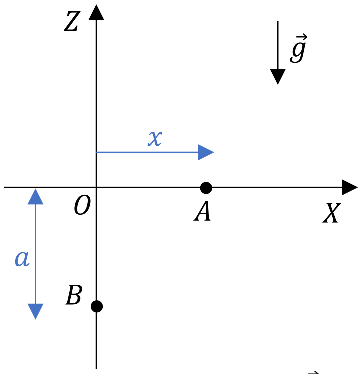
Problème 1 :



Un petit anneau A assimilé à un point matériel de masse m et portant une charge électrique $q < 0$ est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige horizontale Ox. Il est soumis en outre à l'action d'une charge $Q > 0$ placée en un point fixe B, situé à la distance a de O sur l'axe vertical Oz.

On note r la distance AB, $\vec{u}_r$ un vecteur unitaire orienté de B vers A et ε_0 la permittivité du vide.

1) Donner l'expression de la force électrostatique $\vec{F}$ exercée par B sur A, en fonction de q, Q, ε_0, r et $\vec{u}_r$.

2) Etablissez l'expression de la fonction énergie potentielle $E_P(r)$ dont dérive la force $\vec{F}$. On fera l'hypothèse que $E_P(r) \to 0$ quand $r \to \infty$.

3) En explicitant la distance r en fonction des données, montrer que :

$$E_P(x) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2 + x^2}}$$

4) Effectuer le bilan des forces agissant sur le point A et indiquer, pour chacune d'entre elles, si elle travaille ou non pour un déplacement le long de l'axe Ox.

5) Justifier que l'anneau A constitue un système conservatif.

6) Dessiner l'allure de la fonction $E_P(x)$ et vérifier que le point O est une position d'équilibre stable (on sera attentif au fait que $q.Q < 0$).

7) L'anneau est lancé depuis le point O avec une vitesse initiale de valeur $\vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$ (avec $\vec{u}_x$ vecteur unitaire orienté dans la direction Ox). En vous appuyant sur une analyse graphique, montrer qu'il existe deux types de mouvements différents selon la valeur de l'énergie mécanique E_m de l'anneau.

8) Déterminer la valeur minimale de v_0 notée v_{min} au-dessus de laquelle le mouvement de l'anneau correspond à un état de diffusion (ou état libre).

9) On donne $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}\ S.I.$, $q = -Q = -0{,}15\ \mu C$, $m = 2{,}0\ g$ et $a = 10\ cm$. Calculer la valeur minimale v_{min}.

10) Dans le cas où $v_0 = v_{min}$ donner l'expression de la vitesse v en fonction de x.

11) L'anneau est lancé avec une vitesse de valeur $\frac{v_{min}}{2}$. Déterminer en fonction de a, l'abscisse x_{max} à laquelle il va s'arrêter.

On s'intéresse à présent aux petits mouvements de l'anneau au voisinage de sa position d'équilibre $x = 0$. On rappelle que pour $\frac{x}{a} \ll 1$:

$$\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2.a^2}$$

12) Montrer que pour $x \ll a$, l'énergie potentielle peut se mettre sous la forme :

$$E_P(x) = E_P(0) + \frac{1}{2}\beta.x^2$$

où β est une constante que l'on exprimera en fonction de q, Q, ε_0 et a.

13) En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit l'abscisse x. En déduire que le mouvement de A est celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre ω en fonction de β et m puis de m, q, Q, ε_0 et a.

14) Calculer la valeur numérique de ω ainsi que celle de la période T des oscillations avec les valeurs données à la question 9).

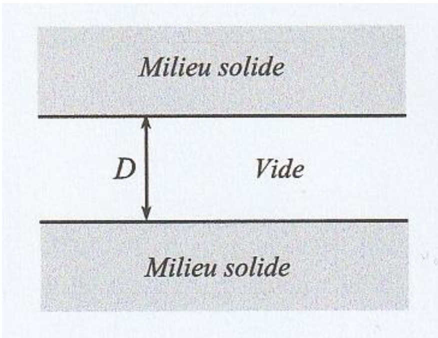
Problème 2: Le gecko…

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

Si on considère deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (cf figure ci-dessous), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que **la force surfacique** entre les deux milieux s'écrit :

$$f(D) = \frac{A}{6.\pi.D^3}$$

La constante A, appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.



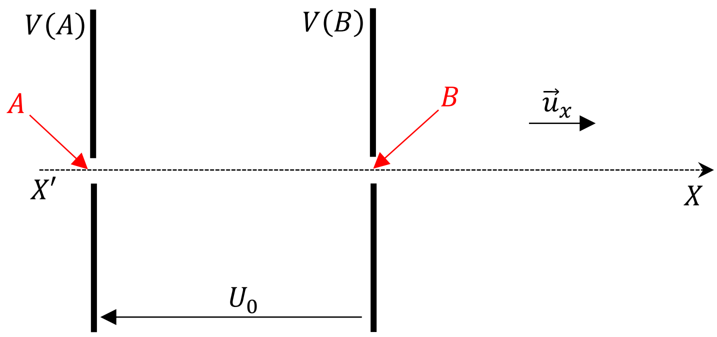
1) Une force surfacique est définie comme étant le rapport d'une force sur une surface. Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.
2) Un gecko de masse $m = 50\ g$ est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6,0 millions de sétules, comportant chacune en moyenne $5{,}0.10^2$ spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de côté $a = 0{,}20\ \mu m$ située à une distance $D = 1{,}0\ nm$ du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisés par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$ et $A = 1{,}0.10^{-19}\ J$.
Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de $50\ g$ utilise à son maximum d'adhérence uniquement 0,04 % de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence du gecko aux interaction de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?
3) A un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute (sans vitesse initiale) d'une hauteur $h = 10\ cm$ avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposé au glissement) de l'ordre de $F = 10\ N$ par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50 % de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

Problème 3 : Etude d'une lentille électrostatique

Dans ce problème, nous étudierons les propriétés focalisantes d'une lentille électrostatique sur un faisceau d'électrons de vitesse $\vec{v}_0$. Ce problème est composé de deux parties : l'étude de l'accélérateur linéaire qui permet d'accélérer des électrons de vitesse initiale négligeable jusqu'à une vitesse $\vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$ puis l'étude de la lentille électrostatique.

Première partie : l'accélérateur linéaire

On considère un accélérateur linéaire composé de deux plaques métalliques portées aux potentiels électriques $V(A)$ et $V(B)$. On note $U_0 = V(A) - V(B)$ la différence de potentiel entre les deux plaques.



Des électrons (de charge $q = -e$) pénètrent avec une vitesse initiale négligeable à l'entrée de l'accélérateur linéaire en A. On suppose que le champ électrique, noté $\vec{E}_0$ est uniforme et stationnaire entre les deux plaques de l'accélérateur.

1) Donner la définition d'un champ uniforme et stationnaire.

2) On pose $\vec{E}_0 = E_0.\vec{u}_x$. Quel doit être le signe de E_0 pour que les particules soient accélérées entre les points A et B ?

3) Que peut-on dire du signe de la tension accélératrice U_0 ? Justifier.

4) On assimile un électron à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que l'électron n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique dans l'accélérateur linéaire. Justifier que l'énergie mécanique de l'électron est constante et donnée par :

$$E_m(M) = \frac{1}{2}m.v^2(M) + q.V(M)$$

en faisant l'hypothèse que l'énergie potentielle d'interaction de l'électron avec le potentiel $V(M)$ est nul quand le potentiel électrique est nul.

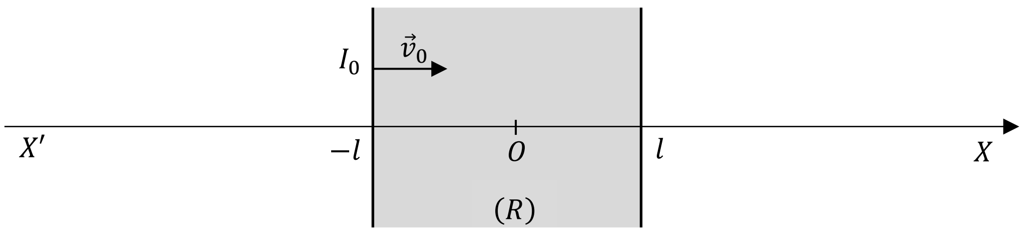
5) On note v_0 la vitesse des électrons à la sortie de l'accélérateur linéaire (au point B). Déterminer v_0 en fonction de e, m et U_0.

6) On donne $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$, $m = 9{,}1.10^{-31}\ kg$ et $U_0 = 3{,}0.10^{3}\ V$. Calculer la vitesse des électrons à la sortie de l'accélérateur linéaire.

Deuxième partie : la lentille électrostatique

A la sortie de l'accélérateur linéaire, les électrons de vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0.\vec{u}_x$ subissent les effets d'une lentille électrostatique. Dans celle-ci, un champ électrostatique $\vec{E}$ non uniforme règne dans une région (R) du laboratoire telle que : $-l \leq x \leq l$ et $y^2 + z^2 \leq r^2$. (R) possède une symétrie cylindrique et constitue une « lentille électrostatique ».

Lentille électrostatique



Le champ électrostatique dans (R) a pour expression :

$$\vec{E} = -2.\beta.x.\vec{u}_x + \beta.y.\vec{u}_y + \beta.z.\vec{u}_z$$

où $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont les vecteurs unitaires du trièdre orthonormé $Oxyz$, β est une constante. l et r sont des données. On suppose $r < l$. A l'instant choisi pour origine des dates $(t = 0)$, un électron de vitesse $\vec{v}_0 = v_0.\vec{i}$ pénètre en I_0 dans (R). A cet instant : $x = x_0 = -l\,;\ y = y_0 \ll r\,;\ z = z_0 \ll r$. Un électron est assimilé à un point matériel M de masse m (et de charge $q = -e$) observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen

1) Montrer que, à l'extérieur de (R), le mouvement d'un électron est rectiligne et uniforme si on néglige son poids et l'action de tout champ électrique ou magnétique.

2) Comment choisir le signe de β si l'on veut que le champ $\vec{E}$ tende à rapprocher l'électron de l'axe $X'X$?

3) Justifier par des ordres de grandeur que les effets du poids sont négligeables devant ceux de la force de Lorentz électrique dans la lentille électrostatique.

4) Donner l'expression de son vecteur accélération dans (R). En déduire les coordonnées du vecteur accélération en fonction de β, e, m et des coordonnées x, y et z de l'électron.

5) Montrer que les équations différentielles vérifiées séparément par x, y et z sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2.\omega^2.x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2.y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2.z = 0 \end{cases}$$

avec ω pulsation que l'on exprimera en fonction β, e et m.

6) Montrer que la solution de l'équation différentielle en x peut s'exprimer sous la forme :

$$x(t) = A.e^{k.t} + B.e^{-k.t}$$

avec $k > 0$ que l'on exprimera en fonction de ω, A et B constantes que l'on déterminera en fonction des données.

7) Dans toute la suite, on supposera satisfaite la condition $v_0 \gg \omega.l$.
Montrer que sous cette condition, l'expression de $x(t)$ peut s'écrire : $x(t) = -l + v_0 t$. Que peut-on alors dire de la vitesse $\dot{x}$ de l'électron pendant la traversée de la région (R) ? On rappelle le développement limité de la fonction exponentielle pour x << 1 : $e^x = 1 + x$.

8) Résoudre les équations différentielles en y et en z. Montrer que la trajectoire électronique reste au voisinage de $x'x$ (hypothèse paraxiale). Quelle est l'hypothèse correspondante en optique ?

9) En déduire les expressions des vitesses $\dot{y}$ et $\dot{z}$. En donner ensuite la forme approchée sous la condition $v_0 \gg \omega.l$.

10) Donner les coordonnées du vecteur vitesse en I sur la face de sortie de la lentille. D'après le résultat établi question 2, en déduire les équations horaires du mouvement de l'électron après traversée de la lentille.

11) Montrer que la trajectoire de l'électron coupe l'axe OX en un point F' dont on déterminera la position.
La position de F' dépend-elle de I ? Justifier le nom de foyer donné à F'. Cette lentille électrostatique est-elle convergente ou divergente ? Comment peut-on agir sur sa distance focale ?

12) Calculer la distance focale $f' = \overline{OF'}$ pour $l = 1{,}0.10^{-4}\ m$; $\frac{\omega.l}{v_0} = 1{,}0.10^{-2}$.