UNITÉS/CONVERSION/HOMOGÉNÉITÉ

I Unités du Système International (SI)

Le système international (SI) est composé de sept unités fondamentales. Les autres unités sont des unités dérivées et se déduisent des précédentes.

Unité SI	Grandeur	Dimension
le mètre (m)	Longueur	L
le kilogramme (kg)	Masse	M
la seconde (s)	Temps	T
l'ampère (A)	Intensité électrique	I
le kelvin (K)	Température	Θ
la mole (mol)	Quantité de matière	N
le candela (Cd)	Intensité lumineuse	J

II Unités usuelles

Unité	Grandeur	Exemples
le degré Celsius ($°C$)	Température	température au cœur du soleil : 15.10^6 $°C$
le coulomb (C)	Charge électrique	charge d'une batterie de téléphone portable : 3000 C, charge d'un électron : $e = 1,6.10^{-19}$ C
le farad (F)	Capacité d'un condensateur	condensateurs utilisés en électronique : 1.10^{-12} à 1.10^{-3} F
le henry (H)	Inductance d'une bobine	inductance d'un haut-parleur : 10 mH
le hertz (Hz)	Fréquence	fréquence d'un La : 440 Hz, Téléphone sans fil : $2,4$ GHz
le joule (J)	Énergie	énergie d'un litre d'essence : 40.10^6 J
le newton (N)	Force	poussée de l'A380 : $1,2.10^6$ N
l'ohm (Ω)	Résistance électrique	résistance usuelle en électronique : 1 à 10^6 Ω
le pascal (Pa)	Pression	pression sur Terre : 1,013 $\times$ 10^5 Pa sur Mars 600 Pa
le tesla (T)	Intensité du champ magnétique	champ magnétique terrestre : 5.10^{-5} T, ITER : 21 T
le volt (V)	Tension électrique	orage : 10 à 20 10^6 V
le watt (W)	Puissance	centrale nucléaire : 1.10^9 W, éolienne : 3.10^5 W

III Préfixes d'unités du système international

10^n	Préfixe	Symbole	10^n	Préfixe	Symbole	10^n	Préfixe	Symbole
10^{-15}	femto	f	10^{-12}	pico	p	10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ	10^{-3}	milli	m	10^3	kilo	k
10^6	mega	M	10^9	giga	G	10^{12}	tera	T

IV Équation aux dimensions

Il est nécessaire de faire la distinction entre la dimension d'une grandeur physique et son unité. Par exemple une distance a pour dimension une longueur, mais elle pourra s'exprimer dans diverses unités (le mètre, le mile, l'angström...). La dimension d'une grandeur renseigne sur sa nature physique, c'est une caractéristique beaucoup plus générale que son unité. La dimension d'une grandeur s'exprime en fonction des sept dimensions fondamentales (L, M, T, I, Θ, N et J). Si la dimension d'une grandeur k n'est pas connue, on la note entre crochets $[k]$. Par exemple si V est une vitesse, on note sa dimension $[V] = L.T^{-1}$. Remarquons que :

— Les nombres sont des grandeurs sans dimension.
— Les angles ont une unité mais pas de dimension.
— Le rapport de deux grandeurs de même dimension est sans dimension.
— Les fonctions mathématiques (cos, sin, tan, exp, ln ...) et leurs arguments sont sans dimension. Par exemple $\cos(x)$ et x sont sans dimension.
— $\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[x]}{T}$ et $\left[\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] = \frac{[x]}{T^2}$

V Homogénéité d'une expression

Une équation est homogène si tous les termes de l'équation ont la même dimension. Dans le cas contraire, l'équation est forcément fausse.

Par conséquent :

— Les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension.
— Les deux membres d'une égalité ont la même dimension.

L'analyse de l'homogénéité constitue un puissant outil pour détecter une erreur puisqu'une équation non homogène est nécessairement fausse.

À la fin de tout calcul littéral, il faut vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue.

VI Applications

Conversion d'unités

Convertir :

- 15° en radian ;
- $3,12$ km.h^{-1} en m.s^{-1} ;
- $6,44$ L en dm^3 ;
- 25°C en K ;
- 1500 $tr.min^{-1}$ en Hz et en rad.s^{-1} ;
- $4,2$ mol en nombre de molécules ;
- 12 mol.L^{-1} en mmol.cm^{-3} ;
- $0,98$ g.L^{-1} en kg.m^{-3}

Equations aux dimensions

- En vous aidant d'équations physiques connues, exprimer les unités usuelles de force, d'énergie et de puissance en fonction des unités de base du système international.
- Déterminer l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes :
  — L'énergie cinétique E_c ;
  — L'intensité du champ de pesanteur g ;
  — La pulsation ω.
- Quelle est la dimension de :
  — mgz où m est une masse, g l'intensité du champ de pesanteur et z l'altitude ;
  — PV où P est une pression et V un volume ;
  — $\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ où R est la constante des gaz parfait en J.K^{-1}.mol^{-1}, M la masse molaire et T la température.
- On considère $I = I_0\sqrt{2}e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$ où I est l'intensité d'un courant en ampère et t est le temps ; quelle est la dimension de I_0, α, ω, et φ ?

Homogénéité

Les expressions suivantes sont-elles homogènes :

- $kl^2 + mg = a$ où k est une constante de raideur, l une longueur, m est une masse et a une accélération ;
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ où T est une période, l est une longueur et g l'intensité du champ de pesanteur ;
- $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + 3$;
- $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = E$ où E est une tension et t est un temps ;
- $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{m}{k}x = F_0\cos(\omega t + x)$ où x est la position, t le temps, m la masse, k une constante de raideur, F_0 une force, et ω une pulsation ;
- $f' = \frac{D-d^2}{4D}$ où f', D, et d sont des distances ;
- $E = \frac{h\lambda}{c}$ où E est une énergie, h est la constante de Planck en $J.s$, λ en m et c en $m.s^{-1}$.

Application

L'analyse dimensionnelle a permis à G. I. Taylor d'estimer en 1950 l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique, alors que cette information était classée top secret. Il a observé sur un film d'explosion, que la dilatation du champignon atomique suivait la loi expérimentale de proportionnalité : $r(t) \propto t^{\frac{2}{5}}$. Taylor a ensuite supposé que ce phénomène dépend au minimum du temps t, de l'énergie E dégagée par l'explosion et de la masse volumique de l'air ρ. Déterminer à partir d'une analyse dimensionnelle l'expression de r en fonction de ρ, E et t puis en déduire l'expression de E.

Attention : Une expression homogène n'est pas nécessairement juste !

VII Chiffres significatifs

C'est le nombre de chiffres que l'on donne pour la valeur d'une grandeur sans compter les zéros avant le premier chiffre non nul.

Exemple : 0,16 et 0,016 sont donnés avec deux chiffres significatifs. En revanche 0,160 et 100 le sont avec trois.

La détermination du nombre de chiffres significatifs se fait à partir du calcul de l'incertitude sur la mesure d'une grandeur (que l'on fera en TP). Si, pour une application numérique (TD, DM, DS sans connaissance des incertitudes de mesure), on dispose de données comportant un nombre différent de chiffres significatifs, l'application numérique finale comportera le nombre de chiffres significatifs le plus bas.

En TP ou lors d'une analyse de courbe en TD/DM/DS, la détermination de l'incertitude type, nous permet de déterminer le nombre de chiffres significatifs

Exemples : $d_1 = 112\,\mathrm{mm}$; $d_2 = 0{,}12\,\mathrm{m}$, $d_1 + d_2 = 0{,}23\,\mathrm{m}$. On aurait pu être tenté d'écrire $d_1 + d_2 = 0{,}232\,\mathrm{m}$ mais on se limite à une précision sur le centimètre.

En TP ou par lecture graphique $d = 12{,}35\,\mathrm{mm}$ et $u(d) = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, on présente le résultat avec 3CS : $d = 12{,}3\,\mathrm{mm}\ldots$