Ch 2 : Fonctions usuelles
Partie 4
Sinus et cosinus hyperboliques

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le ***cosinus hyperbolique de*** x et le ***sinus hyperbolique de*** x

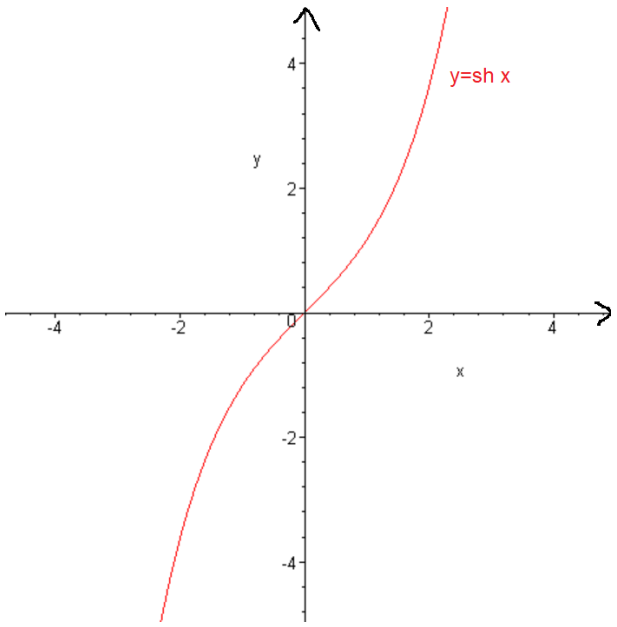
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$ ressemblent aux formules d'Euler !

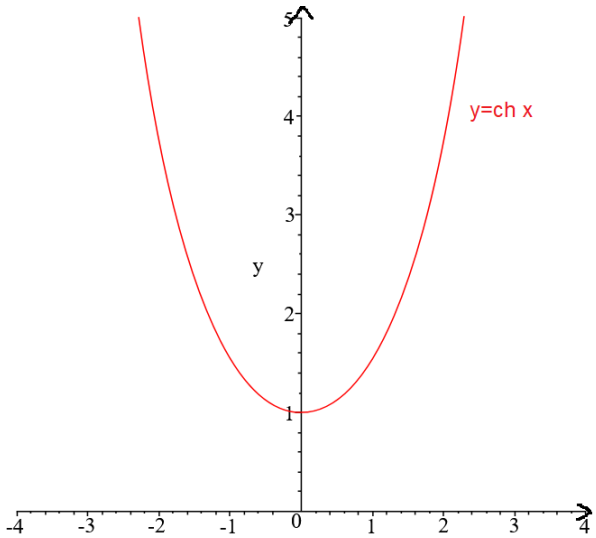
Proposition (Parité). • sh est impaire. • ch est paire.

Proposition (Dérivées). $\forall x \in \mathbb{R}$

• $\operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x > 0$ • $\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$ du signe de x

Tableaux de variation et graphes





Convexité ch est convexe sur $\mathbb{R}$ ($ch'' = ch \geq 0$ sur $\mathbb{R}$) et sh est convexe sur $\mathbb{R}^+$ et concave sur $\mathbb{R}^-$.

Proposition (Limites). 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = +\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{ch} x}{x} = +\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$

Les courbes représentatives de ch et sh admettent donc des branches paraboliques d'axe (Oy) en $+\infty$ (et en $-\infty$ par parité).
Pour 3. : la tangente à la courbe de sh en 0 est de pente 1.

Proposition (Formulaire). $\forall x \in \mathbb{R}$

1. $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ 2. $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$ 3. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

TD 2 Partie 4 Exercices sur ch, sh

Exercice 1. *Cahier de calculs* fiche n°20 : 20.2 20.3 et 20.7

Exercice 2. *Trigonométrie hyperbolique*
En s'inspirant de la trigonométrie circulaire, trouver une formule donnant pour x, y réels $\operatorname{ch}(x+y)$ en fonction de $chx, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{ch} y$.En déduire $\operatorname{ch}(x-y)$.
On trouve $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

Exercice 3. La tangente hyperbolique d'un réel x est $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. En faire une étude rapide.

Exercice 4. *Trigonométrie hyperbolique, suite*
1. Montrer que $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ et en déduire $\operatorname{sh}(x-y)$.
2. Déterminer $\operatorname{ch}(2x)$ avec trois formules, puis $\operatorname{sh}(2x)$.
3. Linéariser $\operatorname{ch}^3 x$ et $\operatorname{sh}^3 x$.
4. Montrer que pour tous x, y réels on a $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Exercice 5. *Trigonométrie hyperbolique, fin* Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$. Écrire $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n$ et $(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n$ en fonction de $\operatorname{ch} nx$ et $\operatorname{sh} nx$.

Exercice 6. *Entrainement à la dérivation*
Déterminer la dérivée des applications suivantes, en précisant bien dans chaque cas d'abord l'ensemble de définition puis celui de dérivabilité :

1. $f : x \mapsto \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
2. $f : x \mapsto \operatorname{ch} \sqrt{x}$
3. $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$
4. $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x^2)$
5. $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\ln(x+1))$
6. $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x} + \operatorname{ch} x)$

Exercice 7. Résoudre (1) $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}$ (2) $\operatorname{ch} x = 2$ (3) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 3$ (4) $2 \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = 5$

Exercice 8. Soit $x > 0$. Simplifier l'expression $\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)$.

Exercice 9. Résoudre l'inéquation $\dfrac{\operatorname{ch} x - 2}{\operatorname{ch} x + 4} < \dfrac{\operatorname{ch} x - 3}{\operatorname{ch} x + 2}$.

Exercice 10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les sommes
$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$. *Indication :* On pourra calculer $C_n + S_n$ et $C_n - S_n$.

Exercice 11. Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x} > 0$ et simplifier l'expression $\ln \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.

Exercice 12. *Tangente hyperbolique*
1. Déterminer $\operatorname{th} 2x$ en fonction de $\operatorname{th} x$.
2. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$
3. En déduire la valeur de $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$ pour n entier naturel et x réel non nul donnés puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 13. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Exprimer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kt)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kt)$ en fonction de $\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right), \operatorname{ch}\left(\frac{nt}{2}\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{nt}{2}\right)$.

Exercice 14. *La fonction argument sinus hyperbolique.*
1. Montrer que sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. On note *argsh* sa fonction réciproque. Calculer la dérivée de *argsh* au moyen de la formule de la dérivée d'une fonction réciproque.
3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer une expression de $argsh(y)$ en résolvant $y = shx$.
   Calculer alors la dérivée de *argsh* en utilisant cette expression.