

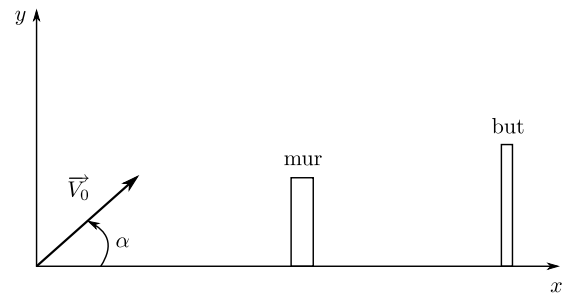
Devoir surveillé n° 3

Mécanique

- La durée de l'épreuve est de 3 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Les numéros de questions et les résultats doivent ressortir de votre copie (pas de rédaction monochrome).
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 Coup franc

On étudie dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe $Oxyz$, un coup franc de football tiré à 20 m , face au but de hauteur $2,44\text{ m}$ et dans son plan médian vertical (Oxy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante. Le ballon, de masse $m = 430\text{ g}$, est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O . Le mur, de hauteur $1,90\text{ m}$, est situé à $9,15\text{ m}$ du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ de norme 20 m.s^{-1} en formant un angle α de 20° avec l'horizontale.



L'origine des dates correspond au départ du ballon et on donne $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ le champ de pesanteur avec $g = 9,8\text{ m.s}^{-2}$.

A Frottements de l'air négligés

Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

- A.1** Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.
- A.2** Le ballon passe-t-il au dessus du mur ?
- A.3** Le tir est-il cadré ?

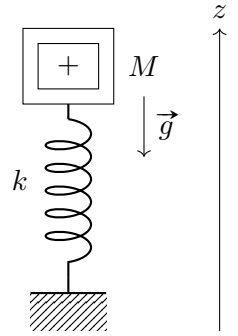
B Prise en compte des frottements de l'air

En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur $5,0 \times 10^{-3}\text{ kg.s}^{-1}$ et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.

- B.1** Déterminer les équations différentielles du mouvement. On pourra introduire la grandeur $\tau = \frac{m}{h}$ tout en déterminant sa dimension.
- B.2** En déduire les équations vérifiées par $v_x(t)$ et $v_y(t)$ puis par $x(t)$ et $y(t)$.
- B.3** Le ballon passe-t-il au dessus du mur ?
- B.4** Le tir est-il cadré ?

Problème 2 Suspension de voiture

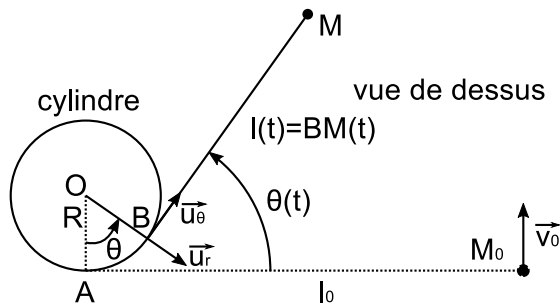
Le système de suspension d'une voiture est modélisé par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur $k = 9,0 \times 10^4 \text{ N m}^{-1}$. La voiture est assimilée à un point matériel M de masse $m = 1,5 \times 10^3 \text{ kg}$ observé dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen. Le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ avec $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.



1. Qu'est ce qu'un référentiel galiléen ? À quelle condition le référentiel terrestre peut être assimilé à un référentiel galiléen ?
2. La voiture est au repos dans $\mathcal{R}_T$. Exprimer la longueur du ressort à l'équilibre ℓ_{eq} en fonction de ℓ_0 , m , k et g . Calculer numériquement la variation de longueur du ressort : $\Delta\ell = \ell_{eq} - \ell_0$.
3. À la suite d'une perturbation, la voiture se met à osciller. Donner l'expression de la force de rappel $\vec{T}$ exercée par le ressort sur $M(m)$, en fonction de k , $\ell(t)$ (longueur du ressort à l'instant t), de ℓ_0 et de $\vec{u}_z$ vecteur unitaire orienté dans le sens opposé au champ de pesanteur.
4. On pose $z(t) = \ell(t) - \ell_{eq}$: écartement de M par rapport à sa position d'équilibre. Établir l'équation différentielle du mouvement de M dans $\mathcal{R}_T$ et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ où on explicitera la pulsation propre ω_0 en fonction des données.
5. Calculer la période propre T_0 des oscillations. Il est agréable que la suspension d'une voiture s'accompagne d'oscillations de périodes voisines de la période propre à laquelle l'organisme est habitué (période de la marche : 0,8 s). Que pensez-vous du système de suspension étudié ? Expliquez qualitativement pourquoi le transport en camion est inconfortable.
6. On suppose qu'à l'origine des temps : $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = -v_0$. Déterminer l'expression de l'allongement $z(t)$ et calculer l'amplitude des oscillations sachant que $v_0 = 0,10 \text{ m s}^{-1}$.
7. En fait la voiture repose sur quatre ressorts de constante de raideur k_0 . On fait l'hypothèse que les quatre ressorts sont montés en parallèle. Quelle relation existe-t-il entre k et k_0 . Justifier.

Problème 3 Enroulement d'un fil sur un cylindre

Un cylindre d'axe vertical et de rayon R , est fixé sur un plan horizontal. On attache à la base du cylindre au point A , un fil de longueur initiale l_0 . L'autre extrémité du fil est fixée à un mobile M ponctuel de masse m astreint à glisser sans frottement sur le plan horizontal. Le dispositif vu de haut est représenté ci-dessous. À l'instant initial, on communique au mobile une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale et orthogonale au fil. Le fil s'enroule alors autour du cylindre. On se place dans la base de coordonnées polaires ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$) et on suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement. Le point M et le fil fait un angle $\theta(t)$ par rapport à sa position de départ. Les forces de frottements solides et fluides sont négligées.



1. Le fil étant inextensible, montrer que la longueur du fil non enroulé $l(t)$ s'écrit $l(t) = l_0 - R\theta(t)$.
2. Déterminer l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base polaire ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$).
3. En déduire l'expression du vecteur vitesse en fonction de R , $\dot{\theta}$, $\frac{dl}{dt}$ et l puis simplifier cette expression en montrant que le vecteur vitesse est uniquement suivant $\vec{u}_r$.
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel M , puis montrer que la norme de la vitesse du point M reste constante au cours du mouvement.
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $l(t)$ puis montrer que $l(t)$ s'écrit $l(t) = \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}$.
6. Donner l'expression de $\theta(t)$ en fonction de v_0 , l_0 , R et t .

7. Déterminer l'instant final t_f et l'angle θ correspondant pour lequel le fil est entièrement enroulé autour du cylindre . Application numérique : $R = 30 \text{ cm}$, $m = 50 \text{ g}$, $l_0 = 80 \text{ cm}$ et $v_0 = 10 \text{ cm s}^{-1}$
8. Exprimer la tension T exercée par le fil au cours du mouvement et la mettre sous la forme $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{t}{t_f}}}$ où on exprimera T_0 en fonction des données. Calculer et interpréter T_0 . Que vaut T quand t est voisin de t_f . Commenter.

Problème 4 Toboggan aquatique

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et ce problème propose d'étudier leur dimensionnement.

On rappelle l'expression du théorème de l'énergie cinétique appliqué entre deux positions A et B à un point matériel dans le référentiel galiléen d'étude soumis à une résultante des forces $\vec{f}$:

$$\Delta E_{cA \rightarrow B} = W(\vec{f})_{A \rightarrow B} \quad \text{où} \quad W(\vec{f})_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

avec $d\vec{\ell}$ le vecteur déplacement élémentaire.

A Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est noté h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

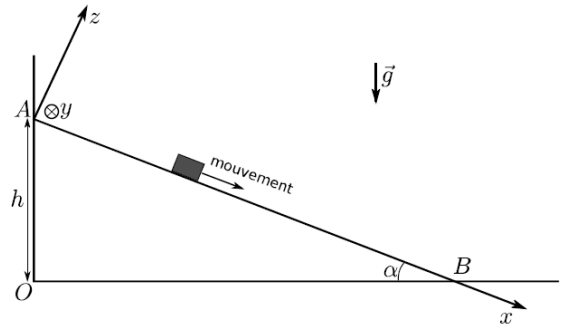


Figure 1. Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de WaveIsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33 \text{ m}$ et $\alpha \simeq 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

A.1 Déterminer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et g .

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92 \text{ km h}^{-1}$.

A.2 Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

On prend maintenant en compte les frottements solides. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{u}_x$ seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{u}_z - T\vec{u}_x$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisant pour qu'il y ait du mouvement.

A.3 Établir l'expression de N en fonction m , g et de l'angle α .

A.4 Exprimer le travail de la force $\vec{R}$, pour le mouvement entre les points A et B , d'abord en fonction de la longueur AB et de T . Dans un second temps en fonction de μ , h , m , g et de l'angle α .

A.5 À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B , en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

A.6 La figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

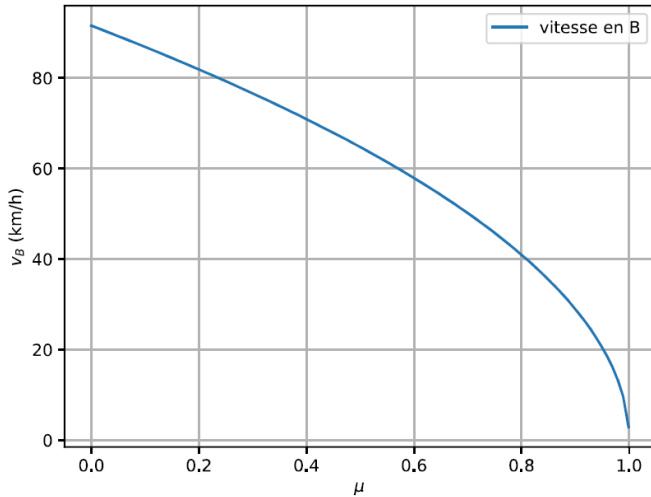


Figure 2 : tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

A.7 À l'aide des données précédentes, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

B Étude d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 3. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

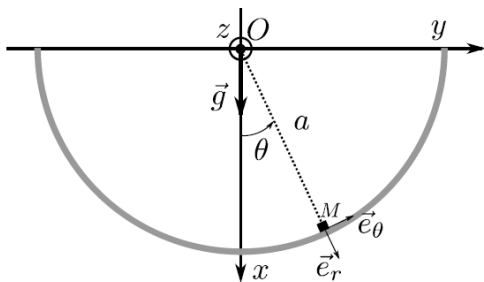


Figure 3 : le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

B.1 Définir ce qu'est un référentiel.

B.2 Exprimer le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M dans la base polaire.

B.3 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = 0$$

B.4 À quelle condition portant sur θ , l'équation précédente peut-elle être assimilée à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ?

B.5 En considérant l'hypothèse de la question précédente, résoudre l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

B.6 Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

B.7 Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

B.8 Dans le cas où la condition sur l'angle θ n'est pas vérifiée proposer une fonction codée sous python qui permettrait de résoudre numériquement l'équation différentielle à l'aide de la fonction `odeint` de la librairie `scipy.integrate`. Cette fonction prendra pour entrée un tableau numpy $\mathbf{X}$ et un instant t et renvoie le tableau numpy $\mathbf{Xp}$ comprenant les dérivées temporelles du tableau $\mathbf{X}$.

Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan (Oxy) représenté figure 4. On se place dans l'approximation où ce plan (Oxy) , qui se déplace avec le passager, le fait avec une vitesse v_0 qui reste constante. Les informations importantes pour la suite du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan (Oxy) uniquement (figure 4, droite).
- Le référentiel dans lequel le plan (Oxy) est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée force « centrifuge ») qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$.
- Dans le référentiel du plan (Oxy) , alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids $\vec{P}$, à $\vec{F}$, et à la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan (on néglige tout frottement).

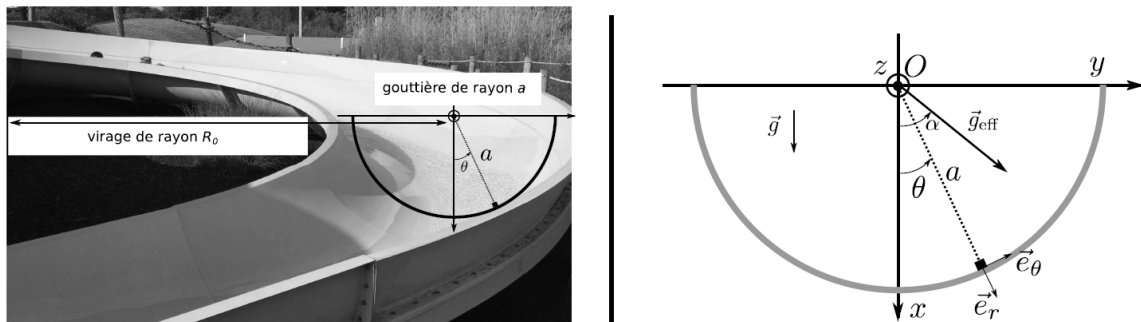


Figure 4. Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

B.9 Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$ avec $\vec{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur « effective » dont on donnera la norme en fonction de g , R_0 et v_0 .

B.10 Donner également l'expression de l'angle α entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe (Ox) , en fonction de g , R_0 et v_0 .

Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km h}^{-1}$ et $R_0 = 4,0 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m s}^{-2}$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.

B.11 Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec les questions de la partie préliminaire, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire des calculs compliqués pour répondre à cette question.

B.12 Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans le cas proposé.