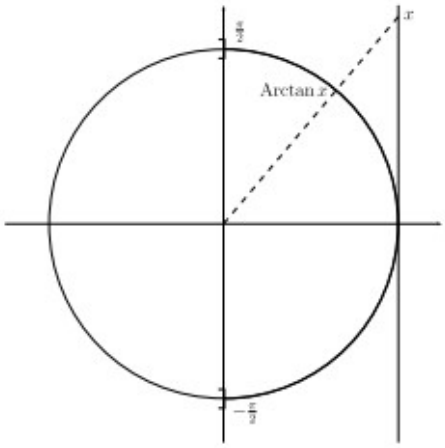
Chapitre 2 Fonctions usuelles
Partie 5 Fonctions trigonométriques réciproques

Arctangente

Tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc
la *restriction* de tangente à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.
Son application réciproque se nomme **Arctangente** et se note Arctan.

Arctan x = l'arc de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.



Propriétés de l'application

- Arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  (→ ptés appli réciproque)
- Arctan est une application impaire
  (→ ptés appli réciproque)
- La courbe d'Arctangente et celle de tangente restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite y = x) dans un repère orthonormé. (ptés appli réciproque)

- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (ptés appli réciproque)

- Arctan x ~ x en zéro i.e. $\frac{\text{Arctan}\, x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
- Arctan x ~ $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ tan (Arctan x) = x (aucun pb, évident)
  $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Arctan (tan y) = y (faire attention)

Valeurs remarquables : Arctan 0 = … Arctan 1 = … Arctan … = … Arctan … = …

Exercice 5 : Arctan (tan $\frac{-6\pi}{7}$) = ... *Arctan (tan $\frac{3\pi}{4}$) = ...*

Equivalence clef : $y = \text{Arctan}\, x \Leftrightarrow \tan y = x$ ET $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 6 : Résoudre tan x = 1 puis tan x = ¼

Quelques propriétés supplémentaires souvent rencontrée en exercice :

- $\forall\ x \neq 0$ Arctan x + Arctan $\frac{1}{x}$ = signe (x). $\frac{\pi}{2}$
- On en déduit l'équivalent : $\frac{\pi}{2}$ - arctan x ~ $\frac{1}{x}$ en $+\infty$

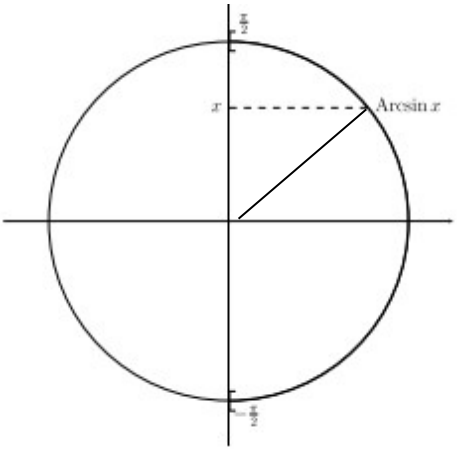
Arcsinus

Sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc

la *restriction* de sinus à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$ = [-1 ; 1].

Son application réciproque se nomme **Arcsinus** et se note Arcsin.

Vocabulaire : on dit aussi que sin ***réalise*** ou ***induit*** une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur [-1 ; 1].



Arcsin x = l'arc de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.

Propriétés de l'application

- Arcsin : [-1 ; 1] $\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est continue et strictement croissante sur [-1 1] (ptés appli réciproque)
- Arcsin est une application impaire ptés appli réciproque)

- La courbe d'Arcsinus et celle de sinus restreint à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite y = x) dans un repère orthonormé. (ptés appli réciproque)

- A savoir retrouver : cos (Arcsin x) = $\sqrt{1-x^2}$ (en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$)

- Arcsin est dérivable sur]-1 ; 1[et $\forall\ x \in$]-1 ; 1[Arcsin ' (x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ptés appli réciproque)

  En -1 et en 1, le taux de variations tend vers l'infini donc la courbe d'Arcsinus admet une **demi-tangente verticale**.

- Arcsin x ~ x en zéro i.e. $\frac{\text{Arcsin}\,x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

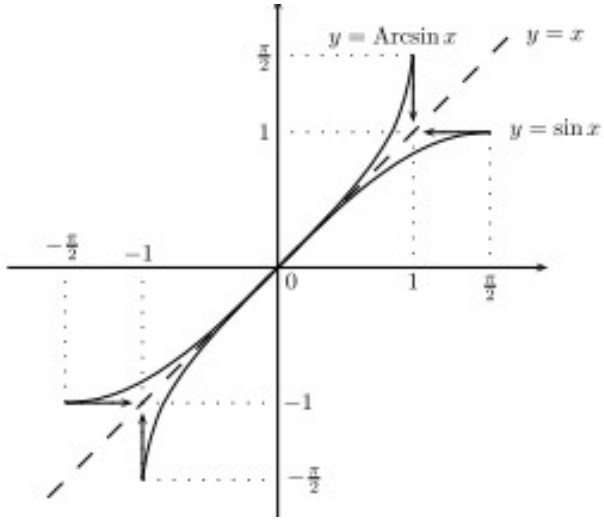
- $\forall\ x \in$ [-1 ; 1] sin (Arcsin x) = x $\forall\ y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Arcsin (sin y) = y (faire attention)

Valeurs remarquables :
Arcsin 0 = … Arcsin 1 = … Arcsin … = … Arcsin …= … Arcsin … = …

Exercice 1 : Déterminer (1) Arcsin (sin $\frac{\pi}{15}$) *(2) Arcsin (sin $\frac{7\pi}{8}$)* *(3) Arcsin (sin $\frac{13\pi}{8}$)*

Equivalence clef : **$y = \text{Arcsin } x \Leftrightarrow \sin y = x$ ET $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$**

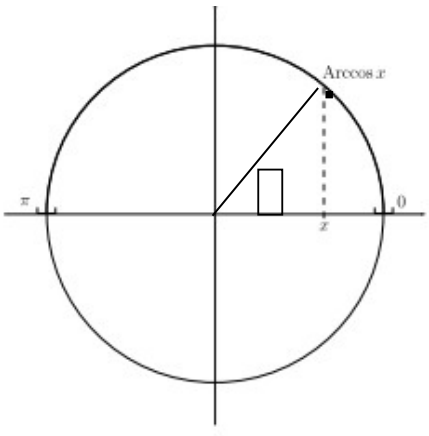
Exercice 2 : Résoudre sin x = ½ puis sin x = ¼



Arccosinus

Cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$ donc
La *restriction* de cosinus à $[0;\pi]$est une bijection de $[0;\pi]$ sur cos $([0;\pi])$ = [-1 ; 1].
Son application réciproque se nomme **Arccosinus** et se note Arccos.

Arccos x = l'arc de $[0;\pi]$ dont le cosinus vaut x.



Propriétés de l'application

- Arccos : [-1 ; 1] → $[0;\pi]$ est continue et strictement décroissante sur [-1 ; 1]
  (ptés appli réciproque)
- La courbe d'Arccosinus et celle de cosinus restreint à $[0;\pi]$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite y=x) dans un repère orthonormé.
  (→ ptés appli réciproque)
- A savoir retrouver : sin (Arccos x) = $\sqrt{1-x^2}$
- Arccos est dérivable sur]-1 ; 1[et ∀ x ∈]-1 ; 1[Arccos ' (x) = $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
  (→ ptés appli réciproque)

En -1 et en 1, le taux de variations tend vers l'infini
donc la courbe d'Arccosinus admet une **demi-tangente verticale**.

- ∀ x ∈ [-1 ; 1] cos (Arccos x) = x ∀ y ∈ $[0;\pi]$ Arccos (cos y) = y (faire attention)

- $\forall x \in [-1 ; 1]$ Arccos (-x) + Arccos x = π

NB : Cela traduit que le point $(0 ; \frac{\pi}{2})$ est **centre de symétrie** de la courbe d'Arccosinus.

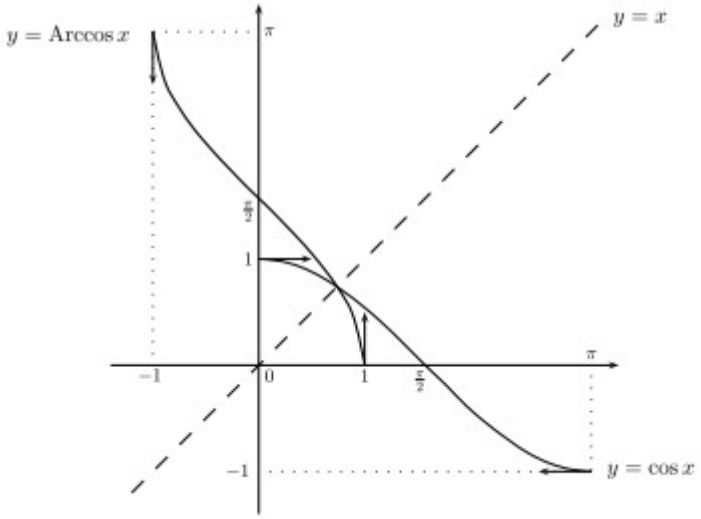
Valeurs remarquables : Arccos 0 = … Arccos 1/2 = … Arccos $\sqrt{2}/2$ = … Arccos $\sqrt{3}/2$ = …

Exercice 3 : Déterminer (1) Arccos (cos $\frac{9\pi}{10}$) (2) Arccos (cos $\frac{-\pi}{8}$) (3) Arccos (cos $\frac{9\pi}{8}$)

Equivalence clef : y = Arccos x $\Leftrightarrow$ cos y = x ET y $\in [0;\pi]$

- **Lien avec Arcsin** : $\forall x \in [-1 ; 1]$ Arccos x + Arcsin x = $\frac{\pi}{2}$

NB : Cela traduit que les deux courbes sont **symétriques par rapport à la droite y = $\frac{\pi}{4}$**



Exercice 4 : Résoudre cos x = ½ puis cos x = ¼

