TD Signaux électriques n° 2

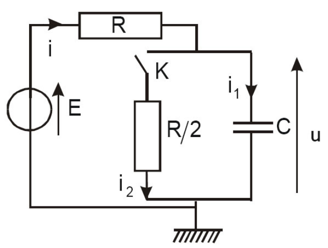
Circuits linéaires du premier ordre

Capacités exigibles :

- Déterminer des conditions initiales et finales à partir d'une approche qualitative ◐.
- Savoir résoudre une équation différentielle du premier ordre ✠.
- Prévoir l'évolution d'un système s'appuyant sur un portrait de phase ⌑.

Exercice 1 Régimes transitoires d'un circuit RC*** ◐✠

Nous considérons le circuit ci-contre. Nous noterons i, l'intensité dans le résistor de résistance R, i_1 l'intensité dans le condensateur de capacité C, i_2 l'intensité dans le résistor de résistance $\frac{R}{2}$ et u la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.

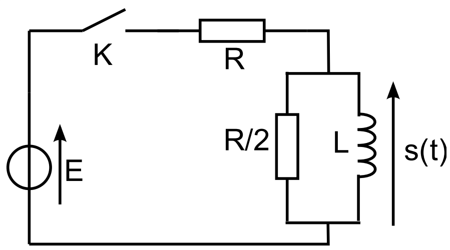


À l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps, nous fermons l'interrupteur K.

1. Préciser i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^-$, juste avant la fermeture de l'interrupteur K.
2. Préciser i, i_1, i_2 et u à l'instant $t = 0^+$.
3. Même question quand t tend vers l'infini.
4. En utilisant les lois de Kirchhoff, écrire les différentes relations entre i, i_1, i_2, R, E, C et u.
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$, la résoudre puis tracer l'allure de $u(t)$.

Exercice 2 Régime transitoire avec une bobine

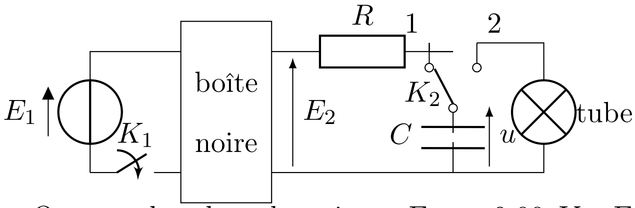
À la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K dans le circuit suivant.

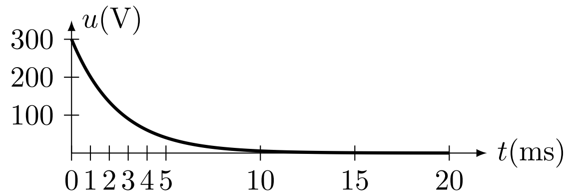


1. Déterminer la valeur de $s(0^+)$ ainsi que la valeur $s(+\infty)$.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ pour $t \geq 0$. En déduire l'expression de s(t).
3. Tracer l'allure de $s(t)$. Exprimer en fonction de R et L la date t_0 à laquelle $s(t_0) = \frac{s(0^+)}{10}$.
4. On mesure expérimentalement $t_0 = 3,0\ \mu s$. On donne $R = 1000\ \Omega$. Calculer L.
5. On remplace le générateur continu par un générateur délivrant un signal périodique en créneaux. Quel doit être l'ordre de grandeur de la fréquence du générateur pour qu'on puisse mesurer expérimentalement à l'aide de l'oscilloscope la date t_0 ?

Exercice 3 Flash d'appareil photo ✠

Pour délivrer un éclair très bref, de puissance lumineuse suffisante, on utilise un tube à décharge nécessitant une tension élevée pour son amorçage. Cette tension, typiquement de l'ordre de 300 V, est obtenue à partir d'une pile de 9 V à l'aide d'un dispositif électronique non décrit (boîte noire).





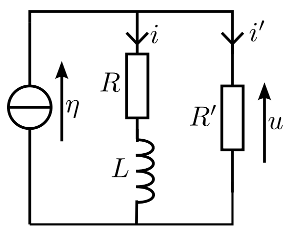
On prendra dans la suite : $E_1 = 9{,}00$ V ; $E_2 = 300$ V ; $R = 1{,}00$ kΩ ; $C = 150\,\mu$F. On ferme l'interrupteur K_1. Le dispositif électronique produit en sortie une tension $E_2 = 300$ V. On ferme ensuite l'interrupteur K_2 dans la position (1) pour charger le condensateur initialement déchargé. Puis on bascule l'interrupteur K_2 dans la position (2). Le condensateur se décharge alors rapidement dans le tube à décharge, produisant l'éclair lumineux. L'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de cette décharge est représentée ci-dessus.

1. Calculer la constante de temps τ de la charge du condensateur et indiquer le temps nécessaire à cette charge.
2. Calculer l'énergie E_C stockée dans le condensateur à la fin de la charge.

3. Pourquoi effectue-t-on une charge sous haute tension ?
4. Déterminer la constante de temps τ' de la décharge au travers du tube à éclat. En assimilant le tube à éclat, après son amorçage, à une résistance r, en déduire la valeur de celle-ci.
5. Comparer τ et τ' Commenter.

Exercice 4 Circuit RL soumis à un échelon de courant ◐✠

Le circuit que l'on considère est soumis à un échelon de courant délivré par un générateur idéal de courant tel que $\eta = 0$ pour $t < 0$ et $\eta = I_0 = 1{,}0\,\text{A}$ pour $t \geq 0$.



1. Déterminer $i(0^+)$ et $i'(0^+)$.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité instantanée $i(t)$ du courant qui traverse la bobine. Dans la suite : $R = 100\,\Omega$, $R' = 300\,\Omega$ et $L = 100\,\text{mH}$.
3. Proposer un code python permettant de résoudre numériquement à l'aide de la méthode d'Euler cette équation différentielle et d'afficher les courbes de $i(t)$ et de $u(t)$.

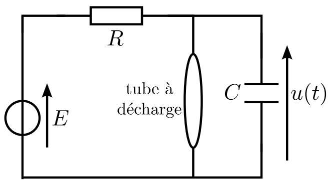
Exercice 5 Étude d'un éclairage par tube à décharge ◐✠

Un tube à décharge pour l'éclairage (appelé improprement « tube néon ») est un dipôle électrique qui possède les caractéristiques suivantes :

- Lorsqu'il est éteint, il est équivalent à un interrupteur ouvert
- Lorsqu'il est allumé, il se comporte comme un conducteur ohmique de résistance R_L

De plus, le tube à décharge s'allume dès que la tension à ses bornes dépasse la valeur V_a (tension d'allumage) et s'éteint dès que cette tension devient inférieure à V_e (tension d'extinction)

A l'instant $t = 0$, on alimente le tube par un générateur de Thévenin (de tension continue $E > V_a$ et de résistance R), et on le branche en parallèle avec un condensateur de capacité C initialement déchargé.



Application numérique : $E = 100\ V$; $V_a = 80\ V$; $V_e = 30\ V$; $R = 3,0\ k\Omega$; $C = 1,0\ \mu F$ et $R_L = 1,0\ k\Omega$.

Première phase : amorçage

1. Expliquer pourquoi le tube à décharge ne s'allume pas immédiatement à $t = 0$.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ lorsque le tube est éteint.
3. Déterminer l'expression de $u(t)$.
4. Représenter graphiquement $u(t)$ et, en vous aidant de ce graphe, montrer que, compte tenu des données numériques, il existe un instant t_1 auquel le tube s'allume. Déterminer l'expression littérale de t_1, puis calculer t_1.

Deuxième phase : tube à décharge allumé À partir de la date $t = t_1$, le tube à décharge est allumé.

5. Représenter le montage équivalent.
6. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
7. Déterminer $u(t)$ pour $t > t_1$.
8. Représenter graphiquement $u(t)$ pour $t > t_1$ et, en vous aidant de ce graphe, montrer qu'il existe un instant t_2 à partir duquel le tube à décharge s'éteint. Montrer que $t_2 = t_1 + R_0 C \ln\left(\frac{V_a - E_0}{V_e - E_0}\right)$ puis calculer numériquement t_2.

Troisième phase : tube à décharge éteint A partir de l'instant $t = t_2$, le tube à décharge est à nouveau éteint.

9. Quelle est l'équation vérifiée par $u(t)$ lorsque $t > t_2$?
10. Déterminer $u(t)$ pour $t > t_2$.
11. Déterminer l'expression littérale de l'instant t_3 où le tube à décharge se rallume à nouveau, puis calculer t_3.

Bilan sur le fonctionnement du tube à décharge

12. Représenter l'allure de la tension $u(t)$ pour $0 \leq t \leq t_3$.
13. Le tube à décharge s'allume et s'éteint donc périodiquement. Déterminer la période T de ce phénomène en régime établi.

Solutions des exercices

[1] *Réponses : 5)* $u(t) = \frac{E}{3}\left(1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

[2] *Réponses : 1)* $s(0^+) = \frac{E}{3}$, $s(+\infty) = 0\ V$ *; 2)* $s(t) = \frac{E}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{3L}{R}$ *; 3)* $t_0 = \tau \ln 10$ *; 4)* $L = 0,43\ mH$ *; 5)* $f \approx 77\ kHz$

[3] *Réponses : 1)* $\tau = 150\,\mathrm{ms}$ *; 2)* $E_C = 6{,}75\,\mathrm{J}$ *; 4)*$r = \frac{\tau'}{C} = 17\,\Omega$.

[4] *Réponses : 2)* $i(t) = \frac{R' I_0}{R'+R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$