

Durée de l'épreuve : 3h

Les 2 exercices et le problème sont indépendants

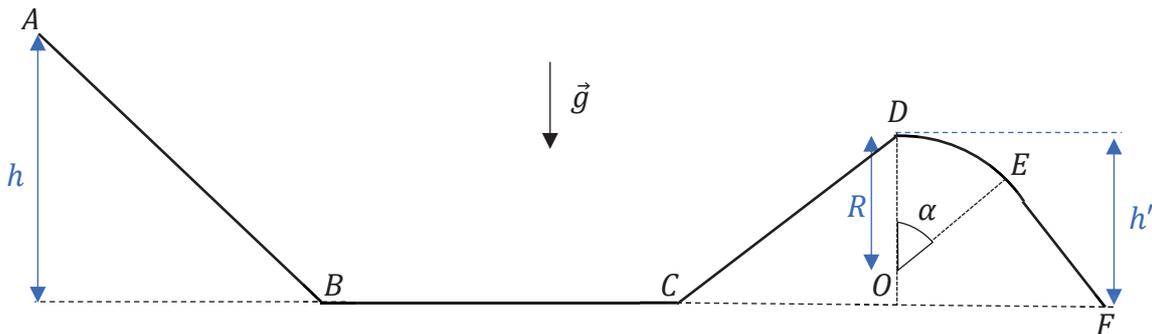
La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1: Saut en ski sur une bosse...

En ski alpin, bien des skieurs aiment les terrains accidentés pour leurs bosses. Pour peu que leur vitesse soit suffisante, le passage des bosses peut s'accompagner de sauts plus ou moins spectaculaires en fonction du relief et du niveau technique du skieur... Dans ce problème, nous allons étudier le franchissement d'une bosse que nous modéliserons par le parcours $ABCDEF$ (cf schéma ci-dessous) dans lequel :



- AB, BC, CD et EF sont rectilignes
- DE est un arc de cercle de rayon R et d'angle α



On assimile le skieur à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans cette étude, nous négligerons tous les phénomènes dissipatifs... et nous supposerons que M n'est soumis qu'à son poids \vec{P} et la réaction (normale) du support notée \vec{R}_n .

- 1) Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système ? Justifier.
- 2) Le skieur quitte le point A situé à une hauteur h sans vitesse initiale. Exprimer la vitesse du skieur en B et C en fonction de g et h . De même, exprimer la vitesse du skieur en D en fonction de g, h et h' .
- 3) On note θ l'angle polaire permettant de repérer le skieur sur l'arc de cercle entre D et E . Donner l'expression de l'énergie mécanique du skieur notée $E_m(M)$ entre D et E en fonction de sa vitesse $v(M)$, de m, g, R, θ et h' .
- 4) Montrer qu'en un point M quelconque situé entre D et E :

$$v(M) = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h') + 2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos \theta)}$$

- 5) En appliquant la deuxième loi de Newton en un point M quelconque entre D et E , donner l'expression de la réaction R_n du support en fonction de $m, g, \theta, v(M)$ et R puis en fonction de m, g, h, h', R et θ .
 - 6) Déterminer l'angle θ_0 pour lequel le skieur « saute la bosse ».
 - 7) Quelle est la hauteur minimale h_{min} pour que le skieur puisse faire un saut ?
- Application numérique : $R = 3,0 \text{ m}$; $\alpha = 30^\circ$; $h' = 5,0 \text{ m}$. Calculer h_{min} .

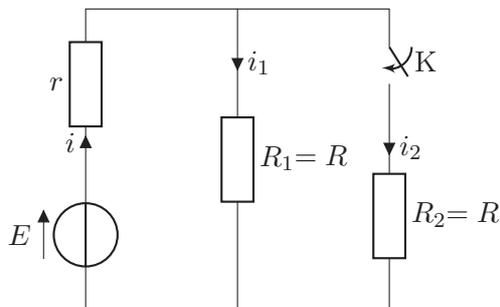
Exercice 2 Guirlandes électriques

Dans cet exercice, on cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlandes électriques numérotées 1 et 2 et modélisées par des résistors de résistances identiques $R = 2,0\ \Omega$. L'ensemble est alimenté par un générateur réel de fem E et de résistance interne $r = 1,0\ \Omega$. La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée à un interrupteur K en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement.

On supposera dans cet exercice que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

A Système de base

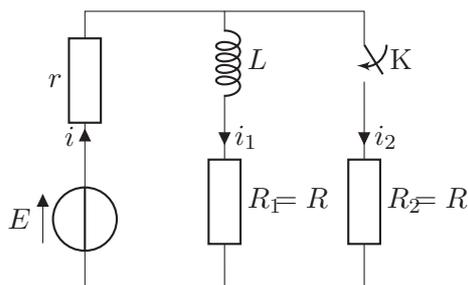
On considère dans un premier temps le circuit ci-dessous :



1. L'interrupteur K est ouvert.
 - 1.a. Donner l'expression de l'intensité du courant circulant dans R_1 . En déduire la puissance électrique $\mathcal{P}_{1,o}$ reçue par la guirlande R_1 .
 - 1.b. Que vaut $\mathcal{P}_{2,o}$ reçue par la guirlande R_2 ?
2. L'interrupteur K est fermé.
 - 2.a. Donner les expressions des intensités du courant i_1 et i_2 circulant dans R_1 et R_2 .
 - 2.b. Quelles sont les puissances $\mathcal{P}_{1,f}$ et $\mathcal{P}_{2,f}$ reçues respectivement par R_1 et R_2 ?
3. La puissance reçue par la guirlande 1 est-elle identique dans les deux régimes étudiés ? Que peut-on en déduire sur l'intensité lumineuse émise par la guirlande 1 lors des deux régimes ?

B Système amélioré

On considère désormais le circuit ci-dessous afin de limiter la variation de puissance électrique reçue par la guirlande numérotée 1 donc la variation de l'intensité du courant i_1 .



Une bobine d'inductance L a été ajoutée en série avec la première guirlande. L'interrupteur K est ouvert de manière périodique pour $t \in [0; T/2[$ et fermé pour $t \in [T/2; T[$.

1. On s'intéresse à l'intervalle de temps $t \in [0; T/2[$, lorsque l'interrupteur est ouvert.
 - 1.a. Établir l'équation différentielle dont i_1 est solution sur l'intervalle $[0; T/2[$. On fera apparaître un temps caractéristique τ_o .
 - 1.b. Vérifier que l'ajout de la bobine ne modifie pas la valeur de l'intensité du courant i_1 en régime permanent en comparant au résultat de la question A.1(a).
2. On s'intéresse à l'intervalle de temps $[T/2; T[$, lorsque l'interrupteur est fermé.
 - 2.a. Établir l'équation différentielle vérifiée par i_1 sur l'intervalle $[T/2; T[$. Identifier un temps caractéristique τ_f dont on donnera l'expression.
 - 2.b. Vérifier que l'ajout de la bobine ne modifie pas la valeur de l'intensité du courant i_1 en régime permanent en comparant au résultat de la question A.2(a).

Problème : Illustration de la force de Lorentz magnétique

Dans ce problème, la première et la deuxième partie sont indépendantes.

1^{ère} partie : Séparation d'isotopes par spectrométrie de masse et influence du rayonnement

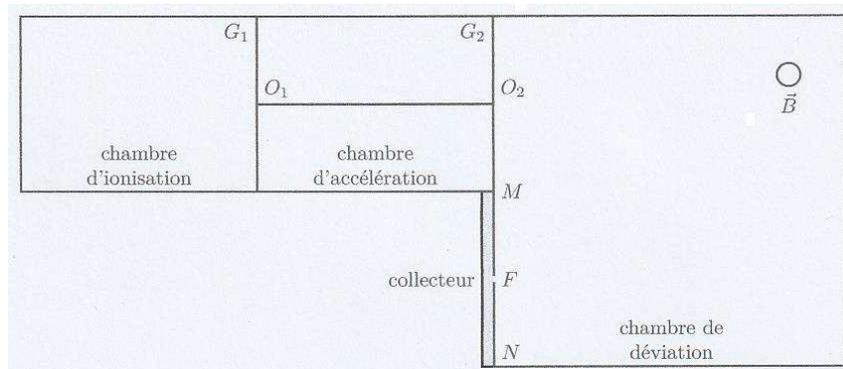
La France produit l'essentiel de son électricité (environ 75 %) à partir de centrales électriques nucléaires. Ces centrales utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235, seul isotope fissible, afin d'atteindre une teneur de l'ordre de 4 %.

L'uranium est un élément qui possède plusieurs isotopes. Les deux principaux isotopes de l'uranium sont U_{92}^{235} et U_{92}^{238} de masses molaires respectives $235,0 \text{ g. mol}^{-1}$ et $238,0 \text{ g. mol}^{-1}$. L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en U^{235} de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application désirée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique. Elle a été employée pendant la seconde Guerre Mondiale dans l'usine Y12 d'Oak Ridge dans des dispositifs appelés Calutrons.

Un Calutron est un spectrographe de masse constitué de plusieurs parties (cf figure ci-dessous) :

- la chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium U_{92}^{235} et U_{92}^{238} de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions U^+ . On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1 , la vitesse des ions est quasi nulle.
- la chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les grilles G_1 et G_2 .
- la chambre de déviation dans laquelle les ions déviés par un champ magnétique uniforme \vec{B} de direction perpendiculaire au plan de la figure. Un collecteur d'ions est disposé entre M et N . Une fente centrée sur O_2 de largeur L dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur F est placée entre M et N et a pour largeur L' dans le plan de la figure.

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.



On donne le nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, charge élémentaire $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
Permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F. m}^{-1}$. Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m. s}^{-1}$.
Electron-volt : $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

I. Accélération des ions

I.1) Quel doit-être le signe de la tension $U = V_{G_1} - V_{G_2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ?

I.2) Etablir les expressions des vitesses v_1 et v_2 respectivement des ions U_{92}^{235+} et U_{92}^{238+} lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1 et m_2 , e , et $U = V_{G_1} - V_{G_2}$.

I.3) L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est de 15,0 keV, en déduire la valeur de la tension U appliquée entre les deux grilles. Déterminer numériquement les vitesses v_1 et v_2 en respectant les chiffres significatifs.

II. Déviation des ions

II.1) On considère un faisceau homocinétique d'ions U_{92}^{235+} pénétrant dans la zone de déflexion magnétique avec une vitesse v_1 . Quel doit être le sens du champ magnétique \vec{B} pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?

II.2) Montrer que le mouvement des particules chargée est uniforme.

II.3) Dans le déflecteur magnétique, les ions décrivent une trajectoire circulaire de centre C connu. Faites un schéma représentant l'allure de la trajectoire d'un ion U_{92}^{235+} puis établissez l'expression de son rayon de courbure R_1 en fonction de m_1 , e , U et $B = \|\vec{B}\|$. Par analogie, donner l'expression du rayon de courbure R_2 des ions U_{92}^{238+} .

II.4) Le collecteur du Calutron consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en F de largeur L' placée entre M et N qui permet de recueillir les isotopes 235. Quelle doit-être la valeur du champ magnétique régnant dans le Calutron sachant que F est placé à $D = 940$ mm de O_2 .

II.5) La fente du collecteur a une largeur $L' = 4,00$ mm dans le plan de la figure. Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ?

II.6) L'intensité du faisceau utilisé dans le Calutron est de 100 mA. La source est alimentée en uranium contenant 0,7 % de U_{92}^{235+} et 99,3 % de U_{92}^{238+} . Quelle quantité de l'isotope 235 le Calutron peut-il isoler en une année de fonctionnement continu ?

III. Influence du rayonnement

On montre qu'une particule chargée possédant une accélération \vec{a} dans le référentiel d'étude rayonne de l'énergie. Du fait de ce rayonnement, l'énergie cinétique de la particule décroît au cours du temps. La puissance rayonnée est donnée par la formule de Larmor :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 \cdot a^2}{6 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3}$$

avec q charge de la particule, $a = \|\vec{a}\|$ norme de l'accélération, ϵ_0 permittivité du vide et c célérité de la lumière dans le vide.

III.1) Vérifier que cette relation est homogène.

III.2) Déterminer en fonction de e , B , ϵ_0 , c , m_1 et E_C la puissance \mathcal{P} rayonnée par un ion U_{92}^{235+} dans le déflecteur magnétique.

III.3) En déduire l'expression de l'énergie cinétique de l'ion U_{92}^{235+} au cours du temps et déterminer l'expression du temps caractéristique τ de décroissance de cette énergie.

III.4) Entre O_2 et F , l'énergie cinétique δE_C perdue par l'ion U_{92}^{235+} est faible et la norme de la vitesse de l'ion est quasi-constante. Montrer que :

$$\delta E_C = -\frac{e^2 \cdot v_1^3}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot D \cdot c^3}$$

III.5) Calculer δE_C .

III.6) Comparer δE_C à E_C et commenter.

2^{ème} partie : Etude de quelques accélérateurs de particules

IV. Description du principe de fonctionnement d'un cyclotron

Un cyclotron est composé de 2 Dees dans lesquels règnent un champ magnétique \vec{B} . Entre ces deux Dees on impose un champ électrique $\vec{E}(t)$ variant de manière sinusoïdale au cours du temps. A l'aide d'un schéma, décrivez en 10 lignes maximum (sans calculs) le principe de fonctionnement d'un cyclotron (mouvement d'une particule chargée dans un cyclotron, intérêt, limites, ordre de grandeur et applications).

V. Limites relativistes

Les accélérateurs de particules les plus puissants permettent d'atteindre des vitesses très proches de celle de la lumière. Dans ces conditions les lois de la mécanique classique ne sont plus applicables. Dans un référentiel galiléen, la relation fondamentale de la dynamique (ou deuxième loi de Newton) ainsi que le théorème de l'énergie cinétique restent valides à condition d'utiliser pour la quantité de mouvement $\vec{p}(M)$ et l'énergie cinétique d'une particule de masse m et de vitesse \vec{v} les expressions ci-dessous :

$$\vec{p}(M) = \gamma \cdot m \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad E_C = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

V.1) Vérifier que l'on retrouve les expressions non relativistes de $\vec{p}(M)$ et E_C lorsque $v \ll c$. On rappelle le développement limité :

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x \quad \text{pour} \quad x \ll 1$$

V.2) Justifier que le mouvement d'une particule de charge q dans un champ magnétique est encore uniforme en mécanique relativiste. En déduire l'expression du rayon R d'une particule chargée décrivant une trajectoire circulaire dans un champ magnétique en mécanique relativiste.

V.3) Quelle est l'influence de la vitesse v sur la vitesse angulaire $\omega = v/R$ et sur la période de révolution de la particule ? Expliquer alors pourquoi un cyclotron ne permet pas d'accélérer de particules jusqu'à des énergies du domaine relativiste. Quelle modification peut-on lui apporter afin d'atteindre de telles valeurs de l'énergie ?

V.4) Les machines dérivées du cyclotron restent néanmoins limitées en énergie. Les accélérateurs permettant d'atteindre les très hautes énergies (du domaine dit ultra-relativiste) sont des synchrotrons.

Un synchrotron est constitué d'un anneau circulaire de grande taille à l'intérieur duquel circulent les particules à accélérer. Sur le pourtour de cet anneau sont disposés une succession de cavités accélératrices et d'aimants servant à dévier les particules. A l'intérieur de chaque aimant règne un champ magnétique uniforme réglable dont la valeur est adaptée au fur et à mesure de l'accélération de façon à maintenir les particules sur une trajectoire de rayon R constant.

L'accélérateur le plus puissant du monde, le LHC construit au CERN à Genève possède une circonférence de 26 659 m le long de laquelle sont répartis 1232 aimants principaux. Il peut accélérer des protons jusqu'à une énergie maximale de 7,0 TeV.

-a- Calculer la valeur du facteur γ pour des protons (masse $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) d'énergie cinétique $E_C = 7,0$ TeV. En déduire la valeur de leur vitesse. Commenter.

-b- D'après le résultat de la question V.2), calculer la valeur du champ magnétique nécessaire. Commenter.

Vue aérienne du synchrotron européen à Grenoble



VI. Lentille magnétique

Dans les accélérateurs de particules il est souvent nécessaire de focaliser les particules chargées avant de les accélérer. Pour cela, on utilise des lentilles magnétiques. Dans une lentille magnétique, le champ magnétique \vec{B} est créé par une bobine composée de spires jointives, parcourues par un courant i sur une longueur $2 \cdot z_0$:

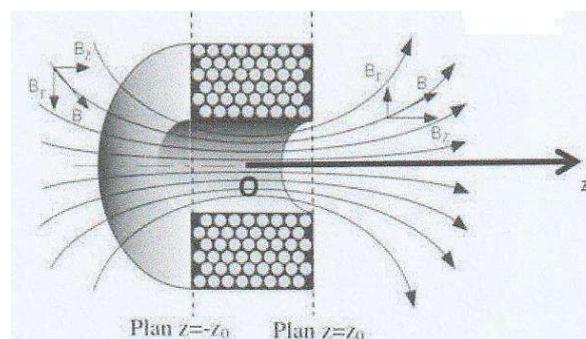
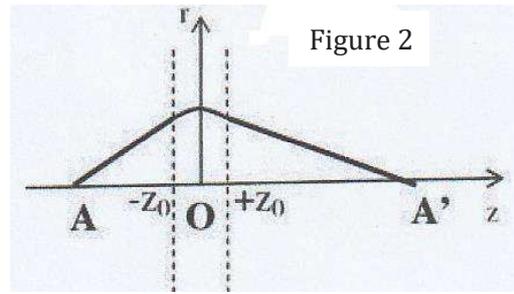


Figure 1

Nous allons étudier les effets d'une lentille magnétique sur un électron de charge $q = -e$. La position de l'électron est repérée par le point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe Oz étant l'axe de symétrie de la bobine centrée sur O . La figure ci-dessous représente la courbe $r(z)$ faisant apparaître qu'un électron issu d'un point A de l'axe ressort, après traversée de la lentille, par un point A' du même axe.



On suppose que l'électron est non-relativiste, qu'il est soumis uniquement à la force de Lorentz magnétique et que sa vitesse initiale est quasi-colinéaire à l'axe Oz : $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_z$.

VI.1) En coordonnées cylindriques, en un point M quelconque, le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z) \cdot \vec{u}_z$$

On appelle « lignes de champ » les lignes partout tangentes au champ magnétique $\vec{B}(M)$. Compte tenu du profil des lignes de champ magnétique créées par une bobine (cf figure 1), que peut-on dire de $B_\theta(r, \theta, z)$? Dans la suite, nous ferons l'hypothèse que $\vec{B}(M) = B_r(r, z) \cdot \vec{u}_r + B_z(r, z) \cdot \vec{u}_z$.

VI.3) Sur la figure 1, dans quelle zone le champ magnétique est-il le plus intense ? Justifier.

VI.4) Montrer qu'en coordonnées cylindriques : $a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \cdot \dot{\theta})$

VI.5) Montrer qu'à l'intérieur de la bobine, les équations du mouvement de l'électron peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2 = -\frac{e \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot B_z}{m} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \cdot \dot{\theta}) = \frac{e}{m} (\dot{r} \cdot B_z - \dot{z} \cdot B_r) \\ \ddot{z} = \frac{e \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot B_r}{m} \end{cases}$$

VI.6) On admet que la résolution du système conduit, pour la fonction $r(z)$, à l'équation approchée suivante :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\left(\frac{e^2 \cdot r_0}{4 \cdot m^2 \cdot v_0^2} \right) \cdot B_z^2$$

où r_0 est la valeur de r à l'entrée et à la sortie de la lentille.

En remarquant que $\left(\frac{dr}{dz} \right)_{-z_0} = -\frac{r_0}{OA}$ et $\left(\frac{dr}{dz} \right)_{z_0} = -\frac{r_0}{OA'}$ déduire de l'équation précédente que \overline{OA} et $\overline{OA'}$ sont liés par la relation de conjugaison d'une lentille et préciser sa distance focale image f' en fonction de e, m, v_0 et de l'intégrale I que l'on ne cherchera pas à calculer :

$$I = \int_{-z_0}^{z_0} B_z^2 \cdot dz$$

VI.7) Les grandeurs e, m et v_0 étant fixées, quelle grandeur physique permet de modifier la distance focale f' de la lentille magnétique ? Justifier.

VI.8) Définir la fonction python qui prend en entrée : $X = (r, \theta, z, r_{point}, \theta_{point}, z_{point})$ et t et qui permettrait de résoudre numériquement le système d'équation différentielles avec odeint .