

Exercice 1 La plateforme infernale

A Première phase : la plateforme ne s’élève pas

A.1 On étudie l’aventurier assimilé à un point matériel dans un système de coordonnées polaires centré en O . Le mouvement est alors circulaire uniforme (trajectoire circulaire).

A.2 $\vec{OM} = r_0 \vec{u}_r$, $\vec{v} = r_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta = r_0 \omega_0 \vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -r_0 \omega_0^2 \vec{u}_r$.

A.3 $v = r_0 \omega_0 = 1,5 \text{ ms}^{-1}$ et $a = 0,45 \text{ ms}^{-2}$.

B Deuxième phase : la plateforme s’élève

B.1 $\vec{v} = r_0 \omega_0 \vec{u}_\theta + v_0 \vec{u}_z$, $\vec{a} = -r_0 \omega_0^2 \vec{u}_r$ car r_0 , ω_0 et v_0 sont constants.

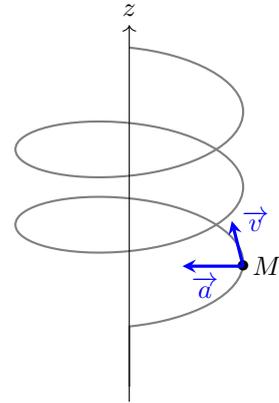
B.2 $r(t) = r_0$, $\theta(t) = \omega_0 t$ et $z(t) = v_0 t$ ($\theta(0) = 0$ et $z(0) = 0$).

B.3 La trajectoire est hélicoïdale. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et l’accélération est radiale.

B.4 La norme de la vitesse est constante $\|\vec{v}\| = \sqrt{r_0^2 \omega_0^2 + v_0^2}$. Pour faire un tour l’aventurier met un temps $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. La distance parcourue

est donc $L = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{(r_0 \omega_0)^2 + v_0^2} = 44,4 \text{ m}$.

B.5 $h_0 = v_0 \frac{2\pi}{\omega_0} = 31,4 \text{ m}$.



C Ralentissement de la plateforme

C.1 $v_{5\%} = 0,05 r_0 \omega_0 = r_0 \omega_0 e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}}$ soit $t_{5\%} = \tau \ln 20$ ($20 = \frac{1}{0.05}$).

C.2 Sachant que $\tau = 25 \text{ s}$, $t_{5\%} = 74,9 \text{ s}$.

C.3 $\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -r_0 \omega_0^2 \left(e^{-\frac{2t}{\tau}} \vec{u}_r + \frac{1}{\tau \omega_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_\theta \right)$

Le mouvement est retardé, l’angle entre le vecteur vitesse (porté par \vec{u}_θ) et le vecteur accélération doit être supérieur à $\frac{\pi}{2}$.

C.4 En considérant le nombre de chiffres significatif du problème (2), on peut supposer que la plate forme sera à l’arrêt au bout de 5τ ($e^{-5} = 6,7 \cdot 10^{-3}$). De plus en intégrant l’expression de $\dot{\theta}(t)$, on obtient $\theta(t) = \omega_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ($\theta(0) = 0$). Le nombre de tours effectués par l’aventurier lors de l’arrêt de la plateforme est donné alors par

$N = \frac{\theta(5\tau)}{2\pi} = 1,2$ tours. Le calcul théorique sans approximation donne $N = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \dot{\theta} dt = \frac{\omega_0 \tau}{2\pi}$ et on retrouve la même valeur numérique.

C.5 $N_{t_{5\%}} = \frac{\theta(t_{5\%})}{2\pi} = 1,1$ tours. Au vu du nombre de chiffres significatifs du problème, on obtient une valeur très proche (précision de 5% au lieu de 1%).

Exercice 2 La tactique de coach Evan : le TMC

1. En prenant $t = 0$ au départ de l’action, Manuel arrive en C à la date $t_1 = \frac{x_D - x_{M0}}{v_M} = 2,3 \text{ s}$. Le ballon, lancé par Thierno à $t = 0$, doit parcourir la distance $D_1 = \sqrt{y_D^2 + x_D^2}$ à la vitesse v_{B0} et doit arriver en D à cette même date. Donc $D_1 = v_{B0} t_1$. D’où : $v_{B0} = v_M \frac{\sqrt{y_D^2 + x_D^2}}{x_D - x_{M0}} = 26 \text{ ms}^{-1}$.

2. Le ballon, animé maintenant d’un mouvement rectiligne uniforme de D vers PP , a pour ordonnée $y_B = -v_{B0}(t - t_1) + y_D$. Il arrive au point PP d’ordonnée nulle à la date $t_2 = \frac{y_D}{v_{B0}} + t_1 = 4,1 \text{ s}$. Si Clément courrait de C_0 jusqu’en PP à vitesse constante v_{C0} , il arriverait en PP à la date $t'_2 = \frac{x_D - x_{C0}}{v_{C0}} = 4,3 \text{ s}$.

Trop tard pour intercepter le ballon! Il va devoir accélérer à la date t_1 du centre.

Jusqu’à $t = t_1$ son abscisse a pour expression $x_C = v_{C0} t + x_{C0}$. À t_1 elle vaut $x_{C1} = 29 \text{ m}$. Pour $t > t_1$, $\ddot{x}_S = a_S$ avec pour conditions initiales à $t = t_1$: $x_C(t_1) = x_{C1}$ et $\dot{x}_C(t_1) = v_{C0}$. En intégrant deux fois et compte tenu de ces conditions initiales, on obtient : $x_C(t) = \frac{a_C}{2} (t - t_1)^2 + v_{C0}(t - t_1) + x_{C1}$. Pour que $x_C(t_2) = x_D$ il faut donc que : $a_C = \frac{2}{(t_2 - t_1)^2} (x_D - x_{C1}) - 2 \frac{v_{C0}}{(t_2 - t_1)} = 1,1 \text{ ms}^{-2}$.

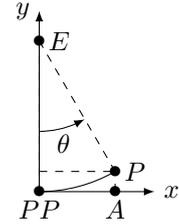
3. Le ballon décrit pour finir un cercle de rayon R , tangent à l'axe Ox au point PP , et dont le centre E a pour coordonnées $[x_E; y_E] = [41 \text{ m}; 20 \text{ m}]$. En utilisant l'angle θ défini sur la figure ci-dessous, il vient :

$$y_P - y_A = R(1 - \cos \theta) = R(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta}) \text{ avec } \sin \theta = \frac{(x_A - x_{PP})}{R}. \text{ On trouve : } y_P - y_A = 3,3 \text{ m. Cette valeur étant inférieure à } L = 3,6 \text{ m, le tir est « cadré ».$$

$$\text{Le ballon décrit un arc de cercle de longueur } R\theta = R \arcsin \frac{(x_A - x_{PP})}{R} = 12 \text{ m à la}$$

$$\text{vitesse constante } v_{B1} = 40 \text{ m s}^{-1}. \text{ Il parvient donc au but en un temps } \Delta t = \frac{R\theta}{v_{B1}} =$$

$29 \times 10^{-2} \text{ s}$. Il faudra de la réussite au gardien pour que la balle n'aille pas au fond des filets... Avec une tactique comme celle-ci les équipes adverses peuvent trembler !



Exercice 3 Jeu de palet anglais

A Version standard

A.1 Le palet est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et à la réaction de la planche $\vec{R} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_z$. Son accélération dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen est $\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x$. L'application, dans \mathcal{R} , de la loi de la quantité de mouvement au palet conduit à : $m\vec{a}(t) = T\vec{u}_x + (N - mg)\vec{u}_z$. Par projection sur \vec{u}_x et sur \vec{u}_z , il vient : $m\ddot{x}(t) = T$ et $N - mg = 0$.

Par ailleurs, le palet glissant sur la planche avec une vitesse de glissement dans la direction et le sens de \vec{u}_x , les lois de Coulomb du frottement solide, relatives au cas d'un glissement, conduisent à : $T = -f_d N$.

A.2 En éliminant T et N des équations précédentes, on obtient l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} = -f_d g$. Son intégration, compte tenu des conditions initiales, conduit à : $\dot{x}(t) = v(t) = -f_d g t + v_0$ puis

$$x(t) = -\frac{f_d g}{2} t^2 + v_0 t. \text{ La vitesse décroît avec } t \text{ et s'annule pour } t_f = \frac{v_0}{f_d g}. \text{ À cet instant, la distance parcourue}$$

$$\text{est } x(t_f) = -\frac{f_d g}{2} t_f^2 + v_0 t_f = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{f_d g} = 1,5 \text{ cm. Le palet n'atteint aucune des zones visées.}$$

A.3 On cherche à présent v_0 pour que $x_f = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{f_d g} = 95 \text{ cm}$. On aboutit à : $v_0 = \sqrt{2f_d g x_f} = 2,4 \text{ m s}^{-1}$.

B Variante

B.1 L'accélération du palet dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen est $\vec{a} = \dot{x}(t)\vec{u}_x$. Les forces subies sont le poids $\vec{P} = -mg(\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y)$ et la réaction de la planche $\vec{R} = T\vec{u}_x + N\vec{u}_y$. L'application, dans \mathcal{R} , de la loi de la quantité de mouvement conduit à : $m\vec{a}(t) = (T - mg \sin \alpha)\vec{u}_x + (N - mg \cos \alpha)\vec{u}_y$. Par projection sur \vec{u}_x et sur \vec{u}_y , il vient : $m\ddot{x}(t) = T - mg \sin \alpha$ et $N - mg \cos \alpha = 0$.

Par ailleurs, le palet glissant sur la planche avec une vitesse de glissement dans la direction et le sens de \vec{u}_x , les lois de Coulomb du frottement solide, relatives au cas d'un glissement, conduisent à : $T = -f_d N$.

B.2 En éliminant T et N des équations précédentes, on obtient l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)$. Son intégration, en tenant compte des conditions initiales, conduit à :

$$\dot{x}(t) = v(t) = -g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)t + v_0 \text{ puis à : } x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)t^2 + v_0 t. \text{ La vitesse décroît avec le temps et s'annule pour } t_f = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)}.$$

À cet instant, la distance parcourue est $x(t_f) = -\frac{1}{2}g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)t_f^2 + v_0 t_f = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)}$. On en déduit : $v_0 = \sqrt{2g(\sin \alpha + f_d \cos \alpha)x_f}$. Pour $x_f = 95 \text{ cm}$, on obtient $v_0 = 3,4 \text{ m s}^{-1}$.

B.3 Supposons que le palet reste immobile après s'être arrêté. La force de frottement, qui empêche l'apparition du glissement vers le bas sous l'effet du poids, est alors dirigée vers le haut de la pente ($T > 0$). La loi de la quantité de mouvement, en projection sur \vec{u}_x et sur \vec{u}_y , conduit à $T - mg \sin \alpha = 0$ et $N - mg \cos \alpha = 0$. Par ailleurs, les lois de Coulomb relatives au non glissement imposent $|T| < f_s |N|$, soit ici $T < f_s N$. On en déduit que le palet reste immobile si $f_s > \tan \alpha = 0,36$.

Exercice 4 Principe simplifié du densimètre à tube vibrant

A Étude statique

A.1 La masse du système \mathcal{S} s'écrit : $m = M_0 + \rho V_0$.

A.2 Les forces qui s'exercent sur \mathcal{S} sont le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ et la tension du ressort : $\vec{T} = -K(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$.

A.3 Lorsque le système est immobile, sa vitesse et nulle ainsi que son accélération. D'après la deuxième loi de Newton appliqué au système dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen on a : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$. Soit en projetant suivant l'axe (Oz) : $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{K}$.

B Expression de la masse volumique

B.1 En projetant la deuxième loi de Newton à \mathcal{S} suivant l'axe (Oz) , on obtient $\ddot{\ell} + \frac{K}{m}\ell = g + \frac{K}{m}\ell_0$. En faisant un changement de variable ($\ell = z + \ell_{eq}$), on obtient l'équation suivante $\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0$. On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

B.2 On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. On alors $z(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t$. D'après les conditions initiales on a $z(0) = Z_0$ soit $K_1 = Z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$ soit $K_2 = 0$. On en déduit : $z(t) = Z_0 \cos \omega_0 t$

B.3 D'après la question précédente on a $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{M_0 + \rho V_0}{K}}$ soit $\rho V_0 + M_0 = \frac{K T_0^2}{4\pi^2}$ et $\rho = \frac{K}{4\pi^2 V_0} (T_0^2 - \frac{4\pi^2 M_0}{K})$. On retrouve alors la forme demandée avec $A = \frac{4\pi^2 V_0}{K}$ et $B = \frac{4\pi^2 M_0}{K}$

B.4 D'après la relation précédente A s'exprime $\text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^2$ et B s'exprime en s^2 .

C Approche graphique

C.1 Déterminer à partir de ce graphique :

- l'amplitude Z_0 des oscillations : En évaluant la tension crête à crête on obtient $2Z_0 = 2,4 \text{ cm}$, soit $Z_0 = 1,2 \text{ cm}$.
- En procédant de la même façon on obtient la vitesse maximale $v_{max} = 1,9 \text{ dm/s}$
- On observe 4 périodes, soit $4T_0 = 1,2 \text{ s}$ d'où $T_0 = 0,3 \text{ s}$;
- La vitesse est en avance par rapport à la position, et constate que ces signaux sont en quadratures (Lorsqu'un signal passe par un extremum, le second s'annule et inversement). Le déphasage entre $z(t)$ et $v(t)$ est donc de $\frac{\pi}{2}$. Ce résultat est cohérent puisque la vitesse correspond à la dérivée de $z(t)$ et $\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -\sin \omega_0 t$.

C.2 On $z(t) = Z_0 \cos \omega_0 t$ d'où $v(t) = -Z_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$ soit $v_{max} = Z_0 \omega_0 = \frac{2\pi Z_0}{T_0}$. L'application numérique donne $v_{max} = \frac{2\pi Z_0}{T_0} = 1,9 \text{ dm/s}$; ce qui est cohérent avec la valeur lue sur le graphique.

C.3 D'après la relation précédemment obtenue, on obtient à partir des valeurs de A et B fournies $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le fluide étudié pourrait être de l'eau liquide.

D Stabilisation de la trajectoire

D.1 Les forces qui s'exercent sur le système \mathcal{S} sont :

- le poids : $\vec{P} = mg \vec{u}_z$;
- la tension du ressort du dessus : $\vec{T}_1 = -K(z - \ell_0) \vec{u}_z$
- la tension du ressort du dessous : $\vec{T}_2 = K(L - z - \ell_0) \vec{u}_z$.

D.2 A l'équilibre, la résultante des forces est nulle, on a alors : $mg - K(z_{eq} - \ell_0) + K(L - z_{eq} - \ell_0)$ soit $z_{eq} = \frac{L}{2} + \frac{mg}{2K}$. On vérifie que z_{eq} est supérieur à $\frac{L}{2}$ en raison du poids du système.

D.3 En projetant la deuxième loi de Newton selon l'axe (Oz) , on obtient : $m\ddot{z} = -K(z - \ell_0) + KL - Kz - K\ell_0 + mg$ soit $\ddot{z} + \frac{2K}{m}z = \frac{KL}{m} + g$. En posant $\omega_2^2 = \frac{2K}{m}$, on trouve l'équation : $\ddot{z} + \omega_2^2 z = \omega_2^2 z_{eq}$

D.4 On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec un second membre. La solution $z(t)$ s'écrit alors $z(t) = K_1 \cos \omega_2 t + K_2 \sin \omega_2 t + z_{eq}$. A partir des conditions initiales on obtient $K_1 = 0$ et $K_2 \omega_2 = -v_0$ soit $K_2 = -\frac{v_0}{\omega_2}$. On obtient alors $z(t) = z_{eq} - \frac{v_0}{\omega_2} \sin \omega_2 t$

D.5 On retrouve la masse volumique à partir de la période d'oscillation, mais la relation obtenue précédemment n'est plus juste puisque $\omega_2 \neq \omega_0$.

Exercice 5 Le service au volley

On pose H la hauteur du filet, $L_2 = 2L_1$ la distance entre la ligne de service et l'extrémité du terrain (le terrain de chaque équipe à une longueur L_1 et une profondeur L_1). L'objectif de cet exercice est de trouver les paramètres de lancer de balle (hauteur h , angle initiale α par rapport à une direction horizontale, la vitesse initiale v_0 étant fournie et égale à 100 km/h) pour que le ballon arrive sur le sol dans le terrain adverse. Dans un premier temps, on négligera les frottements et on considérera que la trajectoire du ballon est plane.

1. On considère que le ballon est assimilé à un point matériel (on néglige ses mouvements de rotations et son extension spatiale) et on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen (système d'axe cartésien où le plan $y = 0$ correspond au sol). À l'instant $t = 0$, le ballon quitte les mains du serveur à une hauteur $y(t = 0) = h$ et une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_y$. Pour $t > 0$, on considère que le ballon n'est soumis qu'à son poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$.

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à $m\vec{a} = m\vec{g}$. En projetant sur \vec{u}_x et \vec{u}_y puis par intégrations successives on trouve alors :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right. \quad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{array} \right. \quad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + h \end{array} \right.$$

On peut dans un premier temps estimer un ordre de grandeur de h pour un lancer horizontal ($\alpha = 0$).

L'équation de trajectoire devient alors : $y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + h$. La condition pour que le ballon soit dans le terrain conduit à $y(L_2) < 0$ soit $h < \frac{gL_2^2}{2v_0^2}$. L'application numérique donne $h < 2,1$ m. Le problème est qu'avec une hauteur initiale inférieure à la hauteur du filet et une vitesse initiale horizontale, le ballon ne passera jamais au-dessus du filet...

On va donc chercher désormais des angles α négatifs et des hauteurs de lancer supérieures au filet. On cherche par exemple l'angle α qui permettrait de réussir un service avec une hauteur d'impact $h = 3,5$ m (hauteur réservée à un spécialiste de grande taille...).

L'équation de la trajectoire devient alors :

$y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + \tan \alpha x + h$. On résout alors l'équation $y(L_2) < 0$, on obtient alors un trinôme vérifié par la variable $Z = \tan \alpha$ puisque $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$. On obtient $\alpha < -4,5^\circ$, il reste ensuite à vérifier la condition pour que le ballon passe au dessus du filet soit ($y(L_1) > H$). La condition précédente conduit à $\alpha > -3,5^\circ$. Il semble qu'on ait trouvé un couple (h, α) qui permet de réaliser un ace à une vitesse v_0 de 100 km/h

En conclusion, si on ne devait pas tenir compte des frottements, le volleyeur pour inscrire un ace devrait sauter très haut pour frapper la balle à une hauteur de l'ordre de 3,5 m et viser juste avec une précision inférieure à 1° pour des vitesses initiales de l'ordre de 100 km/h ! Autant dire, que la prise en compte des frottements est indispensable pour modéliser le comportement réel d'un ballon de volley lors d'un service. (l'extension spatiale du ballon entraînerait certainement un contact avec le filet...).

On considère désormais que l'air exerce une force sur le ballon qui s'écrit $\vec{f}_a = -C_D \rho S v \vec{v}$, où $C_D = 0,5$, $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ la masse volumique de l'air, $S = \pi D^2/4$ la surface apparente du ballon (avec D le diamètre du ballon) et v la norme du vecteur vitesse \vec{v} du ballon. On appelle $\beta = C_D \rho \pi D^2/4$ le coefficient de frottement quadratique pour simplifier les expressions.

2. La deuxième loi de Newton au ballon projetée suivant les différents axes conduit à :

$$m\ddot{x} = -\beta \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$m\ddot{y} = -\beta \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - mg$$

On identifie des équations différentielles couplées non linéaires du second ordre qui ne sont pas résolubles à la main !

3. On vectorialise les équations sous python et on cherche à obtenir la variable `X=np.array([x,y,vx,vy])` à différents instants de calculs en définissant la fonction `Phi` telle que `X'=Phi(X,t)`. `Phi` est définie en langage python par :

```
import numpy as np

def Phi(X,t):
    x,y,vx,vy=X
    return np.array([vx,vy,-beta/m*vx*(vx**2+vy**2)**0.5, -beta/m*vy*(vx**2+vy**2)**0.5-g])
```

4. cf notebook annexe.