

TD 2 Fonctions usuelles

Partie 3 Fonctions puissances

Exercice 1. Dans le cahier de calcul (les exercices y sont corrigés), travailler les fiches :

2. Puissances 3. Calcul littéral 4. Racines carrées

Exercice 2. Reprendre le cahier de vacances item 6 Puissances (sur cdp, exercices corrigés)

Exercice 3. *Puissances entières*

Retravailler la fiche de révisions 3.

Exemples d'items :

★ Calculer $10^n + 5^{n+2} + 15^{n-1}$. ★ Compléter $5^{\dots} + 5^4 = 6 \times 5^4$. ★ Simplifier $\frac{2a^4b^4(c^{-1})^3}{\frac{a^{-2}b^3c^4}{3(a^{-1}b^{-2}c)^2} \cdot ac^2}$.

Exercice 4. *Des exercices de seconde, ça peut pas faire de mal*

1. Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

(a) $\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}$ (b) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ (c) $\sqrt{(\sqrt{12}+2)^2 - 8\sqrt{3}}$

2. Donner la valeur exacte des nombres suivants :

(a) $\sqrt{196}$ (b) $\sqrt{1,96}$ (c) $\sqrt{19600}$ (d) $\sqrt{0,00196}$ (e) $\sqrt{1960000}$

3. Comparer sans calculatrice :

(a) 6 et $\sqrt{33}$ (b) $\sqrt{7}\sqrt{5}$ et 6 (c) $10\sqrt{10}$ et 30 (d) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{\sqrt{15}}$ (e) $\sqrt{5+3}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

4. Donner a et b entiers tels que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ $\sqrt{x+b} = \sqrt{x} + \sqrt{b}$.

Exercice 5. *Racines n-ièmes*

1. Remplacer les points d'interrogation par les valeurs numériques adéquates (a, b sont dans $]0; +\infty[$) :

a. $\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{?}$ d. $\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{b^5} = \sqrt[?]{a^?b^?}$ f. $\frac{\sqrt[7]{a^2}}{a^?} = \sqrt[3]{a}$
b. $\sqrt{3}\sqrt[3]{5} = \sqrt[?]{675}$ e. $a^? \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt{a}} = a$ g. $\left(\sqrt[7]{a^2}\sqrt[3]{a}\right)^2 = a^? \sqrt[?]{a^5}$
c. $\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{2} = \sqrt[?]{?}$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$\frac{\sqrt{4}\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)}{\sqrt{\sqrt{2}}}$ $\frac{\sqrt[3]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$ $\frac{27^{-\frac{2}{3}}49^{\frac{1}{2}}16^{\frac{5}{4}}}{\left(\sqrt[5]{243}\right)^2}$ $\frac{\sqrt[3]{a^5}\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{(a^2)^2\sqrt[5]{a^2}\sqrt[6]{a^3}}$ où $a > 0$ $\frac{\sqrt[16]{9}\sqrt[3]{9}\left(\sqrt{\sqrt{9}}\right)^3}{\left(\sqrt[5]{\sqrt{3}}\right)}$

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $x^5 = 243$ 4. $x^3 = -8$ 7. $(x^4 + 2)^{10} = 2$
2. $x^6 = 64$ 5. $x^n = a$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ 8. $(x^4 - 2)^4 + 2 = 0$
3. $x^6 = -7^{12}$ 6. $(x+2)^{10} = \sqrt{2}$ 9. $(x^4 - 2)^5 + 2 = 0$

Exercice 7. Montrer que l'équation $x^{1/4} + 2x^{5/3} = 3$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$. Déterminer cette solution.

Exercice 8. On considère la fonction $f : x \mapsto x^x$

1. Donner son ensemble de définition, ses variations, ses limites aux bornes.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? si oui le prolongement noté $\tilde{f}$ est-il dérivable en 0 ?

Exercice 9. On considère f et g définies par $f(x) = x^{2x}$ et $g(x) = \begin{cases} (x^2)^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et celui de g .
2. Peut-on dire que $f = g$?

Exercice 10. Déterminer le comportement de $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$