

Problème I Caténaire

A Modélisation de la caténaire et du rail

1. 1.a. La puissance est la dérivée de l'énergie par rapport au temps d'où $[\mathcal{P}] = \frac{[E]}{[t]}$ où E est une énergie.

Or $[E] = ML^2T^{-2}$, donc $[\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}$.

Pour déterminer la dimension d'une résistance, on peut utiliser la puissance dissipée dans une résistance (effet Joule) : $[\mathcal{P}] = [Ri^2]$ d'où $[R] = \frac{[\mathcal{P}]}{[i^2]}$. Donc $[R] = \frac{ML^2T^{-3}}{I^2}$ $[R] = ML^2T^{-3}I^{-2}$

- 1.b. Déterminons la dimension de σ : $[\sigma] = \frac{[\ell]}{[R][s]} = \frac{L}{ML^2T^{-3}I^{-2} \times L^2}$

$$[\sigma] = M^{-1}L^{-3}T^3I^2$$

σ s'exprime donc en $\text{kg}^{-1}\text{m}^{-3}\text{s}^3\text{A}^2$ ou encore en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

2. Comparons la résistance d'un rail, donnée par $R_{\text{rail}} = \frac{\ell}{\sigma s_{\text{rail}}}$ et celle d'une caténaire, de même longueur ℓ , $R = \frac{\ell}{\sigma s}$ avec $s = 1,87\text{cm}^2$ et $s_{\text{rail}} = 50\text{cm}^2$:

$$\frac{R}{R_{\text{rail}}} = \frac{s_{\text{rail}}}{s} = 34$$

Ainsi, la résistance d'une caténaire est environ 34 fois plus élevée que celle des rails, donc nous pourrions négliger la résistance des rails dans la suite.

3. Entre deux sous-stations, la distance est de $\ell = 60\text{km}$, la résistance totale de la caténaire entre deux sous-stations vaut $R = \frac{\ell}{\sigma s}$.

$$\text{On calcule : } R = \frac{\ell}{\sigma s} = \frac{60 \times 10^3}{5,82 \times 10^7 \times 1,47 \times 10^{-4}} = 7,0 \Omega.$$

4. En amont de la locomotive, la caténaire est de longueur x d'où $R_1 = \frac{x}{\sigma s}$, avec, d'après la question précédente : $\sigma s = \frac{\ell}{R}$. On en déduit : $R_1 = R \frac{x}{\ell}$

5. Pour R_2 , on peut procéder de deux façons :

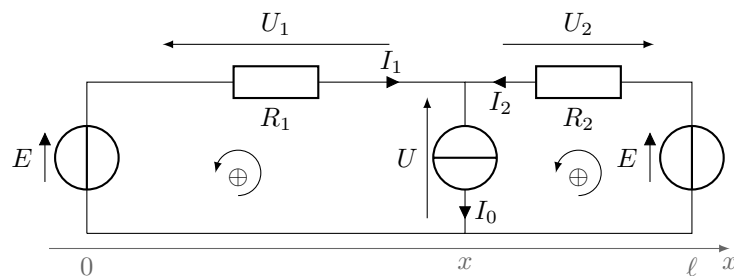
— La résistance en aval est égale à la résistance totale moins la résistance en amont : $R_2 = R - R_1 = R - R \frac{x}{\ell}$.

— En aval, la longueur de la caténaire est $\ell - x$, ainsi $R_2 = \frac{\ell - x}{\sigma s}$, avec $\sigma s = \frac{\ell}{R}$, on en déduit $R_2 = R \frac{\ell - x}{\ell}$.

$$\text{Finalement : } R_2 = R \left(1 - \frac{x}{\ell}\right).$$

B Bilan de puissance

1. On note U_1 (respectivement U_2) les tensions aux bornes de R_1 (respectivement R_2), elles sont fléchées en convention récepteur.



Il y a cinq inconnues : U_1 , U_2 , I_1 , I_2 et U . Il est donc nécessaire d'établir cinq équations indépendantes pour résoudre le problème.

- loi des mailles à gauche : $U + U_1 - E = 0$ avec $U_1 = R_1 I_1$
soit $\boxed{U + R_1 I_1 = E}$ (1)
- loi des mailles à droite : $E - U_2 - U = 0$ avec $U_2 = R_2 I_2$
soit $\boxed{U + R_2 I_2 = E}$ (2)
- loi des nœuds : $\boxed{I_1 + I_2 - I_0 = 0}$ (3)

D'après les équations (1) et (2), on a $R_1 I_1 = R_2 I_2$ soit $I_1 = I_2 \frac{R_2}{R_1}$. En remplaçant cette expression de I_1

dans l'équation (3) nous déterminons $\boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0}$. D'après (3) : $I_1 = I_0 - I_2$, donc nous obtenons :

$$\boxed{I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0}.$$

En réinjectant l'expression de I_1 dans l'équation (1) (ou I_2 dans l'équation (2)) nous obtenons : $\boxed{U = E - I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$.

On peut en déduire, avec les expressions de R_1 et R_2 établies précédemment et en observant que $R_1 + R_2 = R$:

$$U = E - I_0 \times \frac{R \frac{x}{\ell} \times R \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}{R}$$

Soit :

$$\boxed{U = E - R I_0 \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$$

De même : $\boxed{I_1 = I_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$ et $\boxed{I_2 = I_0 \frac{x}{\ell}}$.

- La locomotive est placée en convention récepteur avec U la tension à ses bornes et I_0 l'intensité la traversant. Ainsi, la puissance reçue par la locomotive s'écrit

$$\boxed{\mathcal{P}_c = U \times I_0 = E I_0 - R I_0^2 \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$$

- La puissance $\mathcal{P}_J$ reçue par la caténaire est donnée par :

$$\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{J1} + \mathcal{P}_{J2} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$$

Avec les expressions précédentes : $\mathcal{P}_J = R \frac{x}{\ell} \times I_0^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 + R \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \times I_0^2 \frac{x^2}{\ell^2}$

En factorisant ce qui peut l'être : $\mathcal{P}_J = R I_0^2 \frac{x}{\ell} \times \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \times \left(1 - \frac{x}{\ell} + \frac{x}{\ell}\right)$.

$$\boxed{\mathcal{P}_J = R I_0^2 \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$$

Cette puissance, nécessairement positive ($x < \ell$), donc réellement reçue par la résistance, est dissipée par effet Joule, autrement dit transformée en transfert thermique.

- La puissance totale $\mathcal{P}_f$ fournie par les deux sous-stations s'écrit $\mathcal{P}_f = E \times I_1 + E \times I_2$ (les deux générateurs sont en convention générateur), soit $\mathcal{P}_f = E \times (I_1 + I_2)$

À l'aide de la loi des nœuds, on en déduit $\boxed{\mathcal{P}_f = E I_0}$

- On vérifie bien que : $\boxed{\mathcal{P}_f = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_c}$, ce qui traduit la conservation de l'énergie : ce qui est fourni par les deux générateurs est en partie reçue par la locomotive et le reste est perdue par effet Joule dans les caténaires (à cause de leurs résistances non nulles).

C Rendement énergétique

- La locomotive atteint la fin du tronçon considéré à l'instant $\boxed{t_f = \frac{\ell}{v_0}}$.

A.N. : $t_f = 3,76 \times 10^2$ s.

- Le TGV est supposé rouler à vitesse constante et passer à la sous-station en amont à l'instant $t = 0$, ainsi $\boxed{x(t) = v_0 t}$.

En remplaçant l'expression de x dans $\mathcal{P}_J$, on obtient $\boxed{\mathcal{P}_J(t) = R I_0^2 \frac{v_0 t (\ell - v_0 t)}{\ell^2}}$

3. L'énergie totale $W_{J,t_0 \rightarrow t_f}$ dissipée par effet Joule pendant le passage du train sur ce tronçon est l'intégrale de $\mathcal{P}_J$ calculée entre t_0 et t_f :

$$W_{J,t_0 \rightarrow t_f} = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{P}_J(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} RI_0^2 \frac{v_0 t (\ell - v_0 t)}{\ell^2} dt$$

soit

$$W_{J,t_0 \rightarrow t_f} = \frac{RI_0^2}{\ell^2} \int_{t_0}^{t_f} (\ell v_0 t - v_0^2 t^2) dt = \frac{RI_0^2}{\ell^2} \left[\ell v_0 \frac{t^2}{2} - v_0^2 \frac{t^3}{3} \right]_{t_0}^{t_f}$$

Ainsi

$$W_{J,t_0 \rightarrow t_f} = \frac{RI_0^2}{\ell^2} \times v_0 t_f^2 \left(\frac{\ell}{2} - \frac{v_0 t_f}{3} \right)$$

Avec la relation $v_0 t_f = \ell$, on en déduit : $W_{J,t_0 \rightarrow t_f} = \frac{RI_0^2}{v_0} \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3} \right)$ soit :

$$W_{J,t_0 \rightarrow t_f} = \frac{RI_0^2 \ell}{6v_0}$$

4. L'énergie totale fournie par les deux sous-stations s'écrit :

$$W_{f,t_0 \rightarrow t_f} = \int_{t_0}^{t_f} EI_0 dt = EI_0 t_f$$

car EI_0 est une constante. Ainsi $W_{f,t_0 \rightarrow t_f} = EI_0 \frac{\ell}{v_0}$ sur le même intervalle de temps.

5. On en déduit l'énergie $W_{c,t_0 \rightarrow t_f}$ consommée par les moteurs de la locomotive, par conservation de l'énergie :

$$W_{c,t_0 \rightarrow t_f} = W_{f,t_0 \rightarrow t_f} - W_{J,t_0 \rightarrow t_f} = EI_0 \frac{\ell}{v_0} - \frac{RI_0^2 \ell}{6v_0}$$

Soit $W_{c,t_0 \rightarrow t_f} = I_0 \frac{\ell}{v_0} (E - RI_0)$

6. Le rendement de ce mode d'alimentation de la locomotive s'écrit :

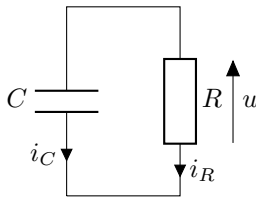
$$\eta = \frac{W_{c,t_0 \rightarrow t_f}}{W_{f,t_0 \rightarrow t_f}} = \frac{EI_0 \frac{\ell}{v_0} - \frac{RI_0^2 \ell}{6v_0}}{EI_0 \times \frac{\ell}{v_0}}, \text{ soit } \eta = 1 - \frac{RI_0}{6E}$$

7. $\eta = 97\%$.

Problème II Modèle de Winkessel du système cardiovasculaire

A Modèle électrique du système artériel

1. 1.a. Le générateur idéal de courant modélise le muscle cardiaque qui injecte le sang.
1.b. L'interrupteur modélise la valve aortique qui libère le sang lorsque celui-ci est comprimé.
1.c. Lorsque K est ouvert, le circuit est :

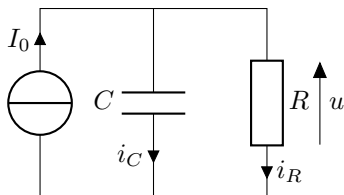


$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = -i_C(t) = -C \frac{du}{dt} \text{ d'où}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = 0$$

avec $\tau = RC$.

- 1.d. Lorsque K est fermé, le circuit devient :



D'après la loi des nœuds : $i_R + i_c = I_0$

or $i_R = \frac{u(t)}{R}$ et $i_C = C \frac{du}{dt}$ d'où :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u(t) = \frac{I_0}{C} \text{ et :}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = \frac{RI_0}{\tau}$$

avec $\tau = RC$.

2. 2.a. .

Modèle électrique	Modèle cardiovasculaire
Charge : q	Volume de sang : V
Intensité (ou débit de charges) : $i_C = \frac{dq}{dt}$	débit de sang $D_C = \frac{dV}{dt}$
Intensité constante : I_0	Débit sanguin constant : D_0
Potentiel électrique	Pression
Différence de potentiels ou tension : $u(t)$	Différence de pressions : $P(t) - P_{\text{ref}}$
Résistance électrique : R	Résistance hydraulique : R

2.b. Lorsque la valve aortique est fermée, le sang n'est pas transféré du cœur vers l'aorte, l'interrupteur K est donc ouvert.

Lorsque la valve aortique est ouverte, le sang passe, l'interrupteur K est donc fermé.

3. On déduit des analogies :

3.a. pour la valve fermée : $\frac{d(P(t) - P_{\text{ref}})}{dt} + \frac{1}{\tau}(P(t) - P_{\text{ref}}) = 0$ ou encore :

$$\boxed{\frac{dP}{dt} + \frac{1}{\tau}P(t) = \frac{P_{\text{ref}}}{\tau}} \quad (1)$$

3.b. pour la valve ouverte, $\frac{d(P(t) - P_{\text{ref}})}{dt} + \frac{1}{\tau}(P(t) - P_{\text{ref}}) = \frac{RD_0}{\tau}$ ou encore :

$$\boxed{\frac{dP}{dt} + \frac{1}{\tau}P(t) = \frac{RD_0 + P_{\text{ref}}}{\tau}} \quad (2)$$

B Battements du cœur

1. 1.a. Durant la systole, la valve est ouverte.

1.b. Résolution de (2) :

- solution particulière : $P_p = RD_0 + P_{\text{ref}}$
- solution de l'équation homogène : $P_h(t) = \lambda e^{-t/\tau}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- solution générale : $P(t) = RD_0 + P_{\text{ref}} + \lambda e^{-t/\tau}$

On détermine λ à l'aide de la condition initiale $P(t=0) = P_0$,

$$A = P_0 + RD_0 - P_{\text{ref}}$$

$$\boxed{P(t) = (P_0 - RD_0 - P_{\text{ref}})e^{-t/\tau} + RD_0 + P_{\text{ref}}}$$

2. 2.a. Lors de la diastole, la valve aortique est fermée.

2.b. Résolution de (1) :

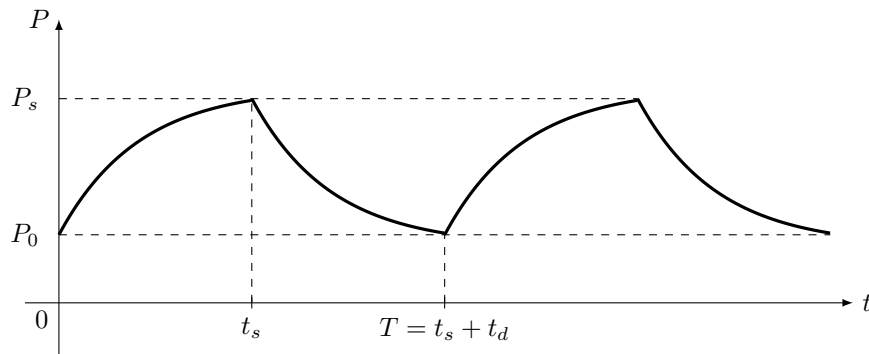
- solution particulière : $P_p = P_{\text{ref}}$
- solution de l'équation homogène : $P_h(t') = \lambda' e^{-t'/\tau}$ où $\lambda' \in \mathbb{R}$.
- solution générale : $P(t) = P_{\text{ref}} + \lambda' e^{-t'/\tau}$

On détermine λ à l'aide de la condition initiale $P(t'=0) = P(t=t_s) = P_s$, d'où $\lambda' = P_s - P_{\text{ref}}$

$$\boxed{P(t') = P_{\text{ref}} + (P_s - P_{\text{ref}})e^{-t'/\tau}}$$

ou encore, en fonction de t : $P(t) = P_{\text{ref}} + (P_s - P_{\text{ref}})e^{-(t-t_s)/\tau}$.

3. .



4. 4.a. On atteint la pression P_0 à la fin de la diastole, en $t' = t_d$ ou encore, en $t = T : P_0 = P(t' = t_d) = P_{\text{ref}} + (P_s - P_{\text{ref}})e^{-t_d/\tau}$
ou encore

$$P_0 = P(t = T) = P_{\text{ref}} + (P_s - P_{\text{ref}})e^{-(T-t_s)/\tau}$$

On atteint P_s à la fin de la systole, en $t = t_s$:

$$P_s = (P_0 - P_{\text{ref}} - RD_0)e^{-t_s/\tau} + P_{\text{ref}} + RD_0$$

On réinjecte l'expression de P_0 :

$$P_s = (P_{\text{ref}} + (P_s - P_{\text{ref}})e^{-(T-t_s)/\tau} - RD_0 - P_{\text{ref}})e^{-t_s/\tau} + RD_0 + P_{\text{ref}}$$

$$P_s(1 - e^{-(T-t_s)/\tau} \times e^{-t_s/\tau}) = P_{\text{ref}}(1 - e^{-(T-t_s)/\tau} \times e^{-t_s/\tau}) + RD_0(1 - e^{-t_s/\tau})$$

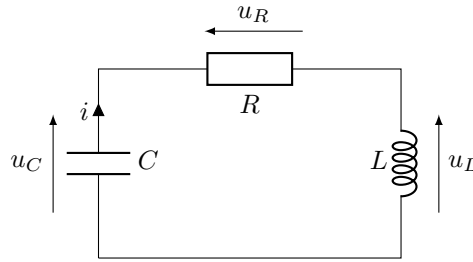
$$P_s = P_{\text{ref}} + RD_0 \frac{1 - e^{-t_s/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$$

4.b. A.N. : $P_s = 1,3 \times 10^2 \text{ mmHg}$ et $P_0 = 70 \text{ mmHg}$

4.c. Le modèle de Winkessell donne un rapport $\frac{P_s}{P_0} = \frac{13}{7}$, ce qui est assez éloigné de la valeur attendue (+ de 20% d'erreur)

5. La diastole est bien décrite par le modèle de Winkessell, contrairement à la systole. L'hypothèse d'un débit sanguin D_0 constant ne semble pas cohérent avec les observations expérimentales et explique la différence observée entre le modèle et la réalité.

Problème III Propulsion électromagnétique : un prototype de laboratoire



1. La loi des mailles appliquée au circuit donne $u_C = u_R + u_L$ avec $u_R = Ri$, $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = -C \frac{du_C}{dt}$ (convention générateur). Ainsi, $u_C = -RC \frac{du_C}{dt} - LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$ ou encore

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

On a bien

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{\tau_{RL}} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau_{RL}\tau_{RC}} u_C = 0$$

avec $\frac{R}{L} = \frac{1}{\tau_{RL}}$ et $\frac{1}{LC} = \frac{R}{LRC} = \frac{1}{\tau_{RC}\tau_{RL}}$. On en déduit les constantes de temps :

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R} \text{ et } \tau_{RC} = RC$$

2. 2.a. Initialement, le condensateur est chargé ($u_C \neq 0$) et la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps. De plus, l'interrupteur K est initialement ouvert donc aucun courant ne circule dans le circuit ($i = 0$) et le courant dans un circuit présentant une bobine est une fonction continue du temps. La courbe en pointillés de la figure 3 représente donc la tension $u_C(t)$ et la courbe en trait plein l'intensité du courant $i(t)$.
- 2.b. Le régime transitoire observé ne présente pas d'oscillations, il s'agit donc d'un régime transitoire apériodique. Le régime apériodique critique étant quasiment impossible à obtenir, on ne considère pas cette hypothèse très peu probable. La suite du problème confirme le régime apériodique.

3. On résout l'équation différentielle (1). Pour cela, on introduit le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle : $r^2 + \frac{1}{\tau_{RL}}r + \frac{1}{\tau_{RL}\tau_{RC}} = 0$ de discriminant :

$$\Delta = \frac{1}{\tau_{RL}^2} - \frac{4}{\tau_{RC}\tau_{RL}} = \frac{1}{\tau_{RL}^2} \left(1 - 4\frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}} \right)$$

Le régime apériodique observé implique un discriminant positif et une condition sur τ_{RL} et τ_{RC} :

$$\tau_{RL} < \frac{\tau_{RC}}{4}$$

On note r_1 et r_2 les deux racines du polynôme :

$$\boxed{r_1 = \frac{1}{2\tau_{RL}} \left(-1 - \sqrt{1 - 4\frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}}} \right)} \quad \text{et} \quad \boxed{r_2 = \frac{1}{2\tau_{RL}} \left(-1 + \sqrt{1 - 4\frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}}} \right)}$$

r_1 et r_2 sont des racines négatives et on a bien $r_1 < r_2$.

4. En régime apériodique, la solution de l'équation différentielle sans second membre s'écrit

$$u_C(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

On détermine les deux constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales :

- $u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = E$ par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.
- $\frac{du_C}{dt}(t = 0^+) = -\frac{i(t = 0^+)}{C}$ or $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$ par continuité de l'intensité du courant dans une bobine.

Ainsi, $A_1 + A_2 = E$ et $r_1 A_1 + r_2 A_2 = 0$ d'où

$$A_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} E \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{r_1}{r_2 - r_1} E$$

Finalement :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{r_2 - r_1} (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t})}$$

5. En dérivant, il vient

$$\boxed{i(t) = -C \frac{du_C}{dt} = -\frac{CEr_1 r_2}{r_2 - r_1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) = \frac{CEr_1 r_2}{r_2 - r_1} (e^{r_2 t} - e^{r_1 t})}$$

6. 6.a. $\tau_{RL} \ll \tau_{RC}$ donc $\varepsilon = \frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}} \ll 1$

On écrit $r_1 = \frac{1}{2\tau_{RL}} \left(-1 - \sqrt{1 - 4\frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}}} \right) = \frac{1}{2\tau_{RL}} (-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon})$.

L'approximation donne : $r_1 \simeq \frac{1}{2\tau_{RL}} (-1 - 1 + 2\varepsilon) = \frac{1}{\tau_{RL}} (-1 + \varepsilon)$ donc

$$\boxed{r_1 \simeq -\frac{1}{\tau_{RL}}}$$

Et, $r_2 = \frac{1}{2\tau_{RL}} \left(-1 + \sqrt{1 - 4\frac{\tau_{RL}}{\tau_{RC}}} \right) = \frac{1}{2\tau_{RL}} (-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})$, ce qui donne : $r_2 \simeq \frac{1}{2\tau_{RL}} (-1 + 1 - 2\varepsilon) = -\frac{1}{\tau_{RL}} \varepsilon$ soit :

$$\boxed{r_2 \simeq -\frac{1}{\tau_{RC}}}$$

- 6.b. On en déduit $\frac{CEr_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{CE}{\tau_{RC} - \tau_{RL}}$ qu'on remplace dans l'expression de l'intensité i :

$$i(t) = \frac{CE}{\tau_{RC} - \tau_{RL}} (e^{r_2 t} - e^{r_1 t}) = I_0 (e^{-t/\tau_{RC}} - e^{-t/\tau_{RL}})$$

ce qui est conforme aux indications de l'énoncé avec $\boxed{I_0 = \frac{CE}{\tau_{RC} - \tau_{RL}}}$.

6.c. Aux temps longs, l'intensité du courant est telle que $i(t) \simeq I_0 e^{-t/\tau_{RC}}$. Pour estimer τ_{RC} , on prolonge la partie décroissante de l'intensité du courant jusqu'à l'axe des ordonnées et on trace la tangente en $t = 0$. On relève alors $\tau_{RC} \simeq 2,5 \text{ ms}$ et $I_0 \simeq 1,15 \text{ kA}$.

6.d. D'après les calculs qui précèdent, $I_0 = \frac{CE}{\tau_{RC} - \tau_{RL}}$ donc $\tau_{RL} = \tau_{RC} - \frac{CE}{I_0}$.

Remarque : $\tau_{RL} \simeq 3,3 \times 10^{-4} \text{ s}$. On a bien $\tau_{RL} < \frac{\tau_{RC}}{4}$.

On déduit de ces mesures : $R = \frac{\tau_{RC}}{C}$ et $L = R\tau_{RL} = r \left(\tau_{RC} - \frac{CE}{I_0} \right)$.

A.N. : $R \simeq 0,20 \Omega$ et $L = R\tau_{RL} \simeq 65 \mu\text{H}$.

