TD Mécanique n° 2

Dynamique

Capacités exigibles :

- Établir un bilan des forces sur un système et déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un système fermé ◐.
- Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations, équilibre, mise en mouvement freinage et formuler une hypothèse quant au glissement ⌑.
- Établir et reconnaître l'équation d'un oscillateur harmonique ✠.

Exercice 1 Lancement d'un projectile*** ◐

Un trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) est lié au sol terrestre de sorte que Oz soit vertical ascendant. Le champ de pesanteur supposé uniforme, est noté $\vec{g} = -g\vec{u_z}$. À l'origine des temps ($t = 0$), un projectile ponctuel est lancé du point O. Sa masse est m, sa vitesse à l'origine $\vec{v_0}$ est située dans le plan xOz et fait un angle α avec l'horizontale. Ce projectile est soumis à la seule force de pesanteur.
Données numériques : $m = 1,0\ kg$; $v_0 = 100\ m.s^{-1}$ et $g = 10\ m.s^{-2}$.

1. Calculer en fonction de v_0, g et α le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude et les coordonnées de ce point S ainsi atteint. Faire l'application numérique pour $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$ et $\alpha_3 = 90°$.
2. Déterminer la portée du tir, c'est à dire l'endroit où le point matériel retombe sur le sol.
3. En supposant le module v_0 constant, déterminer la(les) valeur(s) de l'angle α permettant d'atteindre une cible située à une distance d de l'origine du tir.
4. Le module v_0 étant toujours supposé constant et α étant variable, déterminer l'équation de la courbe du plan xOz séparant les points de ce plan pouvant être atteints par le projectile, de ceux qui ne seront jamais atteints.

Exercice 2 Masse reliée à deux ressorts ✠

On fixe un mobile à deux murs par deux ressorts, de raideurs k_1 et k_2 et de longueurs à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}. Les points de fixations sont aux abscisse $x = 0$ et $x = L$.

1. Exprimer la résultante des forces élastiques subies par le mobile.
2. Montrer que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un unique ressort de raideur k_3 et de longueur à vide ℓ_{03}.
3. On écarte à l'instant $t = 0$ le mobile depuis sa position d'équilibre d'une distance A_0 et on lâche ce mobile sans vitesse initiale. Décrire le mouvement du mobile.
4. Établir l'expression de la position du mobile en fonction du temps.

Exercice 3 Oscillations verticales d'une masse ✠

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k est fixé en point O d'un plafond. A son autre extrémité, est attaché un mobile M de masse m, repéré par sa cote z telle que la position du mobile soit $\overrightarrow{OM} = z\vec{u_z}$ où $\vec{u_z}$ est le vecteur unitaire orienté suivant l'axe vertical descendant.

1. Effectuer un bilan des forces sur la masse.
2. Établir l'équation du mouvement de la masse.
3. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} ? Commenter le résultat obtenu.
4. On pose $u(t) = z(t) - z_{eq}$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.
5. Quelle est la période des oscillations. Commenter.
6. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ lorsque le point matériel est lâché depuis sa position d'équilibre avec une vitesse $\vec{v}_0$ ascendante.

Exercice 4 Détermination d'une loi de force ◐

Un point matériel suit un mouvement dans un référentiel galiléen dont l'équation horaire en coordonnées polaires est :

$$\begin{cases} r = A(1 + \cos\omega t) \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

Déterminer la résultante des forces qui s'exerce sur ce point matériel (ω est constant).

Exercice 5 Traîneau ◐⌑

Un traîneau est tiré sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale par un fil faisant un angle β par rapport à la pente.

1. Dans le cas où le mouvement est uniforme, déterminer la réaction du sol :
   a) En supposant que la force de traction est constante.
   b) En supposant qu'il n'y a pas de frottement
2. Arrivé au sommet de la côte, le traîneau est abandonné sans vitesse initiale sur un nouveau plan incliné d'angle γ par rapport à l'horizontale. On suppose qu'il y a des frottements entre le traîneau et le sol (coefficient k).
   a) Calculer l'accélération du traîneau dans la descente.
   b) Quelle condition doit vérifier γ pour que le traîneau se mette en mouvement ?

Exercice 6 Point matériel élastiquement lié ◐⌑

Un palet M de masse m, peut se mouvoir sans frottement dans le plan xOy horizontal (table à coussin d'air). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g\vec{u_z}$. Le palet est accroché à un ressort (raideur k, longueur l_0 au repos) dont l'autre extrémité est fixée en O. Le point M est repéré dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$ par $\overrightarrow{OM} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y}$ et dans la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ par $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$. Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

1. Quelle est la réaction $\vec{R}$ du support plan sur le palet ?
2. On pose en coordonnées polaires : $\vec{v} = v_r\vec{u_r} + v_\theta\vec{u_\theta}$ et $\vec{a} = a_r\vec{u_r} + a_\theta\vec{u_\theta}$. Donner les expressions des composantes radiales et orthoradiales v_r, v_θ, a_r et a_θ. Montrer que a_θ peut s'écrire $a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(rv_\theta)$. Dans le cas du palet M soumis à la force élastique du ressort qui passe constamment par le point O, dans le plan xOy, la composante v_θ de la vitesse est liée à r par une relation que l'on précisera.
3. À l'instant $t = 0$, le palet est lâché sans vitesse initiale d'un point M_0 tel que $\overrightarrow{OM_0} = 1,2l_0\vec{u_x}$. Justifier la nature rectiligne de la trajectoire du point M et déterminer l'évolution temporelle de la longueur l du ressort et préciser l'intervalle de variation de l.
4. À présent on lance le palet à l'instant $t = 0$ du point M_0 tel que $\overrightarrow{OM_0} = l_1\vec{u_x}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = l_1\omega\vec{u_y}$ de manière à obtenir un mouvement circulaire du point M. Justifier que ce mouvement est alors circulaire uniforme et déterminer l_1 en fonction de k, l_0 et ω et préciser la condition sur ω

Exercice 7 Chute d'un caillou dans un puits ◐

Un garçon jette, sans vitesse initiale, un caillou de masse m dans un puits très profond. La surface de l'eau se trouve à une profondeur h du point de lancé du caillou. Les frottements de l'air sont négligés et l'évolution du caillou dans l'eau se fait en présence d'une force de frottement du type $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. On prendra $m = 200\ g$, $\alpha = 0{,}20\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ et $h = 8{,}0\,\mathrm{m}$.

1. Exprimer la vitesse v du caillou en fonction du temps t et de la vitesse limite $v_l = \frac{mg}{\alpha}$. Tracer le graphe de la vitesse $v(t)$ en fonction du temps en faisant apparaître les pentes de la courbe à la date t_1 lorsque le caillou pénètre dans l'eau.
2. Quelle devrait être la hauteur de lancé h_l pour que dans l'eau, le caillou évolue avec un mouvement rectiligne uniforme. Tracer le graphe de la vitesse $v(t)$ correspondant.

Solutions des exercices

[1] *Réponses : 1)* $t_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $x_s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$, $z_s = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ *; 2)* $x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ *; 3)* $\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gd}{v_0^2}$ *et* $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{gd}{v_0^2}$ *; 4)* $z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$

[2] *Réponses :4)* $x(t) = x_{eq} + A_0\cos\omega_0 t$ *avec* $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

[3] *Réponses : 2)* $m\ddot{z} + kz = mg + k\ell_0$, *4)* $\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$, *5)* $T = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}}$

[4] *Réponse :* $\vec{F} = -mA\omega^2(1 + 2\cos\omega t)\vec{u_r} - 2mA\omega^2\sin\omega t\vec{u_\theta}$

[5] *Réponses : 1a)* $R_T = T\cos\beta - mg\sin\alpha$ *et* $R_N = mg\cos\alpha - T\sin\beta$ *; 1b)* $R_N = mg\cos\alpha - mg\sin\alpha\tan\beta$ *; 2a)* $a = g(\sin\gamma - k\cos\gamma)$ *; 2b)* $\gamma > \arctan k$

[6] *Réponses : 1)* $\vec{R} = mg\vec{u_z}$ *; 2)* $a_r = \frac{-k(l-l_0}{m}$, $a_\theta = 0$, $v_r = \dot{r}$ *et* $v_\theta = r\dot{\theta}$ *; 3)* $\ddot{l} + \frac{k}{m}l = \frac{kl_0}{m}$, $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $l(t) = l_0(1 + 0,2\cos\Omega t)$ *; 4)* $l_1 = \frac{kl_0}{k-m\omega^2}$

[7] *Réponses : 1)* $v(t) = (\sqrt{2gh} - v_l)e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} + v_l$ *avec* $\tau = \frac{m}{\alpha}$ *; 2)* $h_l = 4,9m$