CLASSES DE PCSI 1 et 3- Corrigé du D.L N°5 DE PHYSIQUE

Problème 1 : Interaction électrostatique

1) La force électrostatique $\vec{F}$ exercée par B sur A est donnée par la loi de Coulomb :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}\vec{u}_r}$$

On vérifie qu'avec $q.Q < 0$, cette **force est attractive**.

2) Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est donné par : $\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$. En explicitant, on établit que :

$$\delta w = \frac{q.Q.dr}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2} = -dE_P(r)$$

Ainsi :

$$\frac{dE_P(r)}{dr} = -\frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.r^2}$$

Dont la primitive est :

$$E_P(r) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.r} + \text{cte}$$

Si on pose arbitrairement que l'énergie potentielle est nulle pour $r \to \infty$ alors :

$$\boxed{E_P(r) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.r}}$$

3) Sachant que $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ et on établit que :

$$\boxed{E_P(x) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2 + x^2}}}$$

4) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le point matériel M de masse m est soumis à :

- son poids $\vec{p}$ qui ne travaille pas.
- la réaction du support $\vec{R}$ qui ne travaille pas (on néglige les frottements).
- la force d'interaction électrostatique $\vec{F}$ qui travaille.

5) Soit E_m l'énergie mécanique de M dans le référentiel terrestre. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique au système :

$$dE_m = \delta w^{nc}$$

Sachant que $\vec{p}$ et $\vec{R}$ ne travaillent pas et que la force $\vec{F}$ est conservative, on peut dire que : $dE_m = 0$ et donc que :

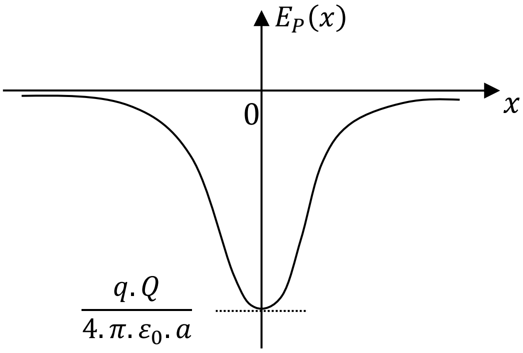
$$\boxed{E_m = \text{cte}}$$

On vérifie que le système est conservatif.

6) Avec $E_P(x) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+x^2}}$:

- pour $x = 0$, $E_P(0) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a} < 0$
- pour $x \to \infty$, $E_P(x) \sim \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.|x|} \to 0^-$
- On constate également que la fonction $E_P(x)$ est paire : $E_P(-x) = E_P(x)$.

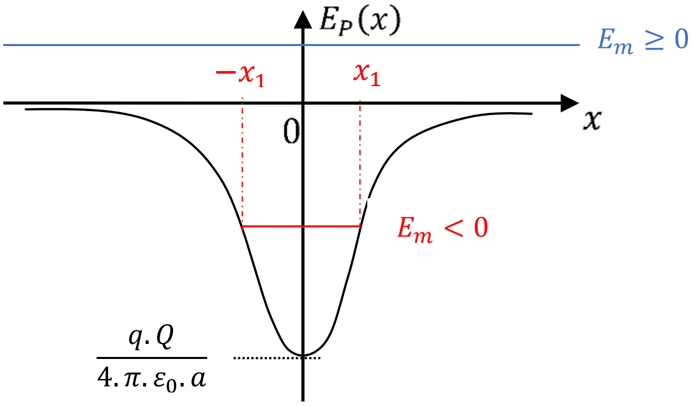
On en déduit l'allure de la fonction $E_P(x)$:



On vérifie que $E_P(x)$ est minimale en $x = 0$, donc O est une **position d'équilibre stable**.

7) Avec $E_m = E_C + E_P(x) = \text{cte}$ on sait que : $E_C = E_m - E_P(x) \geq 0$. A partir du profil de la fonction énergie potentielle, on peut dire que :

- Si $E_m \geq 0$ alors $E_m - E_P(x) \geq 0$ quelles que soient les valeurs de x. On en déduit que le système est dans un état libre (ou état de diffusion).
- Si $E_m < 0$: le système est dans un puits de potentiel et $x \in [-x_1, x_1]$ en posant que $E_C = E_m - E_P(x_1) = 0$. Le système est dans un état lié.



8) On lance l'anneau depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0$. Sachant que $E_m = \text{cte}$ déterminée par les conditions initiales :

$$E_m = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}$$

La vitesse minimale pour que le système soit dans un état libre est donnée par $E_m = 0$. En explicitant :

$$E_m = \frac{1}{2}m{v_{min}}^2 + \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a} = 0$$

Soit :

$$\boxed{v_{min} = \sqrt{-\frac{2.q.Q}{m.4.\pi.\varepsilon_0.a}} = \sqrt{\frac{2.|q.Q|}{m.4.\pi.\varepsilon_0.a}}}$$

9) A.N.: $v_{min} = 1{,}4\ \text{m.s}^{-1}$

10) Pour $v_0 = v_{min}$: $E_m = \frac{1}{2}m.v(x)^2 + \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+x^2}} = 0$ on établit ainsi que :

$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{2.|q.Q|}{m.4.\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+x^2}}}$$

11) Pour $v_0 = \frac{v_{min}}{2}$:

$$E_m = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}m{v_{min}}^2\right) + \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}$$

Avec $\frac{1}{2}m{v_{min}}^2 = -\frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}$ on établit que :

$$E_m = -\frac{1}{4}\left(\frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}\right) + \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a} = \frac{3}{4}\left(\frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}\right) < 0$$

L'abscisse x_{max} est déterminée par :

$$E_m = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+{x_{max}}^2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}\right)$$

Ce qui nous conduit à :

$$x_{max} = \sqrt{\frac{7}{9}}a = 0{,}88.a$$

Le système oscille alors dans l'intervalle $x \in [-x_{max}, x_{max}]$.

12) Nous pouvons écrire que :

$$E_P(x) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Pour $x \ll a$, on peut écrire $E_P(x)$ sous la forme :

$$E_P(x) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)\right)$$

En notant que $E_P(0) = \frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a}$ on peut exprimer $E_P(x)$ sous la forme :

$$E_P(x) = E_P(0) + \frac{1}{2}\beta.x^2 \text{ avec } \beta = -\frac{q.Q}{4.\pi.\varepsilon_0.a^3} = \frac{|q.Q|}{4.\pi.\varepsilon_0.a^3}$$

13) Avec $E_C = \frac{1}{2}m.v(x)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_P(0) + \frac{1}{2}\beta.x^2 = \text{cte}$$

En dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps, on établit :

$$m.\dot{x}.\ddot{x} + \beta.\dot{x}.x = 0$$

On reconnait l’équation différentielle d’un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{m}} = \sqrt{\frac{|q.Q|}{m.4.\pi.\varepsilon_0.a^3}}$$

14) A.N.: $\omega = 10\ \mathrm{rad.s^{-1}}$ et $T = 0,62\ s$

Problème 2: Le gecko…

1) Sachant que $f(D)$ est une force surfacique :

$$[f(D)] = \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$$

On en vérifie que A est homogène à une énergie :

$$[A] = [f(D).D^3] = M.L^2.T^{-2}$$

2) Posons $N_{sé} = 6,0.10^6$ le nombre de sétules, $N_{sp} = 5,0.10^2$ le nombre de spatules et N_{ut} le nombre de sétules utilisés. A l'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur le gecko est nulle :

$$m.g - N_{ut}.(N_{sp}.a^2).\left(\frac{A}{6.\pi.D^3}\right) = 0$$

On en déduit que :

$$N_{ut} = \frac{m.g.6.\pi.D^3}{N_{sp}.a^2.A}$$

Le pourcentage de sétules utilisé est fixé par le rapport :

$$\alpha = \frac{N_{ut}}{N_{sé}} = \frac{m.g.6.\pi.D^3}{N_{sé}.N_{sp}.a^2.A}$$

A.N. : $\alpha = 0,077\ \%$

On peut noter que α est dans l'ordre de grandeur ce qui confirme l'hypothèse d'interactions de Van der Waals. Cependant, la valeur calculée est quasiment 2 fois supérieur à la valeur maximale calculée par l'équipe de Kellar Autumn… En milieu naturel, le gecko utilise davantage de sétules selon la régularité de la surface de contact (plus ou moins plane), et la présence éventuelle de poussière, de particules qui peuvent limiter l'adhérence.

3) On assimile le gecko à un point matériel observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Supposons que pendant sa chute, le gecko ne soit soumis qu'à son poids. Compte tenu du fait que le poids est une force conservative, l'énergie mécanique du gecko se conserve pendant la chute : $E_m =$ cte. Si on note v_0 la vitesse du gecko après une chute d'une hauteur h, on peut dire que :

$$\frac{1}{2}m.v_0^2 = m.g.h$$

On en déduit l'expression de la vitesse du gecko à son arrivée sur la surface verticale :

$$v_0 = \sqrt{2.g.h}$$

A partir du moment où le gecko glisse sur la surface verticale, il est soumis à l'action d'une force de frottement solide d'intensité $(F/2)$. Cette force est non-conservative. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique :

$$dE_m = \delta w^{nc} = -\left(\frac{F}{2}\right).dl$$

Entre la phase de réception et la phase d'arrêt, on établit que :

$$\Delta E_m = -\left(\frac{F}{2}\right).h'$$

en notant h' la distance de glissement sur la surface verticale.

Avec :

$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = 0 - \left(\frac{1}{2}m.v_0^2 + m.g.h'\right) = -m.g.(h + h')$$

Soit :

$$-m.g.(h + h') = -\left(\frac{F}{2}\right).h'$$

On en déduit que :

$$\boxed{h' = \frac{m.g.h}{\frac{F}{2} - m.g}}$$

A.N. : $h' = 1{,}1\ cm$

Problème 3 : Etude d'une lentille électrostatique

Première partie : l'accélérateur linéaire

1) Un champ est **uniforme** s'il possède la même intensité en tout point de l'espace. Un champ est **stationnaire** s'il est indépendant du temps.

2) Dans l'accélérateur linaire, les particules chargées sont soumises à la force de Lorentz électrique :

$$\boxed{\vec{F}_{LE} = q.\vec{E}_0 = -e.E_0.\vec{u}_x}$$

Pour que les particules soient accélérées entre A et B, il faut que $-e.E_0 > 0$, et donc que $E_0 < 0$.

3) Sachant que $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}.V(M)$ le champ électrique « descend » les potentiels donc $V(B) > V(A)$ et :

$$\boxed{U_0 = V(A) - V(B) < 0}$$

4) On assimile l'électron à un point matériel soumis uniquement à l'action de la force de Lorentz électrique qui est une force conservative. Etablissons l'expression de la fonction énergie potentielle associée :

$$\delta w = \vec{F}_{LE}.\overrightarrow{dl} = -dE_{Pi}$$

Sachant que :

$$dV(M) = -\vec{E}(M).\overrightarrow{dl}$$

$$\delta w = \vec{F}_{LE}.\overrightarrow{dl} = q.\vec{E}(M).\overrightarrow{dl} = -q.dV(M) = -dE_{Pi}$$

On établit l'expression de la fonction énergie potentielle d'interaction d'une charge ponctuelle q dans un potentiel électrique $V(M)$:

$$E_{Pi} = q.V(M) + A$$

Si on pose arbitrairement que l'énergie potentielle est nulle pour $V(M) = 0$ alors :

$$\boxed{E_{Pi} = q.V(M)}$$

On vérifie que l'énergie mécanique de la particule chargée est bien :

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m.v^2(M) + q.V(M)$$

Sachant que la force de Lorentz est conservative, l'énergie mécanique de la particule chargée est constante : $E_m(M) = $ cte.

5) En explicitant l'énergie mécanique en A et en B, on établit que :

$$\frac{1}{2} m.v^2(A) + q.V(A) = \frac{1}{2} m.v^2(B) + q.V(B)$$

Soit :

$$\frac{1}{2} m.v^2(B) - \frac{1}{2} m.v^2(A) = q.\big(V(A) - V(B)\big)$$

Relation que nous aurions pu établir également à partir du théorème de l'énergie cinétique.

En négligeant la vitesse initiale devant la vitesse à la sortie de l'accélérateur, puis en explicitant, on établit que :

$$\frac{1}{2} m.v_0^2 = -e.U_0$$

Rq. : on vérifie que $-e.U_0 > 0$.

Soit :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{-\frac{2.e.U_0}{m}}}$$

6) A.N. : $v_0 = 3{,}2.10^7\ m.s^{-1}$ le comportement de la particule chargée se situe aux limites de la mécanique classique.

Deuxième partie : la lentille électrostatique

1) Le référentiel d'étude est supposé galiléen. En l'absence de force extérieure, la trajectoire de l'électron est rectiligne et uniforme.

2) On assimile l'électron à un point matériel M de masse m et de charge $q = -e$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à M dans le référentiel d'étude supposé galiléen, si on néglige toute autre force devant la force électrique : $m.\vec{a}(M) = q.\vec{E}$. Pour maintenir M au voisinage de l'axe $X'X$ il faut que les composantes de la force électrique sur $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ soient négatives, soit $\beta > 0$.

3) En ordre de grandeur : $p = m.g \sim 10^{-29}\ N$ et $F_{LE} = q.E_0 = 10^{-15}\ N$ (pour un champ de $10^4\ V/m$). On vérifie que $p \ll F_{LE}$. On peut donc négliger les effets du poids devant ceux de la force de Lorentz électrique.

4) En projetant le principe fondamental de la dynamique dans la base de coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} m.\ddot{x} = 2.e.\beta.x \\ m.\ddot{y} = -e.\beta.y \\ m.\ddot{z} = -e.\beta.z \end{cases}$$

On établit ainsi les composantes du vecteur accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \left(\dfrac{2.e.\beta}{m}\right).x \\ \ddot{y} = -\left(\dfrac{e.\beta}{m}\right).y \\ \ddot{z} = -\left(\dfrac{e.\beta}{m}\right).z \end{cases}$$

5) Si on pose $\omega = \sqrt{\frac{e.\beta}{m}}$ on vérifie que les équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2.\omega^2.x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2.y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2.z = 0 \end{cases}$$

6) Sur $\vec{u}_x$ l'équation caractéristique est : $r^2 - 2.\omega^2 = 0$ dont les solutions sont $r_1 = \sqrt{2}.\omega$ et $r_2 = -\sqrt{2}.\omega$. La solution de cette équation différentielle est du type :

$$x(t) = A.e^{r_1.t} + B.e^{r_2.t} = A.e^{k.t} + B.e^{-k.t}$$

Compte tenu des conditions initiales : $x(0) = -l = A + B$ et $\dot{x}(0) = \sqrt{2}.\omega.(A - B) = v_0$, on en déduit que :

$$k = \sqrt{2}.\omega\ ;\ A = \frac{v_0}{2.k} - \frac{l}{2} \text{ et } B = -\left(\frac{v_0}{2.k} + \frac{l}{2}\right)$$

Soit la solution de l'équation différentielle sur $\vec{u}_x$:

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{2}.\omega} sh\left(\sqrt{2}.\omega.t\right) - l.ch\left(\sqrt{2}.\omega.t\right)$$

7) $\dot{x}(t) = v_0.ch\left(\sqrt{2}.\omega.t\right) - l.\sqrt{2}.\omega.sh\left(\sqrt{2}.\omega.t\right) = v_0.ch\left(\sqrt{2}.\omega.t\right)$ pour $v_0 \gg \omega.l$. Sachant qu'en plus, v_0 « grand » impose un temps de déflexion cours, on peut faire l'hypothèse que $\sqrt{2}.\omega.t \ll 1$. Dans ce cas : $ch\left(\sqrt{2}.\omega.t\right) = 1$ et $\dot{x}(t) = v_0$.

8) Les solutions sur $y'y$ et sur $z'z$ sont celles d'oscillateurs harmoniques. En tenant compte des conditions initiales, on établit que :

$$\begin{cases} y(t) = y_0.cos(\omega.t) \\ z(t) = z_0.cos(\omega.t) \end{cases}$$

Pour $\omega.t \ll 1$, $y(t) = y_0$ et $z(t) = z_0$: la particule reste au voisinage de l'axe $X'X$. En optique géométrique, ceci revient à supposer que les rayons lumineux sont peu écartés de l'axe optique, ce qui constitue une des conditions de Gauss.

9) Dans l'hypothèse que $\omega.t \ll 1$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -y_0.\omega.sin(\omega.t) = -y_0.\omega^2.t \\ \dot{z}(t) = -z_0.\omega.sin(\omega.t) = -z_0.\omega^2.t \end{cases}$$

10) Avec $x(t) = v_0.t - l$, à la sortie de la zone de déflexion : $x(t_I) = l = v_0.t_I - l$ donc $t_I = \frac{2.l}{v_0}$ On peut donc déterminer les composantes du vecteur vitesse à la sortie de la lentille :

$$\begin{cases} \dot{x}(t_I) = v_0 \\ \dot{y}(t_I) = -\dfrac{2.\omega^2.l.y_0}{v_0} \\ \dot{z}(t_I) = -\dfrac{2.\omega^2.l.z_0}{v_0} \end{cases}$$

En primitivant, on établit les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0.t - l \\ y(t) = y_0.\left(1 - \dfrac{2.\omega^2.l.t}{v_0}\right) \\ z(t) = z_0.\left(1 - \dfrac{2.\omega^2.l.t}{v_0}\right) \end{cases}$$

11) Quand la particule coupe l'axe $X'X$, $y(t_{F'}) = z(t_{F'}) = 0$, donc $t_{F'} = \frac{v_0}{2.\omega^2.l}$ et la distance focale de la lentille électrostatique a pour expression :

$$x(t_{F'}) = \overline{OF'} = \frac{{v_0}^2}{2.\omega^2.l} - l$$

12) A.N. : $\overline{OF'} = 0,5\ m$. La lentille électrostatique est convergente : $\overline{OF'} > 0$. On peut noter que la position de F' est proportionnelle à ${v_0}^2$. Si on souhaite modifier la distance focale de la lentille, il faut modifier v_0.