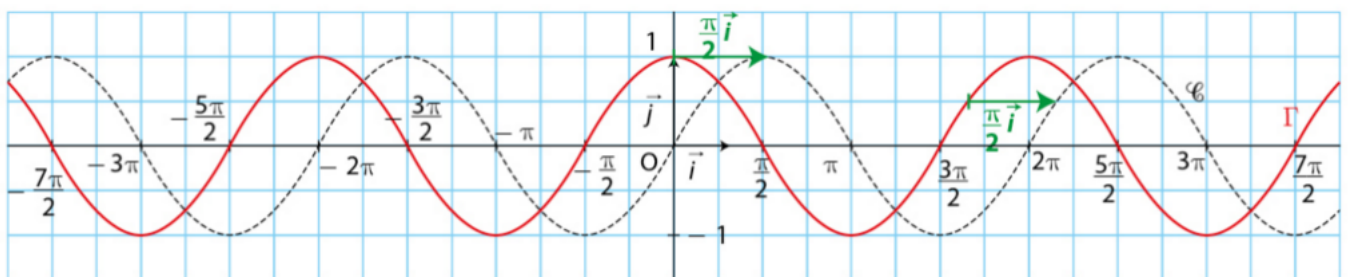
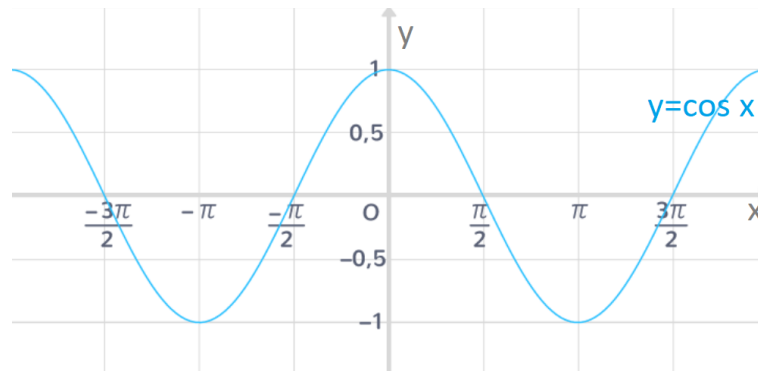
$\forall x > 0 \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$  NB : la fonction cosinus est donc minorée sur  $\mathbb{R}_+^*$  par son polynôme de Taylor en 0 d'ordre 2.

**Résolutions :** pour  $a, b$  réels :  $\cos a = \cos b \iff (a \equiv b[2\pi] \text{ ou } a \equiv -b[2\pi])$

Cas particulier :  $\cos a = 0 \iff a \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

**Un p'tit dernier :**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$ .

**Graphe**



Lecture :  $\mathcal{C}$  est la courbe de la fonction  $\dots$ ,  $\Gamma$  est la courbe de la fonction  $\dots$ .

$\mathcal{C}$  se déduit de  $\Gamma$  en effectuant  $\dots$

### 3 Fonction tangente

Dans le livre scolaire : <https://www.lelivrescolaire.fr/page/7173678>

**Définition de la fonction :**  $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

**Propriétés de la fonction :**

1. *Ensemble de définition* La fonction tangente est définie sur  $D = \dots$
2. *Régularité* La fonction tangente continue, dérivable sur  $D$ .  
 $\forall x \in D \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
3. *Dérivées successives* La fonction tangente est en fait infiniment dérivable sur  $D$ .
4. *Parité, périodicité* Tangente est une application impaire et  $\pi$ -périodique sur  $D$ .
5. On peut restreindre l'étude de la fonction tangente à l'intervalle  $\dots$  et on a le tableau de variations suivant :

#### 6. Monotonie ou variations

Tangente est strictement croissante sur tout intervalle du type  $]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; +\frac{\pi}{2} + 2k\pi[$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ ) mais ATTENTION elle n'est pas croissante sur  $D$ .

7. *Convexité* la fonction tangente est concave sur tout intervalle du type  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi[$  et convexe sur tout intervalle du type  $[k\pi; +\frac{\pi}{2} + k\pi[$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ ). Les points dont l'abscisse est du type  $k\pi$  sont des points d'inflexion de la courbe.
8. *Restriction* Tangente est continue et strictement croissante sur  $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$  donc la **restriction** de tangente à  $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$  sur  $\tan(]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ .  
 Son application réciproque se nomme Arctangente et sera l'objet d'une autre partie.

**Propriétés algébriques :**  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$  etc cf Ch6 Trigonométrie

**Limite usuelle à connaître :**  $\frac{\tan x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

NB : on notera  $\tan x \sim x$ ; remarquer que  $y = x$  est une équation de la tangente à la fonction tangente au point d'abscisse 0

**Inégalité souvent rencontrée en exercice :**  $\forall x \in ]0; \frac{\pi}{2}[ \quad \tan x \geq x$

**Résolutions :** pour  $a, b$  réels :  $\tan a = \tan b \iff a \equiv b [\pi]$

Cas particulier :  $\tan a = 0 \iff a \equiv 0 [\pi]$

**Graphes**

