

Correction du devoir surveillé n° 3

Problème 1 Coup franc

A Frottements de l'air négligés

A.1 On considère le ballon de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La seule force qui s'exerce sur le ballon au cours du mouvement étant son poids, on en déduit que $\vec{a} = \vec{g}$ en utilisant la deuxième loi de Newton. En projetant cette relation suivant (Ox) , on obtient $\ddot{x} = 0$, puis $\dot{x} = V_0 \cos \alpha$, puis $x(t) = (V_0 \cos \alpha)t$. En projetant suivant l'axe (Oy) on a $\ddot{y} = -g$, puis $\dot{y} = -gt + V_0 \sin \alpha$, puis $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (V_0 \sin \alpha)t$. L'équation de la trajectoire, dans le plan (Oxy) est donc :

$$y(x) = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan(\alpha)x$$

A.2 Le ballon passe au dessus du mur si $y(x_{but}) \geq 1,90 \text{ m}$. L'application numérique donne $y(x_{mur}) = 2,17 \text{ m}$, donc le ballon passe au dessus du mur.

A.3 Le tir est cadré si $y(x_{but}) \leq 2,44 \text{ m}$. L'application numérique donne $y(x_{but}) = 1,73 \text{ m}$, donc le tir est cadré.

B Prise en compte des frottements de l'air

B.1 On applique la deuxième loi de Newton au ballon de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen ; Le ballon est soumis à son poids et à la force de frottement $\vec{F} : m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$. Les projections de cette équations suivant les axes (Ox) et (Oy) donnent : $m\ddot{x} = -h\dot{x}$ (1) et $m\ddot{y} = -mg - h\dot{y}$ (2). La première équation s'écrit aussi $v_x + \tau \frac{dv_x}{dt} = 0$ avec $\tau = m/h$. L'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle conduit à vérifier que τ à la dimension d'un temps. L'équation (2) s'écrit aussi : $v_y + \tau \frac{dv_y}{dt} = -g\tau$.

L'équation (2) s'écrit aussi : $v_y + \tau \frac{dv_y}{dt} = -g\tau$

B.2 On reconnaît des équations différentielles linéaires d'ordre 1 soit $v_x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ et $v_x(0) = A = V_0 \cos \alpha$, soit $v_x(t) = V_0 \cos \alpha e^{-\frac{t}{\tau}}$. En intégrant à nouveau cette expression on obtient $x(t) = V_0 \cos \alpha \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ puisque $x(0) = 0$. D'autre part $v_y(t) = -g\tau + Be^{-\frac{t}{\tau}}$. Sachant que $v_y(0) = V_0 \sin \alpha$, on a $v_y(t) = (V_0 \sin \alpha + g\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau$. En intégrant cette équation et en considérant que $y(0) = 0$ on obtient : $y(t) = (V_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t$

B.3 On utilise l'expression de $x(t)$ pour exprimer t en fonction de x : $t = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{V_0 \tau \cos \alpha}\right)$. On détermine t_{mur} lorsque $x = x_{mur}$ puis on calcule $y(t_{mur}) = 2,17 \text{ m}$. Le ballon passe au dessus du mur.

B.4 De la même façon, détermine t_{but} lorsque $x = x_{but}$, soit $y(t_{but}) = 1,73 \text{ m}$: Le tir est cadré. On constate que les frottements ont peu d'influence sur ce mouvement (car il n'est pas très rapide donc la force de frottement est restée assez faible).

Problème 2 Suspension de voiture

1. Un référentiel galiléen est référentiel dans lequel un point matériel isolé à un mouvement de translation rectiligne uniforme. Le référentiel terrestre peut être assimilé à un référentiel galiléen lorsque la durée de l'expérience est très courte devant la période de rotation de la Terre sur elle-même.
2. On applique la deuxième loi de Newton au point matériel M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans ce référentiel, M est soumis à l'action de son poids et à la force de rappel exercée par le ressort. À l'équilibre, il n'y a pas de mouvement, soit $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T}$. En projetant suivant l'axe Oz on obtient : $-mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ soit $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$. $\Delta \ell = \ell_{eq} - \ell_0 = -\frac{mg}{k} = -16 \text{ cm}$
3. La force de rappel s'écrit : $\vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$

4. Avec le changement de variable $z = \ell - \ell_{eq}$, la force de rappel s'écrit : $\vec{T} = -k(z + \ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}_z$. L'application de la deuxième loi de Newton projetée suivant $\vec{u}_z$ conduit à $m\ddot{z} = -k(z + \ell_{eq} - \ell_0) - mg$ soit en remplaçant ℓ_{eq} par son expression : $m\ddot{z} + kz = 0$ soit $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
5. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,81$ s On constate que la période propre d'oscillation du véhicule est proche de la période propre de l'organisme. Dans un camion, la constante de raideur est grande donc T_0 est faible ce qui se traduit par une gêne liée à une période non habituelle.
6. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution s'exprime sous la forme : $z(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t$ avec K_1 et K_2 deux constantes d'intégration qui se déterminent à partir des conditions initiales : $z(0) = 0 = K_1$ et $\dot{z}(0) = -v_0 = K_2 \omega_0$, soit $K_2 = -\frac{v_0}{\omega_0}$. On a ainsi $z(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$. L'amplitude des oscillations est $\frac{v_0}{\omega_0} = 1,3$ cm.
7. En faisant l'hypothèse que les quatre ressorts sont montés en parallèle : $k = 4k_0$ car les forces s'exerçant sur le système s'ajoutent : $\vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z = -4k_0(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$.

Problème 3 Enroulement d'un fil sur un cylindre

1. La longueur du fil non enroulé est la différence entre la longueur initiale et la longueur enroulé :

$$l(t) = l_0 - R\theta(t).$$

$$2. \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = R\vec{u}_r + l(t)\vec{u}_\theta$$

$$3. \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dl(t)}{dt}\vec{u}_\theta + l(t)\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}. \text{ Sachant que } \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r \text{ l'expression devient :}$$

$$\vec{v} = -l(t)\dot{\theta}\vec{u}_r + (R\dot{\theta} + \frac{dl(t)}{dt})\vec{u}_\theta. \text{ En dérivant l'équation obtenue à la question 1, on a } R\dot{\theta} = -\frac{dl(t)}{dt}$$

$$\text{soit } \vec{v} = -l(t)\dot{\theta}\vec{u}_r.$$

4. On considère le point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le point matériel est soumis au poids $\vec{P}$, à l'action du support $\vec{R}$ et à la tension du fil $\vec{T}$. La projection du principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué au point M suivant une direction verticale $\vec{u}_z$ conduit $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ soit : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T} = -T\vec{u}_\theta$. L'accélération s'écrit $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{d(l(t)\dot{\theta})}{dt}\vec{u}_r - l(t)\dot{\theta}^2\vec{u}_\theta$. La projection du PFD suivant $\vec{u}_r$ conduit $\frac{dv}{dt} = 0$ ou v est la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est donc uniforme (la norme de la vitesse reste constante).
5. D'après les deux questions précédentes on a $v_r = -l(t)\dot{\theta} = cste = -v_0$, soit $v_0 = l(t)\dot{\theta}$. D'après la première question on a $l(t) = l_0 - R\alpha(t)$ soit en dérivant cette équation $\frac{dl(t)}{dt} = -R\dot{\alpha}$. Nous obtenons alors $\frac{dl(t)}{dt} = -R\frac{v_0}{l(t)}$, ou encore $l(t)dl(t) = -Rv_0 dt = d(\frac{l^2(t)}{2})$. Cette équation s'intègre en tenant compte des conditions initiales, soit $\frac{l^2(t)}{2} - \frac{l_0^2}{2} = -Rv_0 t$. On obtient alors $l(t) = \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}$.

$$6. \text{ D'après la première question on déduit } \theta(t) = \frac{l_0 - \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}}{R}$$

$$7. \text{ Le fil est entièrement enroulé quand } l(t) = 0, \text{ soit } t_f = \frac{l_0^2}{2Rv_0} = 10,7 \text{ s}$$

$$\alpha(t_f) = \frac{l_0}{R} = 2,66 \text{ rad} = 153^\circ$$

$$8. \text{ D'après la question 4) on a } m\vec{a}_\theta = -T \text{ avec } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-v_0\vec{u}_r) = -v_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ et } \dot{\theta} = -\frac{v_0}{l_0\sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}}}.$$

On en déduit $T = \frac{mv_0^2/l_0}{\sqrt{1 - \frac{t}{t_f}}}$, soit $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{t}{t_f}}}$ avec $T_0 = \frac{mv_0^2}{l_0} = 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. T_0 est la tension du fil quand $t = 0$. Lorsque $t \rightarrow t_f$, $T \rightarrow \infty$. Concrètement le fil doit se casser lorsque le point M touche le cylindre.

Problème 4 Toboggan aquatique

A Étude d'un toboggan rectiligne

A.1 On applique le théorème de l'énergie cinétique (TEC) au passager assimilé à un point matériel dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le passager est soumis uniquement à son poids et à la réaction

du toboggan qui ne travaille pas puisque les frottements solides sont négligés. On a ainsi $\Delta E_c = W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB}$ car le poids est une force constante. On a alors $\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$ soit $v_B = \sqrt{2gh}$.

A.2 Le travail du poids est indépendant du chemin suivi (force conservative). La vitesse du point B dépend de la différence d'altitude entre le point A et le point B mais pas de la forme du toboggan.

A.3 Même système, même référentiel. La projection de la deuxième loi de Newton suivant $\vec{u}_z$ donne : $ma_z = 0 = N - mg \cos \alpha$ soit $N = mg \cos \alpha$.

A.4 D'après la loi de Coulomb $\vec{T} = -\mu N \vec{u}_x = -\mu mg \cos \alpha \vec{u}_x$. Cette force étant constante entre A et B (pas de retour en arrière) $W(\vec{R})_{A \rightarrow B} = -TAB$. D'autre part $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$ soit $W(\vec{R})_{A \rightarrow B} = -\frac{\mu mgh}{\tan \alpha}$.

A.5 On applique à nouveau le TEC au passager : $\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$, et en utilisant les travaux calculés précédemment, on obtient $v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)}$.

A.6 On lit sur la figure $\mu = 0,22$ en prenant l'intersection de la courbe avec la droite horizontale $v_B = 80 \text{ km h}^{-1}$.

A.7 On considère le même coefficient de frottement sur la piste horizontale que celui calculées précédemment. Sur une piste horizontale, le poids ne travaille pas, seul le travail de la force de frottement solide intervient dans le TEC. Soit $\Delta E_c = -\mu mgL$ ($\alpha = 0$ dans l'expression de N) soit $L = \frac{v_0^2}{2\mu g} \approx 1,1 \times 10^2 \text{ m}$.

B Étude d'un virage

Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

B.1 Un référentiel est un repère d'espace associé à une base de temps.

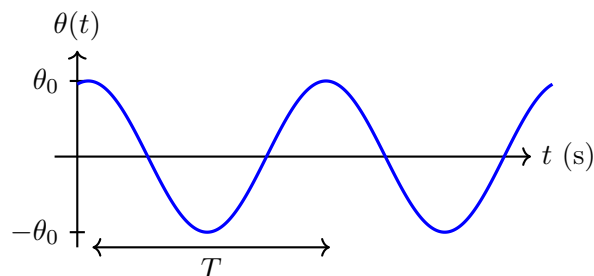
B.2 $\vec{OM} = a\vec{e}_r$, $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = a\dot{\theta}\vec{u}_r$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. (mouvement circulaire : $a = cst$)

B.3 On applique la deuxième loi de Newton au point matériel M dans le référentiel R supposé galiléen. Le point matériel est soumis à son poids et à la réaction normale du support puisqu'on néglige tout frottement. La projection de la deuxième loi de Newton suivant $\vec{e}_\theta$ conduit à $ma\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0$.

B.4 Lorsque les angles sont faibles (typiquement inférieur à 20 degrés, $\sin \theta \approx \theta$, on peut ainsi linéariser l'équation précédente et on obtient $\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$ qui correspond à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

B.5 En considérant l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$, la solution de l'équation différentielle s'écrit : $\theta(t) = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t$ avec K_1 et K_2 deux constantes d'intégrations qui se déterminent à partir des conditions initiales. $\theta(0) = \theta_0 = K_1$ et $\dot{\theta}(0) = K_2 \omega_0 = 0$. soit $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$.

B.6 Allure de $\theta(t)$:



B.7 La période s'obtient à partir de la pulsation propre : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

B.8 On considère un tableau numpy `X` contenant les inconnues $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$. La fonction `Phi` demandée s'écrit :

```
def Phi(X,t):
    theta=X[0]
    thetapoint=X[1]
    return np.array([thetapoint,-a/g*np.sin(theta)])
```

Retour au cas du virage dans le toboggan

B.9 $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = mg\vec{e}_x + \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y + \vec{N}$. Par identification avec la forme souhaitée, on obtient $\vec{g}_{\text{eff}} = g\vec{e}_x + \frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_y$ avec $g_{\text{eff}} = \sqrt{g^2 + \frac{v_0^4}{R_0^2}}$.

B.10 $\tan \alpha = \frac{\vec{g}_{\text{eff}} \cdot \vec{e}_y}{\vec{g}_{\text{eff}} \cdot \vec{e}_x} = \frac{v_0^2}{R_0 g}$ soit $\alpha = \arctan \frac{v_0^2}{R_0 g}$.

Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km h}^{-1}$ et $R_0 = 4,0 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m s}^{-2}$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.

B.11 Il s'agit de la même situation que dans la partie précédente, mais cela revient à considérer que la pesanteur est inclinée. Le mouvement s'effectue ainsi de part et d'autre de $\vec{g}_{\text{eff}}$. La condition initiale $\theta(0) = 0$ revient à la situation précédente où $\theta_0 = -\alpha$. Le mouvement d'oscillation s'effectue donc entre les angles $-\alpha$ et $+\alpha$ par rapport à $\vec{g}_{\text{eff}}$ soit des angles entre $\theta_{\min} = 0$ et $\theta_{\max} = 2\alpha$.

B.12 Dans le cas proposé $\theta_{\max} = 2\alpha = 102^\circ$. La gouttière doit ainsi monter au delà de 100° pour protéger le passager ce qui ne semble pas être le cas sur la photo...