Devoir Maison n° 4

Mécanique : cinématique–dynamique

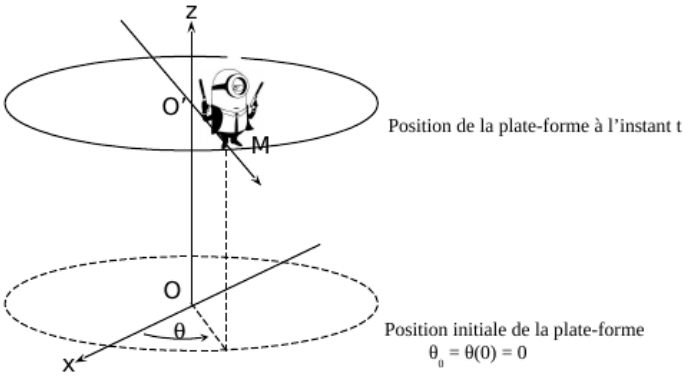
Exercice 1 La plateforme infernale

On considère une plateforme circulaire horizontale de centre O'. Cette plate-forme est en rotation à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ autour de l'axe vertical Oz et elle peut également s'élever verticalement à la vitesse v_0 constante $\left(v_0 = \frac{dz_{O'}}{dt}\right)$.

Dans tout l'exercice, un aventurier présent sur la plateforme est assimilé à un point M et il reste immobile par rapport à la plateforme : il est positionné à une distance r_0 du centre O' de la plateforme.

Tous les mouvements seront étudiés dans le référentiel terrestre auquel on associe le repère $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et ***on changera d'origine des temps à chaque nouvelle phase du mouvement***.

Données numériques :
- $v_0 = 1{,}5\,\text{m/s}$
- $r_0 = 5{,}0\,\text{m}$
- $\omega_0 = 0{,}30\,\text{rad/s}$



A Première phase : la plateforme ne s'élève pas

Dans un premier temps, la plateforme est en rotation uniforme $\dot{\theta} = \omega_0$ et ne s'élève pas ($z_{O'} = 0$).

A.1 Préciser le système de repérage adapté et le représenter sur un schéma. Quelle est la nature de la trajectoire ?

A.2 Déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération de l'aventurier en fonction des données du problème.

A.3 Donner les valeurs numériques des normes de la vitesse et l'accélération.

B Deuxième phase : la plateforme s'élève

Dans un deuxième temps, la plateforme commence à s'élever à vitesse constante à $t = 0$ lorsque $\theta(0) = 0$, tout en maintenant sa rotation uniforme.

B.1 Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de l'aventurier.

B.2 Déterminer les équations horaires $r(t)$, $\theta(t)$ et $z(t)$ du mouvement.

B.3 Représenter la trajectoire sur un schéma. Indiquer également les vecteurs vitesse et accélération sur le schéma.

B.4 Calculer la longueur L de la trajectoire parcourue par l'aventurier lorsque la plateforme fait un tour complet. Faire l'application numérique.

B.5 De quelle hauteur h_0 est alors montée la plateforme ? Faire l'application numérique.

C Ralentissement de la plateforme

Lorsque la plateforme a atteint la hauteur h_0, elle reste à altitude constante et s'arrête progressivement de tourner. On précise que la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ décroît de ω_0 jusqu'à 0 suivant la loi suivante :

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$$

où τ est une constante de temps positive.

C.1 Calculer littéralement le temps $t_{5\%}$ à partir duquel la vitesse de l'aventurier est inférieure à 5% de sa vitesse initiale.

C.2 Sachant que $\tau = 25\,\text{s}$, donner la valeur numérique de $t_{5\%}$

C.3 Calculer de manière littérale le vecteur accélération de l'aventurier en fonction du temps pour $t \geq 0$ et représenter le vecteur accélération en différents points sur la trajectoire.

C.4 Déterminer le nombre de tours effectués par l'aventurier lors de l'arrêt de la plateforme (on rappelle que la plateforme commence son ralentissement lorsque $z_{O'} = h_0$ et $\theta(0) = 0$). Faire l'application numérique.

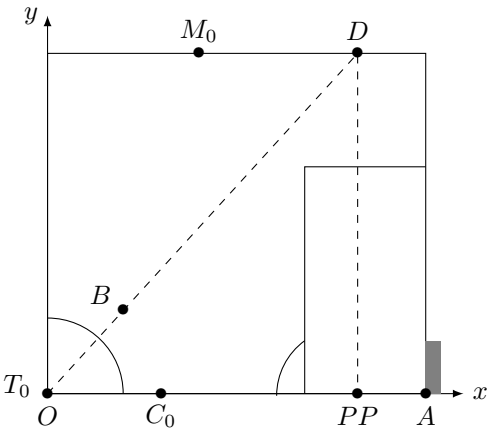
C.5 Comparer ce nombre de tours à celui effectué à l'instant $t_{5\%}$. Commenter.

Exercice 2 La tactique de coach Evan : le TMC

La TMC est le surnom donné au fameux trio d'attaquants de l'équipe de football de la PCSI3 constitué de Thierno (T), Manuel (M) et Clément (C). L'exercice propose l'approche cinématique simplifiée d'une action de jeu impliquant les trois joueurs orchestré par coach Evan.

L'action se situe dans le quart du terrain représenté sur la figure ci-contre. Elle débute à la date $t = 0$ alors que Thierno se trouve au point T_0, Manuel au point M_0 de coordonnées $[x_{M0}; y_{M0}] = [20\,\text{m}; 45\,\text{m}]$ et Clément au point C_0 de coordonnées $[x_{C0}; y_{C0}] = [15\,\text{m}; 0{,}0\,\text{m}]$.

La demi-longueur du terrain, du centre du rond central O à celui de la cage A, vaut $OA = 52\,\text{m}$. La cage, dont la moitié est représentée par un rectangle gris sur la figure, a une demi-largeur $L = 3{,}6\,\text{m}$.



1. Au départ de l'action Thierno « lance Manuel en profondeur » depuis le rond central : le ballon B se dirige vers le point D de coordonnées $[x_D; y_D] = [41\,\text{m}; 45\,\text{m}]$ dans un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_{B0}. Manuel court à vitesse constante $v_M = 9{,}0\,\text{m s}^{-1}$ le long de la ligne de touche. Déterminer v_{B0} pour que Manuel reçoive bien le ballon en D.
2. Arrivé en D, Manuel centre instantanément au point de pénalty (PP). Le mouvement de B, de D vers PP, est rectiligne uniforme de vitesse v_{B0}. Clément, qui court vers le point de pénalty depuis l'origine de l'action à vitesse constante $v_{C0} = 6{,}0\,\text{m s}^{-1}$, modifie d'instinct sa vitesse au moment du centre afin d'intercepter le ballon au point de pénalty. Accélère-t-il ou ralentit-il sa course ? Déterminer son accélération $\vec{a}_C = a_C\vec{u_x}$ en la supposant uniforme.
3. Clément, arrivé en PP, tire dans le ballon en lui donnant de l'effet et lui communique ainsi un mouvement assimilable à un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = 20\,\text{m}$ et de vitesse initiale $\vec{v}_{B1} = v_{B1}\vec{u}_x$ avec $v_{B1} = 40\,\text{m s}^{-1}$. Conclure quant à l'issue de l'action.

Exercice 3 Jeu de palet anglais

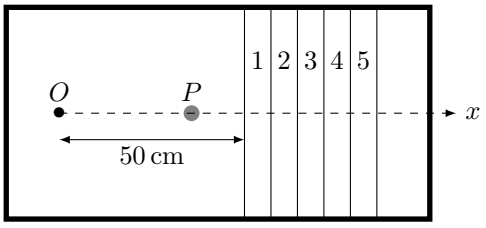
A Version standard

Dans le jeu de palet anglais, le joueur dispose de cinq palets (petits disques de masse $m = 50\,\text{g}$) qu'il doit faire glisser sur une planche en bois posée sur un plan horizontal afin d'en placer un dans chaque zone de 1 à 5, délimitées par des traits distants de 10 cm.

À la date $t = 0$ le joueur lance un palet depuis le point O en lui conférant une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u_x}$.

Les frottements entre le palet et la planche sont modélisés par les lois de Coulomb avec un coefficient dynamique de frottement solide $f_d = 0{,}30$.

L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8\,\text{m s}^{-2}$. Le référentiel terrestre sera supposé galiléen.



La réaction de la planche sur le palet sera notée $\vec{R} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$, avec $\vec{u}_z$ vertical ascendant.

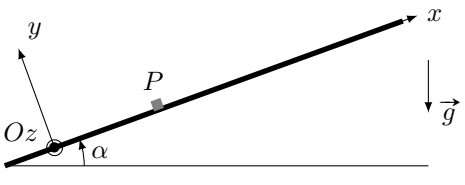
A.1 Établir trois équations liant $x(t)$, T et N.

A.2 Le joueur donne une vitesse $v_0 = 30\,\text{cm s}^{-1}$ au palet. Atteint-il une des zones visées ?

A.3 Quelle valeur donner à v_0 pour que le centre du palet s'immobilise au milieu de la zone 5 ?

B Variante

Une variante au jeu de palet anglais présenté ci-dessus consiste à incliner la planche d'un angle $\alpha = 20°$, les règles restant les mêmes. Le coefficient dynamique de frottement solide est toujours $f_d = 0{,}30$. La réaction de la planche sur le palet sera notée $\vec{R} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_y$, avec $\vec{u}_y$ normal à la planche et dirigé vers le haut.



B.1 Établir trois équations liant $x(t)$, T et N.

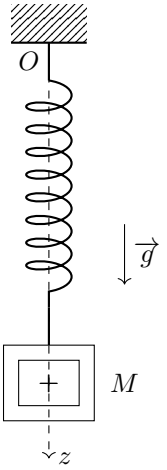
B.2 Quelle valeur donner maintenant à v_0 pour que le centre de masse du palet s'immobilise au milieu de la zone 5 ?

B.3 À quelle condition sur le coefficient de frottement statique f_s les palets ne redescendent-ils pas après s'être immobilisés ?

Exercice 4 Principe simplifié du densimètre à tube vibrant

La mesure de la masse volumique de fluides est nécessaire dans de nombreux domaines industriels (industries agro-alimentaires, pétrolières...). Ce problème étudie le principe d'un dispositif de mesures continues et permanentes de masses volumiques.

Soit un corps creux de volume intérieur V_0 et de masse M_0, rempli d'un fluide homogène de masse volumique ρ inconnue et à déterminer. L'ensemble du système noté $\mathcal{S}$ est assimilable à un point matériel M de masse m. Ce système est suspendu à l'extrémité d'un ressort de raideur K et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité notée O est suspendue à une paroi fixe du référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Le dispositif est représenté sur la figure ci-contre. Le champ de pesanteur est supposé uniforme $g = 9,8$ ms^{-2}.



A Étude statique

A.1 Exprimer la masse du système $\mathcal{S}$ en fonction de M_0, V_0 et ρ.

A.2 Faire un bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le point matériel et exprimer ces forces en fonction de m, K, ℓ_0, g, ℓ et $\overrightarrow{u_z}$ où ℓ représente la longueur du ressort et $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire orienté selon l'axe (Oz) descendant.

A.3 On considère que le système est immobile. Déterminer la longueur à l'équilibre ℓ_{eq} du ressort en fonction de ℓ_0, m, g et K.

B Expression de la masse volumique

Dans la suite du problème, on note $z(t) = \ell(t) - \ell_{eq}$ la position à l'instant t du point M par rapport à sa position d'équilibre. À l'instant $t = 0$, le ressort est écarté de sa position d'équilibre, sans vitesse initiale, de $z(0) = Z_0$.

B.1 Déterminer l'équation différentielle du mouvement de $\mathcal{S}$. On introduira la pulsation propre ω_0 que l'on exprimera en fonction des données du problème.

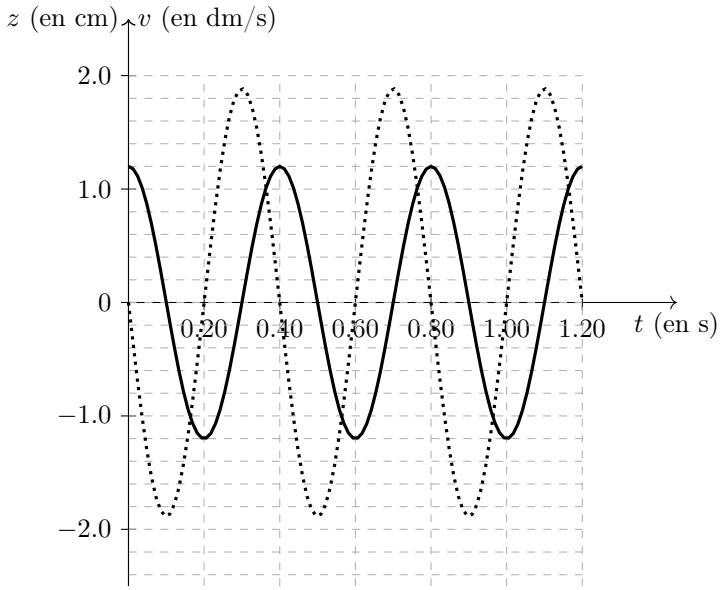
B.2 En déduire l'expression de $z(t)$.

B.3 Montrer que la masse volumique peut se mettre sous la forme : $\rho = \frac{1}{A}(T_0^2 - B)$ où T_0 est la période d'oscillation de $\mathcal{S}$. On exprimera les constantes A et B en fonction de V_0, K et M_0.

B.4 Donner les unités du système international de A et de B.

C Approche graphique

Un dispositif non représenté permet d'enregistrer l'évolution de la position $z(t)$ (en trait plein) et de la vitesse du point matériel (en pointillé).



C.1 Déterminer à partir de ce graphique :

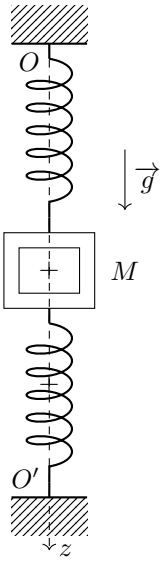
- l'amplitude Z_0 des oscillations ;
- la vitesse maximale v_{max} du point matériel ;
- la période du mouvement T_0 ;
- le déphasage entre $z(t)$ et $v(t)$. Est-ce en accord avec la théorie ?

C.2 Exprimer la relation entre v_{max}, Z_0 et T_0 et vérifier cette relation à partir de vos valeurs numériques.

C.3 A partir de l'expression de la masse volumique donnée à la question B.3, et des valeurs obtenues graphiquement, déterminer la masse volumique du fluide. On donne $A = 1,2.10^{-4}$ SI et $B = 4,0.10^{-2}$ SI. Proposer le nom d'un fluide qui a une masse volumique proche de celle que vous avez obtenue.

D Stabilisation de la trajectoire

Afin de stabiliser l'oscillation on installe le système entre deux ressorts identiques de raideur K et de longueur à vide ℓ_0 ; l'un est accroché en O, l'autre en O' tel que $OO' = L$. Dans cette partie on considère que le système $\mathcal{S}$ est repéré par sa position z telle que $\overrightarrow{OM} = z\overrightarrow{u_z}$ où $\overrightarrow{u_z}$ est orienté vers le bas (figure ci-contre).



D.1 Faire un bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le point matériel et exprimer ces forces en fonction de m, K, ℓ_0, g, L, z et $\overrightarrow{u_z}$.

D.2 On considère que le système est immobile. Déterminer la nouvelle position à l'équilibre z_{eq} du système en fonction de m, g, K et L.

D.3 Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

D.4 Le système étant initialement lancé depuis sa position d'équilibre à la vitesse $\overrightarrow{v}(t = 0) = -v_0\overrightarrow{u_z}$. Donner l'évolution de l'altitude du système.

D.5 Comment peut-on désormais retrouver la masse volumique du fluide ?

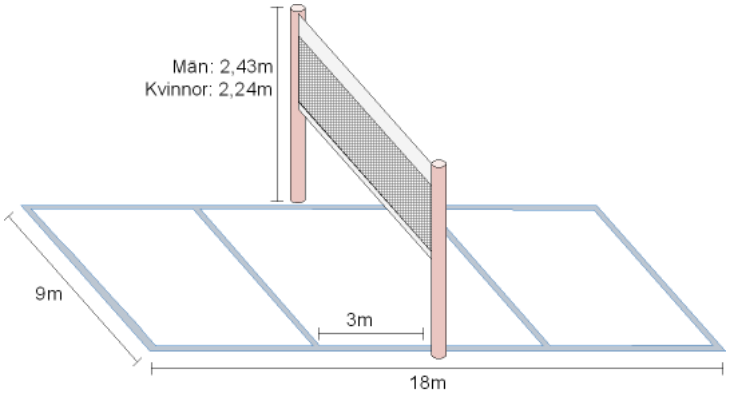
Exercice 5 Le service au volley

Le terrain d'un volley est long de 18 m, large de 9 m et la hauteur du filet (situé au milieu du terrain) s'élève à 2,43 m pour les hommes. Lors du service, le joueur s'élance, saute derrière la ligne puis smashe le ballon pour que celui-ci retombe dans le terrain adverse en étant passé au dessus du filet. Les très bons joueurs peuvent servir avec des vitesses initiales de ballon supérieures à 100 km/h (https://www.youtube.com/watch?v=JblOzEBn5hw).

Données : Le ballon de volley a une masse $m = 0{,}27\,\text{kg}$ et un diamètre $D = 21\,\text{cm}$.

1. On néglige dans un premier temps les frottements de l'air. Modéliser le problème et déterminer les caractéristiques d'un service réussi (position initiale du ballon, angle de frappe...) lorsque la vitesse initiale du ballon est de l'ordre de 100km/h. Conclure.

On considère désormais que l'air exerce une force sur le ballon qui s'écrit $\vec{f}_a = -C_D\rho S v\vec{v}$, où $C_D = 0,5$, $\rho = 1{,}2\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'air, S la surface apparente du ballon et v la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ du ballon.

2. Appliquer la deuxième loi de Newton au ballon, puis en déduire les équations différentielles du mouvement vérifiées par la position du ballon.
3. Définir une fonction sous python permettant de définir ces équations dans le but de les résoudre à l'aide de la fonction `odeint` de la librairie `scipy.integrate`.
4. En déduire les caractéristiques d'un service réussi (position initiale du ballon, angle de frappe...) lorsque la vitesse initiale du ballon est de l'ordre de 100km/h. Conclure.

Ce type d'exercice est un problème ouvert, on attend de vous de l'initiative...