TD Mécanique n° 3

Aspects énergétiques

Capacités exigibles :

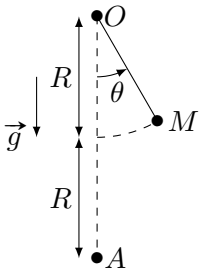
- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force ◐.
- Étudier un mouvement par une méthode énergétique et utiliser la loi appropriée en fonction du contexte ⌑.
- Déduire d'un graphe d'énergie potentielle, l'existence de position d'équilibre, la nature stable ou instable de ces positions ainsi que la trajectoire bornée ou non, le mouvement périodique et les positions de vitesse nulle ✠.

Exercice 1 Travail d'une force ◐

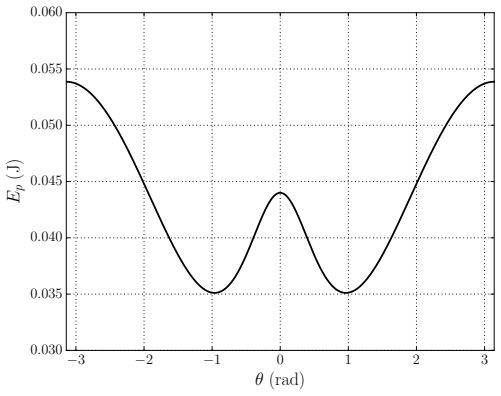
Les points O, $A(1,0)$, $B(0,1)$ et $C(1,1)$ sont les quatre sommets d'un carré. On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les chemins OAC et OBC, décrits par un point matériel M de coordonnées (x,y) soumis à la force $\vec{f} = \alpha(y\vec{u_x} - x\vec{u_y})$. Evaluer les travaux W_1 et W_2 de la force $\vec{f}$ le long des trajets $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 2 Pendule électrique ⌑✠

Un pendule est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par une fine tige dont nous négligerons la masse.
La boule de masse $m = 20\,\text{g}$ sera assimilée à un point matériel noté M. Une boule identique est placée en A. Chargées électriquement, avec la même charge, les deux boules se repoussent. La force exercée par A sur M s'écrit $\vec{F}_e = \dfrac{k}{(AM)^3}\overrightarrow{AM}$, où $k = 4{,}4\times10^{-3}\,\text{N m}^2$. C'est une interaction en $1/r^2$, comme l'interaction gravitationnelle, mais répulsive. La liaison d'axe est supposée sans frottement et nous ne tenons pas compte d'éventuels frottements fluides. La longueur du pendule est $R = 10\,\text{cm}$.



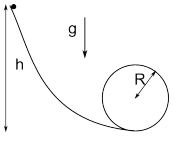
1. Exprimer la distance AM en fonction de R et θ.
2. Montrer que la force $\vec{F}_e$ est conservative et que l'énergie potentielle dont elle dérive peut s'écrire : $E_{pe}(\theta) = \dfrac{k}{R\sqrt{5-4\cos(\theta)}}$.
3. Exprimer l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ de la boule M.
4. Le tracé de l'énergie potentielle est proposé sur la figure ci-dessous à gauche. Déduire de ce graphe l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.



5. Discuter de la nature de la trajectoire de M suivant la valeur de son énergie mécanique.

Exercice 3 Looping ⌑

Une bille ponctuelle glisse sans frotter sur le rail représenté ci-contre. À quelle hauteur h faut-il lâcher la boule pour qu'elle parvienne à effectuer une révolution. Le rayon de la boucle est noté R.

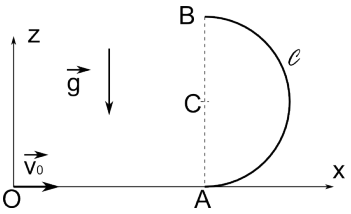


Exercice 4 Glissade sur un igloo ⌑

Un petit esquimau se trouve au sommet d'un igloo de forme hémisphérique de rayon R. L'enfant s'écarte un peu de sa position d'équilibre et glisse sans frottement sur l'igloo. Déterminer en quel point il quitte l'igloo.

Exercice 5 Mouvement d'un point matériel sur un support ¤***

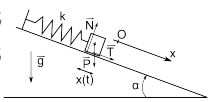
Un point matériel M, de masse m, lancé d'un point O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, est susceptible de pouvoir coulisser le long d'un support $\mathcal{C}$, sans pouvoir le quitter. Ce support $\mathcal{C}$ est constitué d'une partie horizontale $OA = L$ et d'un demi-cercle de centre C, de rayon r et de diamètre AB. Il existe du frottement de glissement de coefficient f entre O et A, et l'on néglige tout frottement sur le demi cercle entre A et B.



1. Montrer que le point matériel atteint le point A si $v_0 \geq v_{l1}$ et déterminer v_{l1} en fonction de f, L et g.
2. Montrer que le point matériel parvient en B à condition que $v_0 \geq v_{l2}$ et exprimer v_{l2} en fonction de v_{l1}, g et r.
3. Dans le cas où $v_{l1} < v_0 < v_{l2}$, décrire le mouvement du point M et préciser sa position finale en supposant $v_0^2 < 4fgl$.

Exercice 6 Énergie potentielle élastique¤

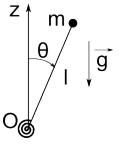
On considère le système ci-contre : Le mobile M de masse m peut glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Ce mobile est relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.



1. Calculer la longueur du ressort à l'équilibre ℓ_{eq}.
2. L'origine O des abscisses est prise au niveau de la position d'équilibre du système. On écarte le mobile M de cette position d'une longueur L vers le bas, puis on le lache sans vitesse. Exprimer alors l'abscisse $x(t)$ du mobile une fois qu'il est lâché.

Exercice 7 Pendule de Holweck et Lejay ¤✠

On considère une barre homogène de masse négligeable et de longueur l, susceptible de tourner sans frottements autour de l'axe horizontale Ox et soumise en O à l'action d'un ressort spiral. L'énergie potentielle de ce ressort, qui ne dépend que de l'angle θ est de la forme $E_p(\theta) = \frac{1}{2}C\theta^2$. A l'extrémité A de cette tige est placée un objet quasi-ponctuel de masse m. On étudie l'évolution de ce dispositif dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.



1. Vers quelle position va évoluer la tige dans le cas de très faibles valeurs (puis des très fortes valeurs) de la constante de torsion C ? Une approche qualitative est suffisante à ce stade. Proposer par analyse dimensionnelle, une expression de la valeur critique de C séparant les valeurs faibles des valeurs élevées.
2. Exprimer l'énergie potentielle du système {ressort, masse ponctuelle en A} en fonction de l'angle θ.
3. La position $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre ? Cet équilibre est-il stable ou instable ?
4. Montrer que le mouvement peut être périodique au voisinage de $\theta = 0$. A quelle condition portant sur C, ceci est-il vérifié ?
5. Exprimer la période T des oscillations en fonction de l, g et de $\xi = \frac{C}{mgl}$.

Exercice 8 Ralentissement d'un navire

Un navire de masse $M = 1{,}0 \times 10^7\,\text{kg}$ progressant sur l'eau à une vitesse de l'ordre de 10 à 20 $km.h^{-1}$ subit une force de freinage qui est fonction de la vitesse selon une loi du type $\overrightarrow{F} = -kv^2\overrightarrow{v}$.

1. Sachant que le moteur reçoit une puissance $\mathcal{P} = 5{,}0\,\text{MW}$ et possède un rendement η de 80%, calculer k lorsque la vitesse limite atteinte vaut $v_l = 19\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.
2. Quelle est la durée de la phase de ralentissement quand le navire, lancé avec son moteur à l'arrêt, voit sa vitesse passer de $v_1 = 17\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ à $v_2 = 14\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$? Quelle distance a-t-il parcouru pendant ce temps ?

Solutions des exercices

[1] *Réponses : $W_1 = -\alpha$ et $W_2 = \alpha$*

[2] *Réponses : 1) $AM = R\sqrt{5 - 4\cos(\theta)}$; 3) $E_p(\theta) = -mgR\cos(\theta) + \dfrac{k}{R\sqrt{5 - 4\cos(\theta)}}$*

[3] *Réponses : $h \geq \frac{5}{2}R$*

[4] *Réponses : $\theta_0 = 48{,}2\,^\circ$*

[5] *Réponses : 1) $v_{l1} = \sqrt{2fgL}$; 2) $v_{l2} = \sqrt{v_{l1}^2 + 4gr}$; 3) $OE = 2L - \frac{v_0^2}{2fg}$*

[6] *Réponses : 1) $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$, 2) $x(t) = L\cos\omega_0 t$*

[7] *Réponses : 2) $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + mgl\cos\theta$; 3) stable si $C > mgl$; 5) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(\xi-1)}}$*

[8] *Réponses : 1) $k = 5{,}1kN.m^{-3}.s^3$: 2) $T = \frac{M}{2k}(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}) = 20{,}6\ s$, $D = 88{,}0\ m$*