

Merci à E.-J. Sims, E. Sebert-C., P. Stienne et G. François qui m'ont fourni une aide précieuse

Ch 2 : Fonctions usuelles

Partie 3 : Les fonctions puissances

1 Puissance entière

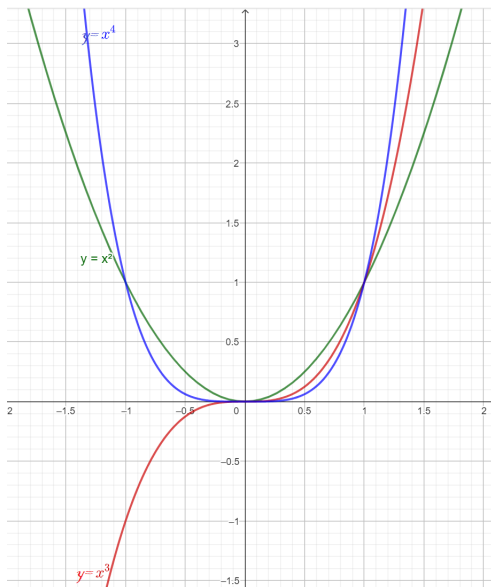
Définition (Fonction puissance à exposant entier).

On définit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$

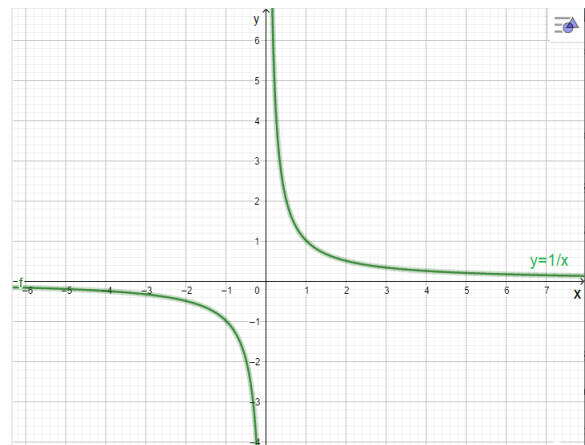
La fonction $x \mapsto x^n$ est donc définie sur $\mathbb{R}$

Propriétés. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}$

1. $x^0 = 1$
2. $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, x^{n+m} = x^n \times x^m$
3. Pour $x \neq 0, x^{-1} = \frac{1}{x}$ donc $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
et $\forall n, m \in \mathbb{N}, x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}$
4. $x^n y^n = (xy)^n$
5. Pour $y \neq 0, \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$
6. $(x^n)^m = x^{nm}$
7. *Ordre des puissances entières d'un réel positif*
Pour $x \in \mathbb{R}^+ \quad x^{n+1} \leq x^n \iff x \in [0, 1]$



Graphes des fonctions carrée, cube et puissance 4



Graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$

2 Puissance entière négative

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Un cas particulier à connaître : la fonction inverse

La fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
par exemple, $-2 < 2$ mais $-1/2 < 1/2$.

3 Puissance du type $\frac{1}{n}(n \in \mathbb{N}^*)$

3.1 Cas où n est impair

L'application $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc (par th. de la bijection) elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Son application réciproque s'appelle **racine n -ième** et se note $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{cases}$.

On a donc **pour n impair** : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}$.

Exemple : $\sqrt[3]{-27} = \dots$ Simplifier $\sqrt[3]{250} = \dots$

Notation : Lorsque a est positif, on note aussi $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Propriétés

1. racine n -ième est continue sur $\mathbb{R}$
2. racine n -ième est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
3. racine n -ième est impaire
4. racine n -ième est dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}^*}$ et sa dérivée est $x \mapsto \dots$

NB : si $a < 0$, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{|a|}$ par imparité.

3.2 Cas où n est pair

L'application $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ n'est pas bijective (fonction paire).

x	$+\infty$	0	$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

En revanche, $f_n : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc (par th. de la bijection) elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $f_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

Son application réciproque s'appelle **racine n -ième** et se note $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{cases}$.

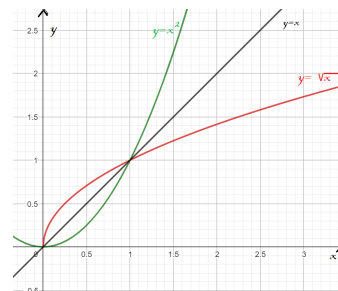
On a donc **pour n pair** : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}$.

Exemple : $\sqrt[4]{16} = \dots$ Simplifier $\sqrt[4]{80} = \dots$

Notation : Comme a est positif, on note aussi $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Propriétés

1. racine n -ième est continue sur $\mathbb{R}^+$
2. racine n -ième est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
3. racine n -ième est dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}^{+*}}$ et sa dérivée est $x \mapsto \dots$



3.3 Cas où on ne connaît pas la parité de n

POUR TOUT ENTIER $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ est bijective.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad y = x^n \iff x = \sqrt[n]{y}.$$

Et la notation $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ peut s'appliquer, du moment que $a \geq 0$.

Propriétés (Formulaire). Les formules ci-dessous s'appliquent à $x, y \geq 0$ (mais peuvent parfois être étendues, selon la parité de n ou m).

$$1. (\sqrt[n]{x})^n = x \text{ et } \sqrt[n]{x^n} = x \quad 2. \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} \quad 3. \text{ si } y > 0, \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad 4. \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

4 Puissance réelle quelconque

On généralise à x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

Définition (Fonction puissance à exposant réel positif).

On appelle **fonction puissance** α ($\alpha \in \mathbb{R}$), la fonction suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{cases}$$

N.B. la fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$ et $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\boxed{]0; +\infty[}$.

Mais pour α entier et $x \in]0; +\infty[$, il y a coïncidence entre les deux formules. Par ex., $e^{2 \ln 3} = \dots$

De même, pour $x \in]0; +\infty[$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$.

Exemples.

$$2^\pi = \dots \quad 3^{2,6} = \dots \quad 5^{1/2} = \dots \quad \sqrt{2}^{\sqrt{3}} = \dots$$

Remarque. Si $\alpha = 0, \forall x > 0 \quad x^\alpha = 1$: la fonction est constante

Propriétés (Formulaire). $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
2. $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
3. $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$
4. $\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$
5. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
6. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
7. *Ordre des puissances d'un réel $x > 0$* Pour $x > 0$ et $\alpha < \beta$ on a $x^\alpha \leq x^\beta \iff x > 1$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si on note $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{cases}$, on a :

Proposition (Dérivée). f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Proposition (Prolongement en 0).

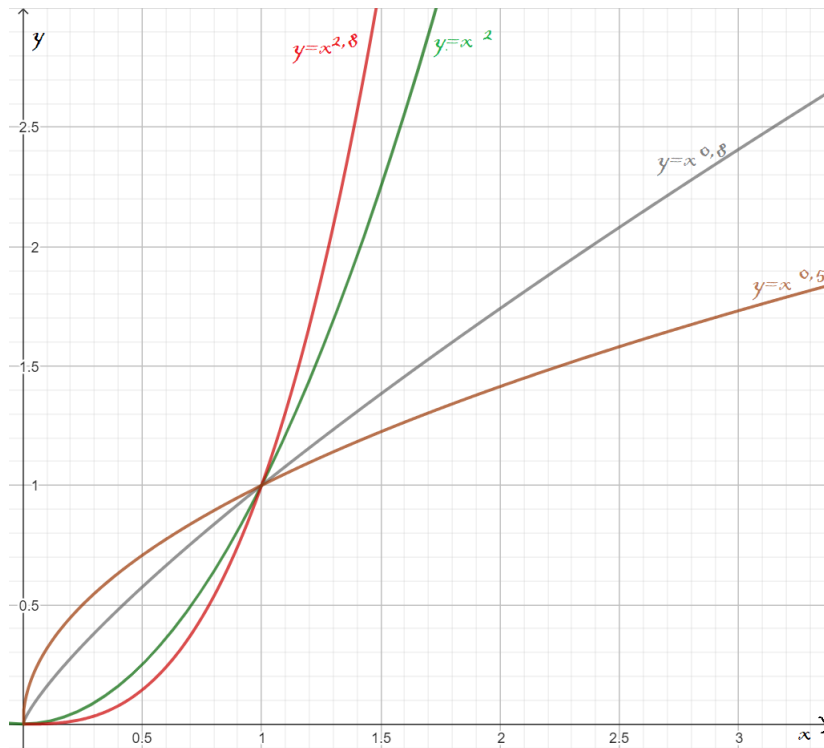
$\boxed{\text{Si } \alpha > 0}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;

f est donc en ce cas prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(0) = 0$.

Exercice 1. Déterminer les valeurs de α telles que $\tilde{f}$ soit dérivable en 0.

Tableau de variation et graphe

<u>Cas $\alpha > 0$</u>	x	0	$+\infty$
	$f'(x)$		+
	$f(x)$	0	$+\infty$
<u>Cas $\alpha < 0$</u>	x	0	$+\infty$
	$f'(x)$		-
	$f(x)$	$+\infty$	0

**Branche infinie en $+\infty$ (si $\alpha > 0$) :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}.$$

En $+\infty$, la courbe admet donc une branche parabolique d'axe (Oy) si $\alpha > 1$ et
une branche parabolique d'axe (Ox) si $0 < \alpha < 1$
(et si $\alpha = 1$, $x^\alpha = x$).

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{2\sqrt{2}} - 3x^{\sqrt{2}} + 2 = 0$.**Proposition** (Limites, croissances comparées).Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

5 Fonctions du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

Méthode : Pour étudier une fonction du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$,
revenir à l'écriture $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$